



Учреждение образования
«Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Факультет математики и
информационных технологий

**АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ
ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА НА
ПРИМЕРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ПЯТОЙ СТЕПЕНИ**

*Чернявский Михаил Михайлович,
преподаватель кафедры Г и МА,*

*Грицкевич Никита Сергеевич,
студент 2 курса ФМиИТ*

Научный руководитель

*Трубников Юрий Валентинович,
профессор кафедры Г и МА,
доктор физ.-мат. наук, профессор*

Актуальность

Известно, в общем случае корни произвольного алгебраического полинома пятой степени и выше не могут быть выражены в виде конечной комбинации арифметических действий и радикалов от коэффициентов полинома (теорема Абеля).

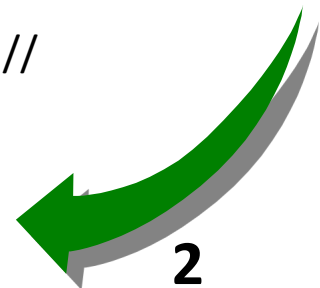
Но если полином имеет единственный **кратный корень**, то этот корень **можно выразить** в виде дробно-рациональной функции от коэффициентов полинома.

В современной литературе, посвященной непосредственно исследованию полиномов, имеющих кратные корни, например, в [1]-[3], не приводится конечный вид формул для нахождения кратных корней (даже для уравнений четвертой и пятой степеней).

1. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

2. D'Andrea, C. Subresultants in multiple roots / C. D'Andrea, T. Krick, A. Szanto // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – Vol. 438. – P. 1969–1989.

3. Gelfand, I. M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I. M. Gelfand, M. M Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.



Актуальность

Наличие более одного кратного корня у полинома представляет отдельную проблему.

В связи с развитием возможностей систем компьютерной математики стали возможными сложные аналитические преобразования, которые ранее не поддавались ручному счету. Поэтому в XXI веке были получены новые результаты в рассматриваемой области математики.

1. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.
2. Трубников, Ю. В. О неполной факторизации полиномов / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, В. В. Юргелас // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика – 2021. – № 2. – С. 86–94.
3. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

Цель доклада –

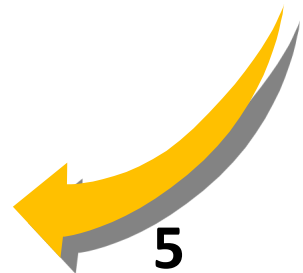
на примере алгебраического уравнения пятой степени провести анализ современных методов получения точных аналитических формул для выражения кратных корней полинома через коэффициенты.

Материал исследования –

алгебраические полиномы над полем комплексных чисел, имеющие кратный корень.

Методы исследования –

методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики Maple 2019



Сведения из алгебры

Пусть уравнения $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = 0$, $\varphi(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j} = 0$ (1)

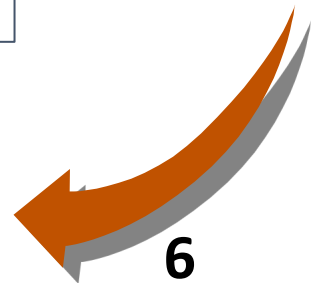
имеют общий корень. Необходимым и достаточным условием этого свойства является равенство

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) = 0.$$

$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ — корни уравнений (1). Так как функция S является симметричной функцией этих совокупностей корней, то её можно представить в виде функции от коэффициентов рассматриваемых полиномов.

Выражение $R = a_0^m b_0^n S(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_m)$

называется **результантом** полиномов f и φ .



Сведения из алгебры

Так как $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$, $\varphi(z) = b_0 \prod_{j=1}^m (z - \beta_j)$,

то результат можно представить в виде

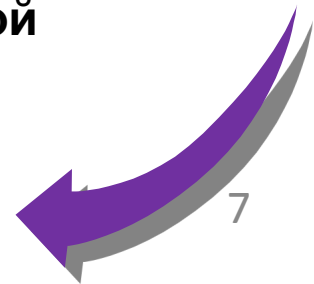
$$R = a_0^m \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \varphi(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdot \dots \cdot f(\beta_m). \quad (2)$$

Также результат можно представить в виде определителя

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \end{vmatrix} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ \\ \\ n \end{array}$$

Значение результата многочлена и его первой производной прямо пропорционально значению дискриминанта D

$$R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 D.$$



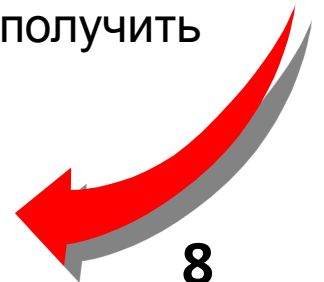
Достигнутые результаты

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}, \quad \varphi(z) = f^{(k-1)}(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}.$$

Для полинома f произвольной степени n , имеющего корень z_1 кратности k при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, доказано, что справедливы следующие формулы:

$$z_1 = \frac{\partial^k R(f, f^{(k-1)})}{\partial b_{j-1} \partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R(f, f^{(k-1)})}{\partial b_j^k} \quad (j = 1, \dots, n+1-k). \quad (3)$$

Принципиальным отличием является то, что частные производные от результата многочлена и его производной определенного порядка в проекте берутся не по коэффициентам многочлена, а по коэффициентам производной. Такое решение позволило получить искомые формулы в более компактном виде.



Конкретный пример

Корни для вычисления корня кратности 3 в случае уравнения пятой степени

$$f(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5, \quad \varphi(z) = f''(z) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3.$$

$$z_1 = \frac{\partial^3 R(f, f'')}{\partial b_{j-1} \partial b_j^2} : \frac{\partial^3 R(f, f'')}{\partial b_j^3} \quad (j = 1, 2, 3).$$

При $j = 2$

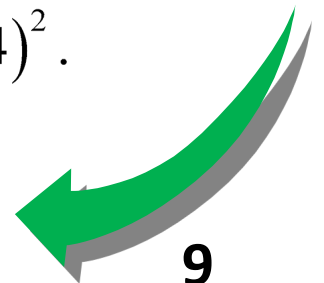
$$z_1 = \frac{20a_1^2 a_3 a_5 - 36a_1 a_2^2 a_5 + 7a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_3^3 - 180a_1 a_4 a_5 + 185a_2 a_3 a_5 - 26a_3^2 a_4 - 500a_5^2}{3(24a_1^2 a_2 a_5 - 4a_1^2 a_3 a_4 - 40a_1 a_3 a_5 - 50a_2^2 a_5 + 8a_2 a_3 a_4 + a_3^3 + 200a_4 a_5)};$$

при $j = 3$

$$z_1 = -\frac{72a_1^3 a_4 - 12a_1^2 a_2 a_3 + 160a_1^2 a_5 - 256a_1 a_2 a_4 - 38a_1 a_3^2 + 49a_2^2 a_3 - 400a_2 a_5 + 380a_3 a_4}{3(32a_1^3 a_3 - 12a_1^2 a_2^2 + 72a_1^2 a_4 - 156a_1 a_2 a_3 + 49a_2^3 - 180a_2 a_4 + 190a_3^2)}.$$

$$f(z) = z^5 + 14z^4 + 76z^3 + 200z^2 + 256z + 128 = (z + 2)^3 (z + 4)^2.$$

Обе эти формулы дают точное значение $z_1 = -2$.



Исследование случаев одновременного наличия нескольких кратных корней

Простейший пример для уравнения пятой степени

$$P(z) = z^5 + b_1 z^4 + b_2 z^3 + b_3 z^2 + b_4 z + b_5 = (z - z_1)^2 (z - z_2)^2 (z - z_3) = 0.$$

Исследуется структура частных производных второго порядка от дискриминанта G по коэффициентам полинома

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2} = 32z_1^4 z_2^4 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_1 \partial b_2} = 16z_1^3 z_2^3 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2} = 32z_1^3 z_2^3 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_2 \partial b_3} = 16z_1^2 z_2^2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_3^2} = 32z_1^2 z_2^2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_3 \partial b_4} = 16z_1 z_2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_4^2} = 32z_1 z_2 (z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_4 \partial b_5} = 16(z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2} = 32(z_2 - z_3)^3 (z_1 - z_3)^3 (z_1 - z_2)^4.$$

$$\Rightarrow z_{12} = z_1 z_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial b_j^2} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{j+1}^2} \quad (j = \overline{1,4}), \quad \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{\partial^2 G}{\partial b_k \partial b_{k+1}} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{k+1}^2} \quad (k = \overline{1,4}).$$

Непосредственное вычисление значений кратных корней полинома (число различных корней = 2)

Теорема. Полином вида (4) представим в виде

$$P_5(z) = (z - z_1)^3 (z - z_2)^2 \quad (4)$$

тогда, и только тогда, когда

$$a_3 = -\frac{1}{135}(12a_1^2 - 30a_2)\beta - \frac{4}{25}a_1^3 + \frac{3}{5}a_1a_2;$$

$$a_4 = -\frac{1}{225}(8a_1^3 - 20a_1a_2)\beta + \frac{1}{375}a_1^4 - \frac{7}{25}a_1^2a_2 + \frac{4}{15}a_2^2;$$

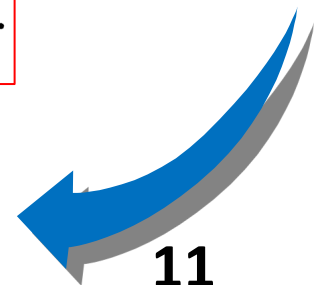
$$a_5 = \frac{1}{5625}(76a_1^4 - 430a_1^2a_2 + 600a_2^2)\beta + \frac{53}{9375}a_1^5 - \frac{13}{375}a_1^3a_2 + \frac{4}{75}a_1a_2^2.$$

При этом

$$z_1 = -\frac{1}{5}a_1 - \frac{2}{3}\beta; \quad z_2 = -\frac{1}{5}a_1 + \beta; \quad \beta = \frac{1}{5}\sqrt{6a_1^2 - 15a_2}.$$

Аналогичные формулы получить для случая

$$P_5(z) = (z - z_1)^4 (z - z_2)$$



Случай трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

Пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0) \quad (5).$$

n – нечетное число, m – четное. Тогда если p, q – разных знаков и имеет место одно из равенств

$$q \left(-\frac{p}{q} \right)^{n/m} = \frac{n-m}{m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{n/m}, \quad q \left(-\frac{p}{q} \right)^{n/m} = -\frac{n-m}{m} \left(\frac{n}{n-m} \right)^{n/m},$$

то уравнение (5) имеет двукратный действительный корень и простой действительный корень [1].

$$x = \left(-\frac{pm}{n} \right)^{\frac{1}{n-m}}$$

Аналогичные условия получены в [1] для остальных возможных соотношений по четности n и m .

1. Трубников, Ю. В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2 (54). – С. 65–85.

**Спасибо за
внимание!**