



**Санкт-Петербургский
государственный университет**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

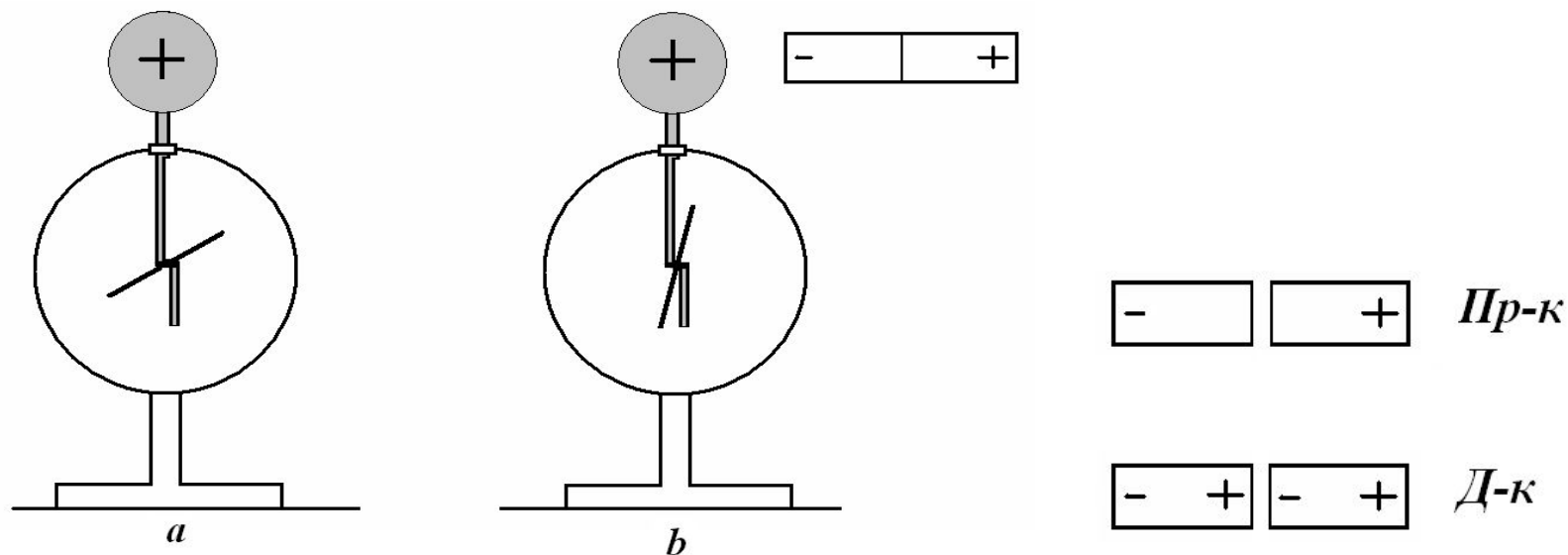
Лекция 12

Диэлектрики в электрическом поле.

Доцент кафедры ОФ 1

А. И. Эйхвальд

Диэлектрики – непроводники электричества



В проводниках под действием поля происходит разделение зарядов в макроскопических масштабах.

В диэлектриках нет зарядов, способных перемещаться на макроскопические расстояния.

Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

1. Полярные диэлектрики. Молекулы обладают дипольным моментом по своей природе: HCl , NH_3 , H_2O , CO .

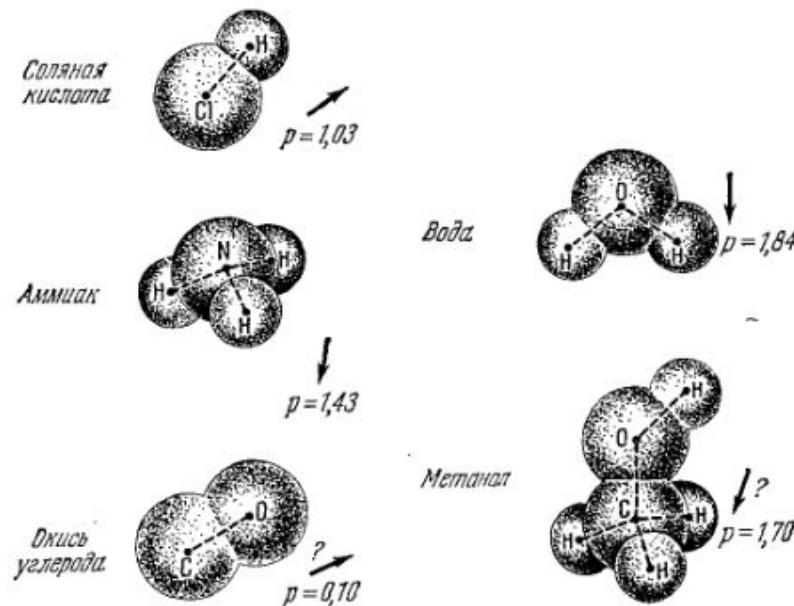
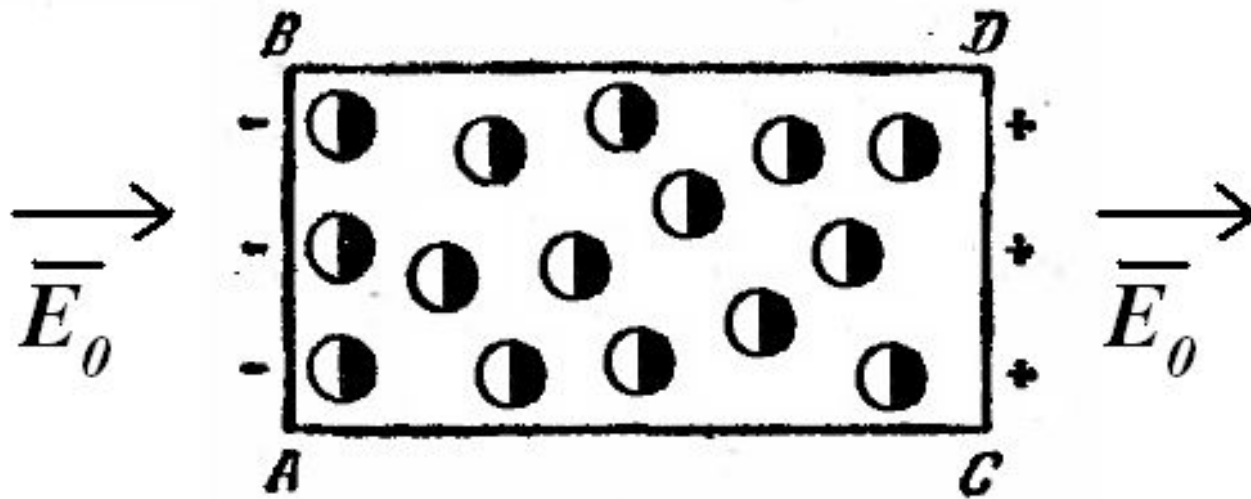


Рис. 9.16. Несколько известных полярных молекул. Величины «собственных» дипольных моментов p даны в единицах 10^{-18} ед. СГСЭ $_q$ -см.

Во внешнем поле на диполи действует момент сил, выстраивающий их вдоль поля.

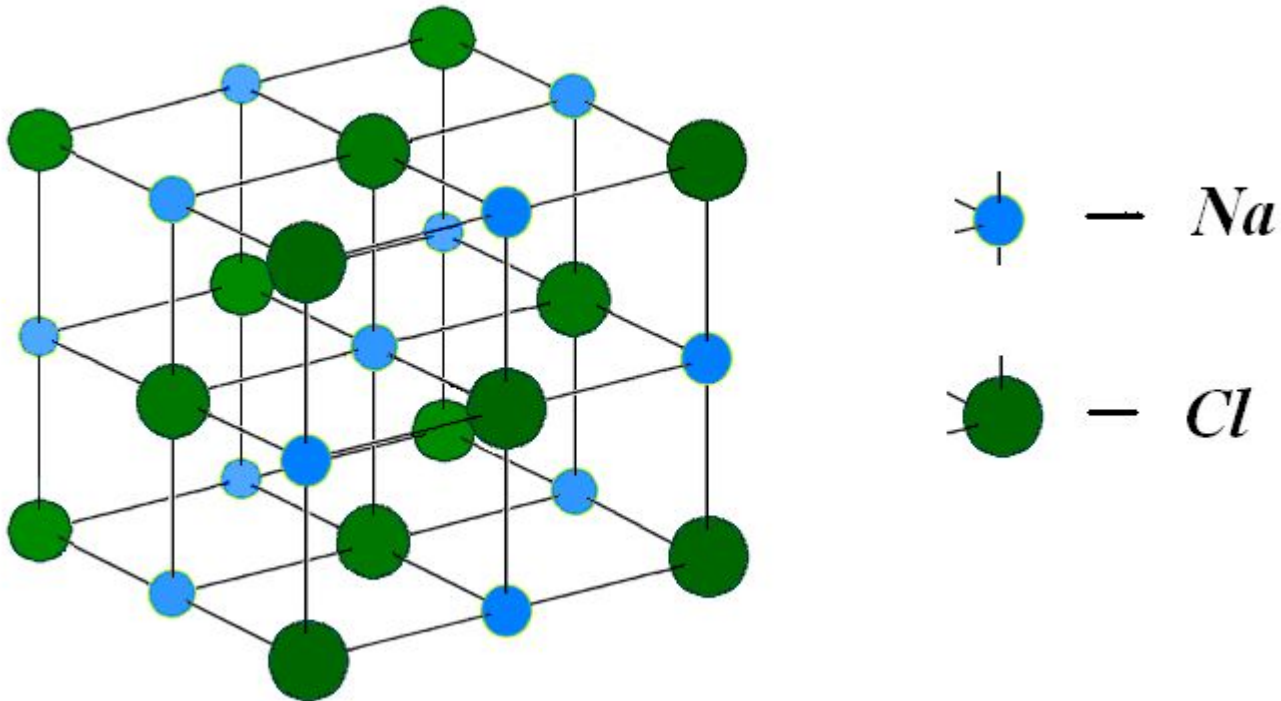
Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

2. **Неполярные диэлектрики.** Молекулы (атомы) приобретают дипольный момент в поле внешних источников: инертные газы, CO_2 , H_2 .



Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

3. **Ионные кристаллы:** NaCl. При включении поля ионные решетки смещаются в противоположных направлениях. Каждая ячейка кристалла приобретает дипольный момент.



Дипольный момент системы зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = (r^2 - 2 \cdot \vec{r} \cdot \vec{r}_i + r_i^2)^{1/2} = r \cdot \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = r^{-1} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \dots \right)$$

При $r_i \ll r$, ограничившись двумя членами разложения

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot \sum_i q_i + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{r} \cdot \sum_i q_i + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \text{ где}$$

$$\vec{p} = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i - \text{вектор дипольного момента системы.}$$

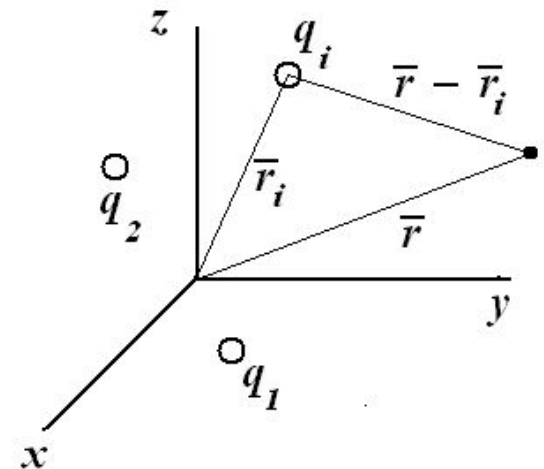
Если заряд системы равен нулю, вектор \vec{p} не зависит от выбора начала координат:

$$\sum_i q_i \cdot (\vec{r}_i + \vec{a}) = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i + \vec{a} \cdot \sum_i q_i = \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i$$

Если в системе всего два заряда, то дипольный момент $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$.

В наиболее общей форме дипольный момент системы имеет вид

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{r} \cdot \rho \cdot dV;$$



Поляризация диэлектрика - физическая величина

Если в диэлектрике выделить произвольный физически бесконечно малый объем ΔV , то в отсутствие внешнего поля можно ожидать, что сумма дипольных моментов всех атомов, молекул или кристаллических ячеек, находящихся в нем, равна нулю (см. предыдущие слайды).

Включение поля приводит к состоянию диэлектрика (поляризации), которое описывается с помощью физической величины – поляризации – дипольный момент единицы объема

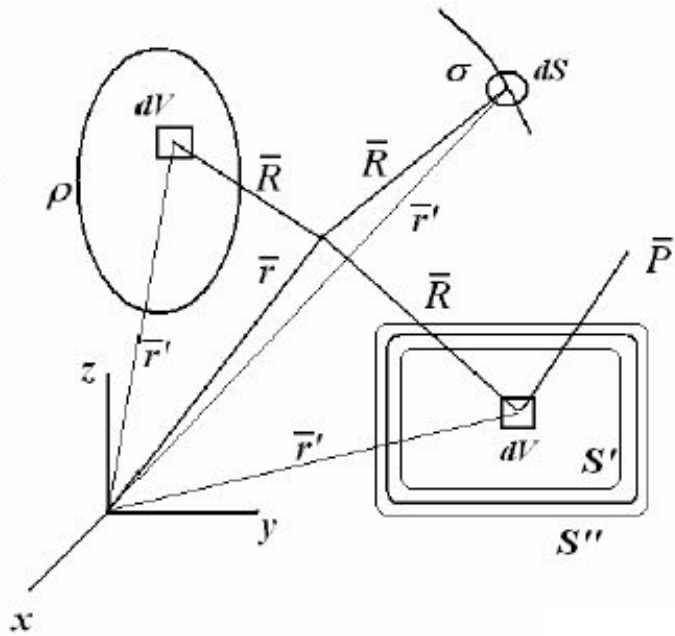
$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

Теперь дипольный момент вещества в дифференциально малом объеме имеет вид:

$$d\vec{p} = \vec{P}dV;$$

И теперь это выражение можно применить для описания вклада поляризованного диэлектрика в электрическое поле.

Расчет потенциала в присутствии диэлектриков



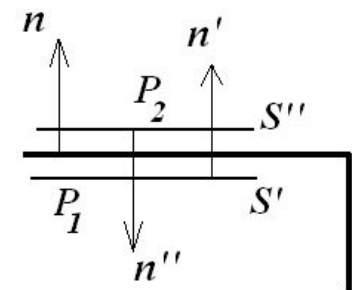
$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV}{R} + \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS}{R} + \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} \cdot dV$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} = \vec{P} \cdot \text{grad}_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = \text{div}_{r'} \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \cdot \text{div} \vec{P}$$

Здесь индекс \$r'\$ означает, что дифференцирование проводится по координатам начальной точки радиус-вектора (где находится \$dV\$).

$$\text{grad}_{r'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \cdot \text{grad}_{r'} R = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{-\vec{R}}{R}$$



$$\int_V \text{div}_{r'} \frac{\vec{P}}{R} \cdot dV = \oiint_{S_\infty} \frac{P_n}{R} \cdot dS + \oiint_{S''+S'} \frac{P_n}{R} \cdot dS \rightarrow 0 + \iint_{S_p} \frac{-(P_{2n} - P_{1n})}{R} \cdot dS$$

Свободные и связанные (поляризационные) заряды

Вводим обозначения

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P}; \quad \sigma' = -(P_{2n} - P_{1n});$$

В этих обозначениях потенциал поля сторонних зарядов и поляризованного диэлектрика имеет единообразный вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV}{R} + \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS}{R} + \int_V \frac{\rho'(\vec{r}')}{R} \cdot dV + \int_S \frac{\sigma'(\vec{r}')}{R} \cdot dS$$

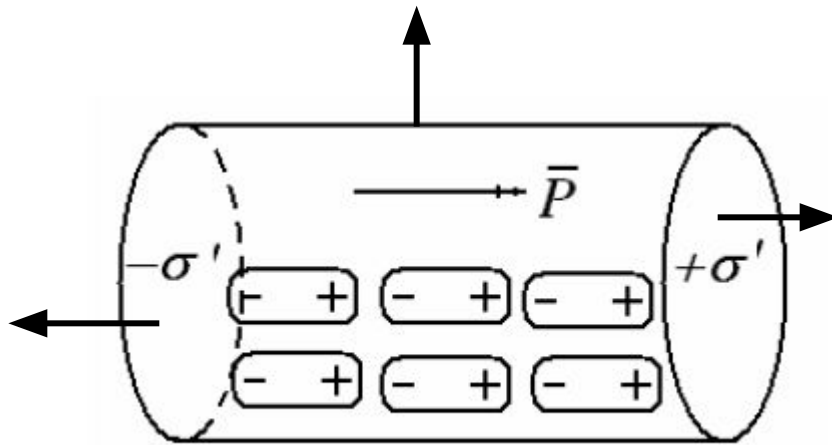
то их вклад в потенциал поля выглядит как у сторонних зарядов. Эти уравнения и есть самое строгое определение связанных зарядов.

Понятие сторонних (свободных) и поляризационных (связанных) зарядов.

Сторонние (свободные) - те, которые внесены извне, могут находиться в объемах и на поверхностях (в том числе, диэлектриков и проводников)

Связанные - это локальные макроскопические нарушения электрической нейтральности при микроскопических смещениях микроскопических зарядов, входящих в состав нейтральных молекул диэлектрика или ионов, составляющих кристаллическую решетку.

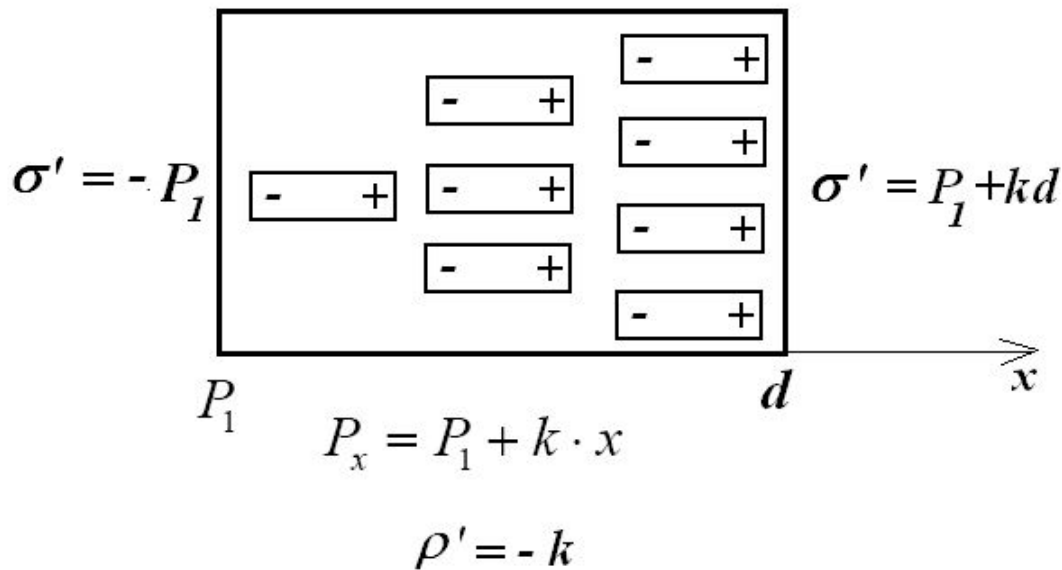
Пример: поляризованный цилиндр (брусок)



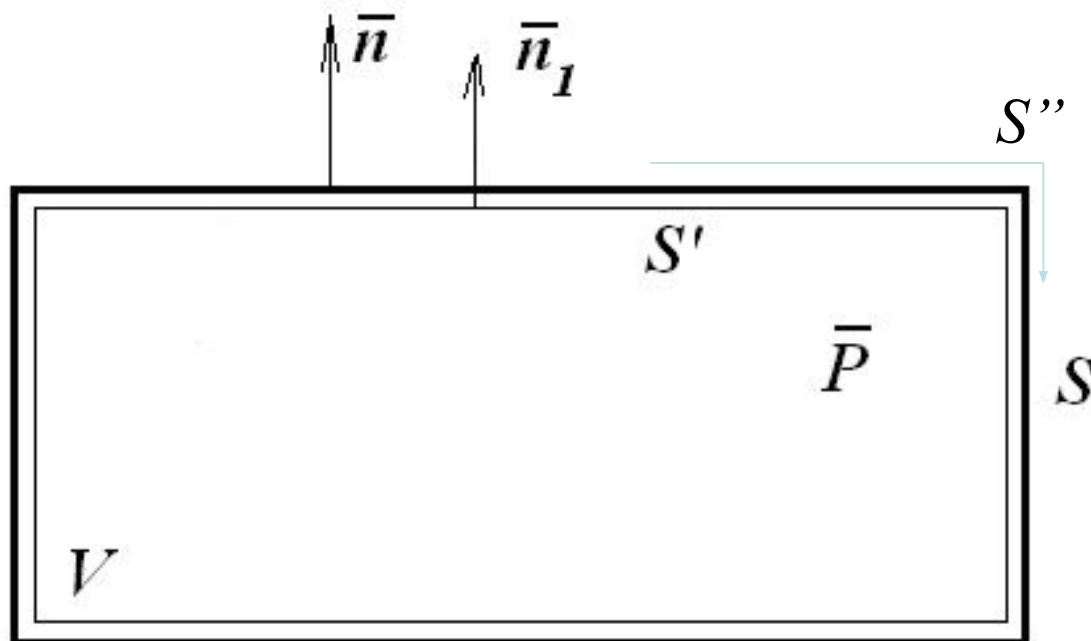
$$\vec{P}(\vec{r}) = \text{const}; \Rightarrow \text{div } \vec{P} = 0; \Rightarrow \rho' = 0;$$

$$\sigma' = -(0 - P) = P \text{ на правом торце,}$$

$$\sigma' = -(0 - -P) = -P \text{ на левом торце}$$



Электронейтральность поляризованного диэлектрика



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{P} \cdot dV = -Q_V = \oiint_{S'_1} P_{1n_1} \cdot dS = \oiint_S [-(P_{2n} - P_{1n})] dS = Q_s$$

Уравнения поля электростатики диэлектриков

$$\vec{E} = -grad \varphi; \quad rot \vec{E} = 0; \quad \oint_{\Gamma} E_{\parallel} dl = 0; \quad [\vec{n}, (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = 0$$

В уравнении с дивергенцией необходимо учитывать все заряды:

$$div \vec{E} = 4\pi \cdot (\rho + \rho')$$

С учетом $\rho' = -div \vec{P}$ получим

$$div (\vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}) = 4\pi \cdot \rho$$

Определим вектор электрической индукции (смещения)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}$$

Это сумма двух совершенно разных физических величин. Физического смысла не имеет. Его введение существенно упрощает описание поля в присутствии диэлектриков. Основное уравнение имеет вид

$$div \vec{D} = 4\pi \cdot \rho$$

Здесь справа - только свободные заряды. Теорема Гаусса для D тоже очевидна.

$$\oiint_S D_n \cdot dS = 4\pi \cdot Q$$

Здесь справа стоит свободный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности. На произвольной поверхности скачок нормальной компоненты вектора D

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \cdot \sigma$$

Здесь σ - поверхностная плотность свободного заряда.

Материальные уравнения

Материальные уравнения – связь поляризации диэлектрика и напряженности поля. Из опыта следует, что в большинстве случаев поляризация диэлектрика пропорциональна напряженности поля с коэффициентом - поляризуемость диэлектрика.

$$\vec{P} = \alpha \cdot \vec{E}$$

В изотропных средах - это число, в анизотропных - тензор поляризуемости:

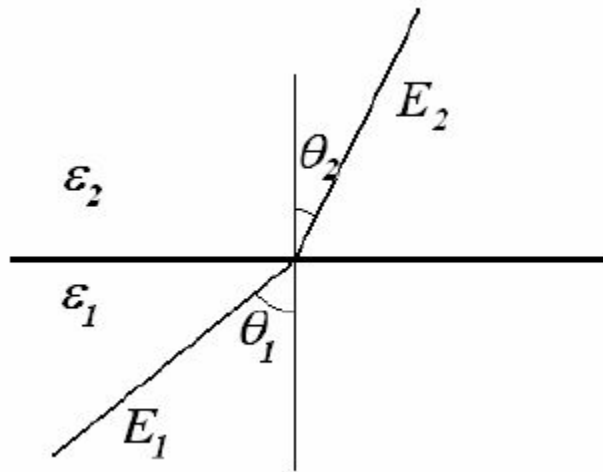
$$P_i = \sum_k \alpha_{ik} \cdot E_k$$

Отсюда получается связь D и E через ϵ - диэлектрическую проницаемость

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = (1 + 4\pi \cdot \alpha) \cdot \vec{E}$$

Примеры значений ϵ для некоторых веществ: воздух – 1,00058; керосин – 2,0; спирт – 26; вода - 81; полиэтилен – 2,3; оргстекло – 3,5; стекло/фарфор – 6,0.

Преломление линий поля на границе диэлектриков



Заданы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta_1, E_1$. Найти θ_2, E_2

Решение следует из граничных условий:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \cdot \sin \theta_1 = E_2 \cdot \sin \theta_2;$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos \theta_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2 \cdot \cos \theta_2;$$

Делим первую строку на вторую:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\varepsilon_2};$$

Делим второе уравнение на ε_2 , возводим оба в квадрат, складываем и получаем:

$$E_2^2 = E_1^2 \cdot \left(\sin^2 \theta_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \cdot \cos^2 \theta_1 \right);$$

В проводниках полагают $D=0$ вместе с $E=0$.

На границе проводник - диэлектрик $\varepsilon \cdot \vec{E} = \vec{D} = 4\pi \cdot \sigma \cdot \vec{n}$ - нормально к поверхности.

Вопросы к коллоквиуму

ВОПРОС 12

Диэлектрики в электростатическом поле. Дипольный момент системы точечных зарядов. Вектор поляризации. Выражение потенциала поля через свободные и связанные заряды. Уравнения электростатики в диэлектриках. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость. Преломление линий поля на границе между двумя диэлектриками.

Спасибо за внимание