Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» Факультет математики и информационных технологий

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА НА ПРИМЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Чернявский Михаил Михайлович,
преподаватель кафедры Г и МА,

Грицкевич Никита Сергеевич,
студент 2 курса ФМиИТ

Научный руководитель

Трубников Юрий Валентинович,
профессор кафедры Г и МА,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Актуальность

Известно, в общем случае корни произвольного алгебраического полинома пятой степени и выше не могут быть выражены в виде конечной комбинации арифметических действий и радикалов от коэффициентов полинома (теорема Абеля).

Но если полином имеет единственный **кратный корень**, то этот корень **можно выразить** в виде дробно-рациональной функции от коэффициентов полинома.

В современной литературе, посвященной непосредственно исследованию полиномов, имеющих кратные корни, например, в [1]-[3], не приводится конечный вид формул для нахождения кратных корней (даже для уравнений четвертой и пятой степеней).

---

1. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

2. D'Andrea, C. Subresultants in multiple roots / C. D'Andrea, T. Krick, A. Szanto // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – Vol. 438. – P. 1969–1989.

3. Gelfand, I. M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determi-nants / I. M. Gelfand, M. M Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.

Актуальность

Наличие более одного кратного корня у полинома представляет отдельную проблему.

В связи с развитием возможностей систем компьютерной математики стали возможными сложные аналитические преобразования, которые ранее не поддавались ручному счету. Поэтому в XXI веке были получены новые результаты в рассматриваемой области математики.

1. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.
2. Трубников, Ю. В. О неполной факторизации полиномов / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, В. В. Юргелас // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика – 2021. – № 2. – С. 86–94.
3. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

Цель доклада –

на примере алгебраического уравнения пятой степени провести анализ современных методов получения точных аналитических формул для выражения кратных корней полинома через коэффициенты.

Материал исследования –

алгебраические полиномы над полем комплексных чисел, имеющие кратный корень.

Методы исследования –

методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики Maple 2019

Сведения из алгебры

Пусть уравнения $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}=0, \qquad \varphi(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}=0$ (1)

имеют общий корень. Необходимым и достаточным условием этого свойства является равенство

$$S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)=0.$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ – корни уравнений (1). Так как функция S является симметричной функцией этих совокупностей корней, то её можно представить в виде функции от коэффициентов рассматриваемых полиномов.

Выражение $\boxed{R=a_0^m b_0^n S(a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_m)}$

называется ***результантом*** полиномов f и φ.

Сведения из алгебры

Так как $$f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i),\qquad \varphi(z)=b_0\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j),$$

то результант можно представить в виде

$$R=a_0^m\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n)=(-1)^{mn}b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m). \quad (2)$$

Также результант можно представить в виде определителя

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

Значение результанта многочлена и его первой производной прямо пропорционально значению дискриминанта *D*

$$R(f,f')=(-1)^{n(n-1)/2}a_0D.$$

Достигнутые результаты

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}, \qquad \varphi(z)=f^{(k-1)}(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}.$$

Для полинома f произвольной степени n, имеющего корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, доказано, что справедливы следующие формулы:

$$\boxed{z_1=\frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_{j-1}\partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R\left(f, f^{(k-1)}\right)}{\partial b_j^k} \quad \left(j=1,\ldots,n+1-k\right).} \qquad (3)$$

Принципиальным отличием является то, что частные производные от результанта многочлена и его производной определенного порядка в проекте берутся не по коэффициентам многочлена, а по коэффициентам производной. Такое решение позволило получить искомые формулы в более компактном виде.

Конкретный пример

Корни для вычисления корня кратности 3 в случае уравнения пятой степени

$$f(z)=z^5+a_1z^4+a_2z^3+a_3z^2+a_4z+a_5,\quad \varphi(z)=f''(z)=b_0z^3+b_1z^2+b_2z+b_3.$$

$$z_1=\frac{\partial^3 R(f,f'')}{\partial b_{j-1}\partial b_j^2}:\frac{\partial^3 R(f,f'')}{\partial b_j^3}\quad (j=1,2,3).$$

При j = 2

$$z_1=\frac{20a_1^2a_3a_5-36a_1a_2^2a_5+7a_1a_2a_3a_4-a_1a_3^3-180a_1a_4a_5+185a_2a_3a_5-26a_3^2a_4-500a_5^2}{3\left(24a_1^2a_2a_5-4a_1^2a_3a_4-40a_1a_3a_5-50a_2^2a_5+8a_2a_3a_4+a_3^3+200a_4a_5\right)};$$

при j = 3

$$z_1=-\frac{72a_1^3a_4-12a_1^2a_2a_3+160a_1^2a_5-256a_1a_2a_4-38a_1a_3^2+49a_2^2a_3-400a_2a_5+380a_3a_4}{3\left(32a_1^3a_3-12a_1^2a_2^2+72a_1^2a_4-156a_1a_2a_3+49a_2^3-180a_2a_4+190a_3^2\right)}.$$

$$f(z)=z^5+14z^4+76z^3+200z^2+256z+128=(z+2)^3(z+4)^2.$$

Обе эти формулы дают точное значение $z_1=-2.$

Исследование случаев одновременного наличия нескольких кратных корней

Простейший пример для уравнения пятой степени

$$P(z)=z^5+b_1z^4+b_2z^3+b_3z^2+b_4z+b_5=(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)=0.$$

Исследуется структура частных производных второго порядка от дискриминанта *G* по коэффициентам полинома

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2}=32z_1^4z_2^4(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1-z_2)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_1\partial b_2}=16z_1^3z_2^3(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1+z_2)(z_1-z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2}=32z_1^3z_2^3(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1-z_2)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3}=16z_1^2z_2^2(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1+z_2)(z_1-z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_3^2}=32z_1^2z_2^2(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1-z_2)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_3\partial b_4}=16z_1z_2(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1+z_2)(z_1-z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_4^2}=32z_1z_2(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1-z_2)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_4\partial b_5}=16(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1+z_2)(z_1-z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2}=32(z_2-z_3)^3(z_1-z_3)^3(z_1-z_2)^4.$$

$$\boxed{\Rightarrow z_{12}=z_1z_2=\frac{\partial^2 G}{\partial b_j^2}:\frac{\partial^2 G}{\partial b_{j+1}^2}\quad \left(j=\overline{1,4}\right),\qquad \frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\partial^2 G}{\partial b_k\partial b_{k+1}}:\frac{\partial^2 G}{\partial b_{k+1}^2}\quad \left(k=\overline{1,4}\right).}$$

Непосредственное вычисление значений кратных корней полинома (число различных корней = 2)

Теорема. Полином вида (4) представим в виде

$$P_5(z) = (z - z_1)^3 (z - z_2)^2 \quad (4)$$

тогда, и только тогда, когда

$$a_3 = -\frac{1}{135}\left(12a_1^2 - 30a_2\right)\beta - \frac{4}{25}a_1^3 + \frac{3}{5}a_1 a_2;$$

$$a_4 = -\frac{1}{225}\left(8a_1^3 - 20a_1 a_2\right)\beta + \frac{1}{375}a_1^4 - \frac{7}{25}a_1^2 a_2 + \frac{4}{15}a_2^2;$$

$$a_5 = \frac{1}{5625}\left(76a_1^4 - 430a_1^2 a_2 + 600a_2^2\right)\beta + \frac{53}{9375}a_1^5 - \frac{13}{375}a_1^3 a_2 + \frac{4}{75}a_1 a_2^2.$$

При этом

$$\boxed{z_1 = -\frac{1}{5}a_1 - \frac{2}{3}\beta; \qquad z_2 = -\frac{1}{5}a_1 + \beta; \qquad \beta = \frac{1}{5}\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}.}$$

Аналогичные формулы получить для случая

$$P_5(z) = (z - z_1)^4 (z - z_2)$$

Случай трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

Пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0) \qquad (5).$$

<u>*n* – нечетное число, *m* – четное</u>. Тогда если *p*, *q* – разных знаков и имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (5) имеет двукратный действительный корень $x = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ и простой действительный корень [1].

Аналогичные условия получены в [1] для остальных возможных соотношений по четности *n* и *m*.

1. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

Спасибо за внимание!