Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
Факультет математики и информационных технологий

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА НА ПРИМЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Чернявский Михаил Михайлович,
преподаватель кафедры Г и МА,

Грицкевич Никита Сергеевич,
студент 2 курса ФМиИТ

Научный руководитель

Трубников Юрий Валентинович,
профессор кафедры Г и МА,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Актуальность

Известно, в общем случае корни произвольного алгебраического полинома пятой степени и выше не могут быть выражены в виде конечной комбинации арифметических действий и радикалов от коэффициентов полинома (теорема Абеля).

Но если полином имеет единственный **кратный корень**, то этот корень **можно выразить** в виде дробно-рациональной функции от коэффициентов полинома.

В современной литературе, посвященной непосредственно исследованию полиномов, имеющих кратные корни, например, в [1]-[3], не приводится конечный вид формул для нахождения кратных корней (даже для уравнений четвертой и пятой степеней).

---

1. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

2. D’Andrea, C. Subresultants in multiple roots / C. D’Andrea, T. Krick, A. Szanto // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – Vol. 438. – P. 1969–1989.

3. Gelfand, I. M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determi-nants / I. M. Gelfand, M. M Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.

Актуальность

Наличие более одного кратного корня у полинома представляет отдельную проблему.

В связи с развитием возможностей систем компьютерной математики стали возможными сложные аналитические преобразования, которые ранее не поддавались ручному счету. Поэтому в XXI веке были получены новые результаты в рассматриваемой области математики.

1. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

2. Трубников, Ю. В. О неполной факторизации полиномов / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, В. В. Юргелас // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика – 2021. – № 2. – С. 86–94.

3. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

Цель доклада –

на примере алгебраического уравнения пятой степени провести анализ современных методов получения точных аналитических формул для выражения кратных корней полинома через коэффициенты.

Материал исследования –

алгебраические полиномы над полем комплексных чисел, имеющие кратный корень.

Методы исследования –

методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики Maple 2019

Сведения из алгебры

Пусть уравнения $f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}=0,\qquad \varphi(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}=0$ (1)

имеют общий корень. Необходимым и достаточным условием этого свойства является равенство

$$S(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)=0.$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ – корни уравнений (1). Так как функция *S* является симметричной функцией этих совокупностей корней, то её можно представить в виде функции от коэффициентов рассматриваемых полиномов.

Выражение $\boxed{R=a_0^m b_0^n S(a_1,a_2,\ldots,a_n;b_1,b_2,\ldots,b_m)}$

называется ***результантом*** полиномов *f* и *φ.*

Сведения из алгебры

Так как $$f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i),\qquad \varphi(z)=b_0\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j),$$

то результант можно представить в виде

$$R=a_0^m\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n)=(-1)^{mn}\,b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m).\quad (2)$$

Также результант можно представить в виде определителя

$$R=\left|\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\
 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\
b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\
 & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}m \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}n
\end{array}$$

Значение результанта многочлена и его первой производной прямо пропорционально значению дискриминанта *D*

$$R(f,f')=(-1)^{n(n-1)/2}\,a_0 D.$$

Достигнутые результаты

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}, \qquad \varphi(z)=f^{(k-1)}(z)=\sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}.$$

Для полинома f произвольной степени n, имеющего корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, доказано, что справедливы следующие формулы:

$$\boxed{z_1=\frac{\partial^k R\left(f,f^{(k-1)}\right)}{\partial b_{j-1}\partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R\left(f,f^{(k-1)}\right)}{\partial b_j^{k}} \quad \left(j=1,\dots\ ,n+1-k\right).} \qquad (3)$$

Принципиальным отличием является то, что частные производные от результанта многочлена и его производной определенного порядка в проекте берутся не по коэффициентам многочлена, а по коэффициентам производной. Такое решение позволило получить искомые формулы в более компактном виде.

Конкретный пример

Корни для вычисления корня кратности 3 в случае уравнения пятой степени

$$f(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5, \quad \varphi(z) = f''(z) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3.$$

$$z_1 = \frac{\partial^3 R(f, f'')}{\partial b_{j-1} \partial b_j^2} : \frac{\partial^3 R(f, f'')}{\partial b_j^3} \quad (j = 1, 2, 3).$$

При $j = 2$

$$z_1 = \frac{20a_1^2 a_3 a_5 - 36 a_1 a_2^2 a_5 + 7 a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_3^3 - 180 a_1 a_4 a_5 + 185 a_2 a_3 a_5 - 26 a_3^2 a_4 - 500 a_5^2}{3\left(24 a_1^2 a_2 a_5 - 4 a_1^2 a_3 a_4 - 40 a_1 a_3 a_5 - 50 a_2^2 a_5 + 8 a_2 a_3 a_4 + a_3^3 + 200 a_4 a_5\right)};$$

при $j = 3$

$$z_1 = -\frac{72 a_1^3 a_4 - 12 a_1^2 a_2 a_3 + 160 a_1^2 a_5 - 256 a_1 a_2 a_4 - 38 a_1 a_3^2 + 49 a_2^2 a_3 - 400 a_2 a_5 + 380 a_3 a_4}{3\left(32 a_1^3 a_3 - 12 a_1^2 a_2^2 + 72 a_1^2 a_4 - 156 a_1 a_2 a_3 + 49 a_2^3 - 180 a_2 a_4 + 190 a_3^2\right)}.$$

$$f(z) = z^5 + 14 z^4 + 76 z^3 + 200 z^2 + 256 z + 128 = (z+2)^3 (z+4)^2.$$

Обе эти формулы дают точное значение $z_1 = -2.$

Исследование случаев одновременного наличия нескольких кратных корней

Простейший пример для уравнения пятой степени

$$P(z) = z^5 + b_1 z^4 + b_2 z^3 + b_3 z^2 + b_4 z + b_5 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3) = 0.$$

Исследуется структура частных производных второго порядка от дискриминанта G по коэффициентам полинома

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2} = 32 z_1^4 z_2^4 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_1 \partial b_2} = 16 z_1^3 z_2^3 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2} = 32 z_1^3 z_2^3 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_2 \partial b_3} = 16 z_1^2 z_2^2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_3^2} = 32 z_1^2 z_2^2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_3 \partial b_4} = 16 z_1 z_2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_4^2} = 32 z_1 z_2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_4 \partial b_5} = 16 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2} = 32 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4.$$

$$\Rightarrow z_{12} = z_1 z_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial b_j^2} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{j+1}^2} \quad \left(j = \overline{1,4}\right), \qquad \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{\partial^2 G}{\partial b_k \partial b_{k+1}} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{k+1}^2} \quad \left(k = \overline{1,4}\right).$$

Непосредственное вычисление значений кратных корней полинома (число различных корней = 2)

Теорема. Полином вида (4) представим в виде

$$P_5(z) = (z - z_1)^3 (z - z_2)^2 \quad (4)$$

тогда, и только тогда, когда

$$a_3 = -\frac{1}{135}\left(12a_1^2 - 30a_2\right)\beta - \frac{4}{25}a_1^3 + \frac{3}{5}a_1 a_2;$$

$$a_4 = -\frac{1}{225}\left(8a_1^3 - 20a_1 a_2\right)\beta + \frac{1}{375}a_1^4 - \frac{7}{25}a_1^2 a_2 + \frac{4}{15}a_2^2;$$

$$a_5 = \frac{1}{5625}\left(76a_1^4 - 430a_1^2 a_2 + 600a_2^2\right)\beta + \frac{53}{9375}a_1^5 - \frac{13}{375}a_1^3 a_2 + \frac{4}{75}a_1 a_2^2.$$

При этом

$$\boxed{z_1 = -\frac{1}{5}a_1 - \frac{2}{3}\beta; \qquad z_2 = -\frac{1}{5}a_1 + \beta; \qquad \beta = \frac{1}{5}\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}.}$$

Аналогичные формулы получить для случая

$$P_5(z) = (z - z_1)^4 (z - z_2)$$

Случай трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

Пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0) \qquad (5).$$

n – нечетное число, m – четное. Тогда если p, q – разных знаков и имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (5) имеет двукратный действительный корень $x = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ и простой действительный корень [1].

Аналогичные условия получены в [1] для остальных возможных соотношений по четности n и m.

1. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

Спасибо за внимание!