Числовые ряды

План

1. Числовые ряды. Определение.
2. Необходимый признак сходимости.
3. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. Знакопеременные ряды.
5. Знакочередующиеся ряды.
6. Признак Лейбница.

Сумма ряда или **ряд**, — математическое выражение, позволяющее записать бесконечное количество слагаемых и подразумевающее значение их суммы, которое можно получить в предельном смысле. Если значение суммы (в предельном смысле) существует, то говорят, что ряд ***сходится***. В противном случае говорят, что он ***расходится***

Пусть дана бесконечная последовательность чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \qquad (1)$$

Выражение: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

называется *числовым рядом*, а числа - *членами ряда.*

Суммы $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots; S_n = a_1 + a_2 + a_n, \ldots$

называются *частичными* *суммами ряда*. (2)

Если последовательность частичных сумм имеет

конечный предел $$S = \lim_{n \to \infty} S_n \qquad (3)$$

то этот предел называется *суммой ряда*. В этом случае ряд называется *сходящимся.* Если же предел (3) не существует или равен ∞ то ряд расходится и суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (4)$$

При нарушения условия (4) ряд заведомо расходится.

Заметим, что из сходимости ряда (2) следует сходимость его остатка $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ и, наоборот, из сходимости остатка ряда следует сходимость исходного ряда. Иначе говоря, если отбросить конечное число начальных членов ряда, то это не отразится на сходимости (расходимости) ряда.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1) Признак сравнения рядов

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (5)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (6)$$

- Если, начиная с некоторого номера n ϵ N, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5) и из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

2) Признак Даламбера.

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ то при $\ell<1$

ряд (5) сходится , а при $\ell>1$ расходится. При $\ell=1$ вопрос о сходимости ряда остается переменным.

3) Признак Коши

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\ (a_n>0)$ то

при $\ell<1$ ряд (5) сходится, а при $\ell>1$ расходится. Если $\ell=1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Примеры

1. Написать пять первых членов ряда по данному общему члену $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots. \qquad (*)$$

2. Найти для ряда (*) частичную сумму первых n членов(S_n)

Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ запишем иначе:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Частичная сумма ряда

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Отсюда следует, что ряд (*) сходится и его сумма S=1

3. Написать формулу общего члена для ряда:

$$\frac{2}{5}-\frac{4}{8}+\frac{6}{11}-\frac{8}{14}+\ldots$$

Числители членов – четные числа вида 2n,

а знаменатели –числа, которые получаются по формуле 3n+2. (n=1,2,3,…)

Учитывая, что знаки членов ряда чередуются, получим

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n}{3n+2}$$

4. *Гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ - расходиться!

если $a_n = \dfrac{1}{C \times n}$,то расходится!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{3}{2} + \frac{5}{7} + \frac{7}{12} + \ldots + \frac{2n+1}{5n-3} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0$$ **=>** ряд расходится

5. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!} \qquad a_n=\frac{2^{''}}{n!} \qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

ℓ=0<1 => ряд сходится.

6. Исследовать по признаку Коши сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2_{n+1}}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2_{n+1}}=\frac{1}{2}<1 \qquad \text{=> сходится}$$

Знакопеременные ряды

Определение: Если члены числового ряда с разными знаками, то такой ряд будет называться знакопеременным.

- Знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ (1)

называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$ (2)

Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

● Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся*.

Признаки абсолютной сходимости знакопеременного ряда те же, что и сходимости с положительными членами.

Знакочередующиеся ряды

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$ (3)

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$ (3`)

где n>0 (n=1,2,3,…) называется знакочередующимся. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда (3) убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то такой ряд сходится и сумма его $0<S<a_1$

Исследовать сходимость знакопеременного ряда.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\times\frac{1}{2n-1}+...$$

Члены данного ряда убывают по абсолютной величине, знаки чередуются и предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$$ =>ряд сходится

Составлен ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$ (а)

и сравним его с расходящимся рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}$$ (б)

(т.к. расходится гармонический ряд).

Каждый член ряда (а) больше соответственного члена ряда (б), следовательно, ряд (а) расходится, потому данный ряд сходится условно.

Итак: 1) Сходятся условно ряды с общим членом

$$\frac{(-1)^{n-1}}{an-1} \quad \text{или} \quad \frac{(-1)^{n}}{an-1} \qquad \left(\frac{(-1)^{n}}{4n-1}\right)$$

2) Абсолютно сходятся ряды с общим членом

$$a_n = \frac{(-1)^n}{a^n}; \frac{1}{a^n}$$ - сходится

3) Расходятся ряды с общим членом

$$a_n = (-1)^n \times n$$

$$-1+2-3+4-...+(-1)^n \times n+$$

Признак Лейбница не работает.

1+1+1+1+…

$S_n = n$ - ряд расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

4) $\sum \frac{1}{n^2}$ - сходится.

5) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ - сходится условно.