Санкт-Петербургский государственный университет

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

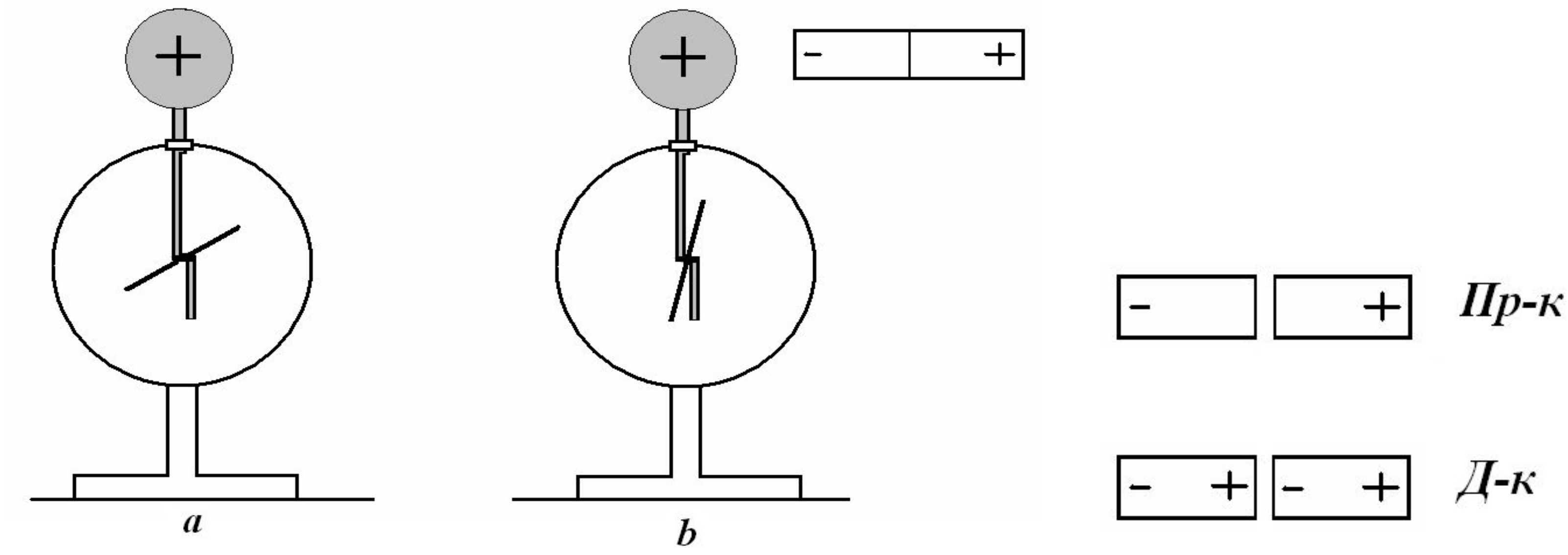
Лекция 12

Диэлектрики в электрическом поле.

Доцент кафедры ОФ 1

А. И. Эйхвальд

Диэлектрики – непроводники электричества



В проводниках под действием поля происходит разделение зарядов в макроскопических масштабах.

В диэлектриках нет зарядов, способных перемещаться на макроскопические расстояния.

Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

1. Полярные диэлектрики. Молекулы обладают дипольным моментом по своей природе: HCl, NH_3, H_2O, CO.

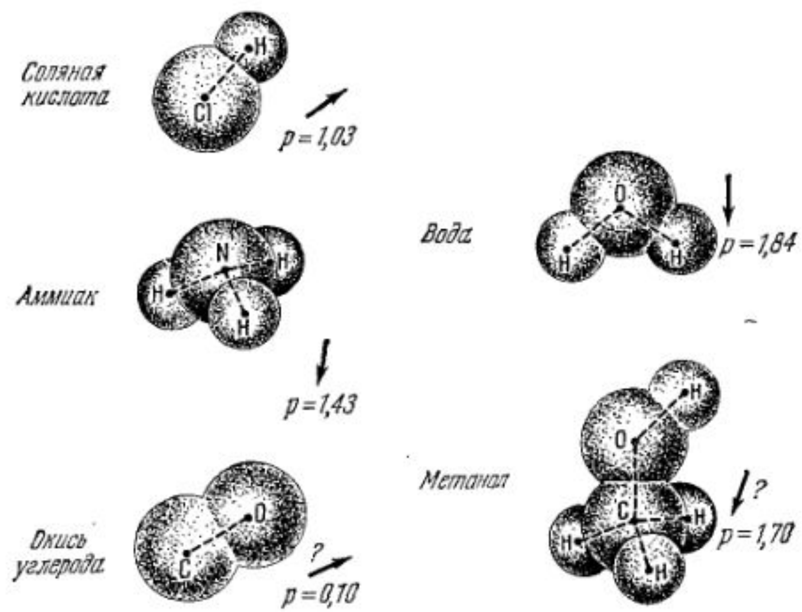
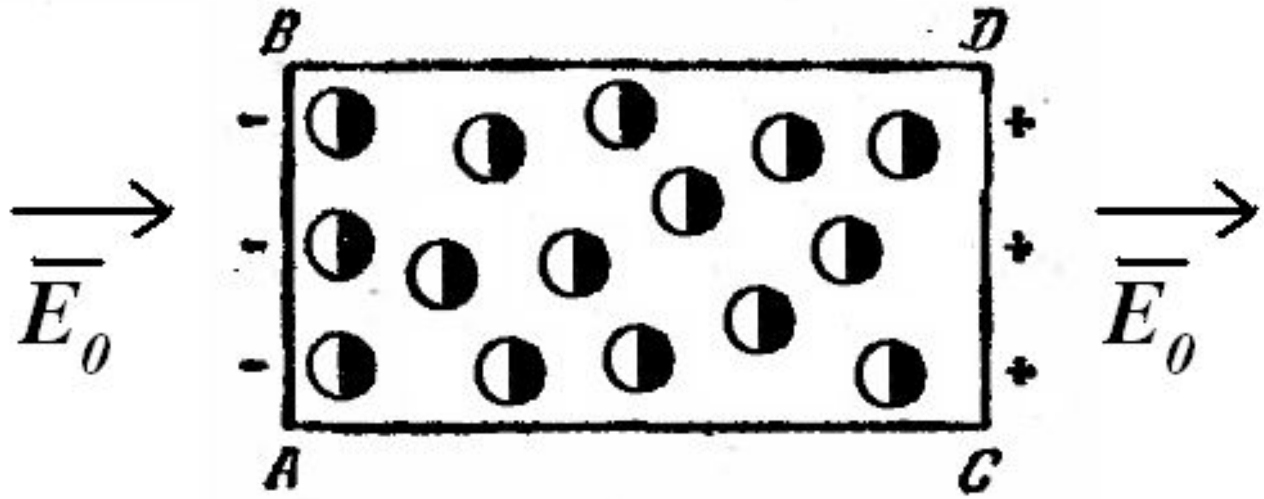


Рис. 9.16. Несколько известных полярных молекул. Величины «собственных» дипольных моментов p даны в единицах 10^{-18} ед. СГСЭ$_q$·*см*.

Во внешнем поле на диполи действует момент сил, выстраивающий их вдоль поля.

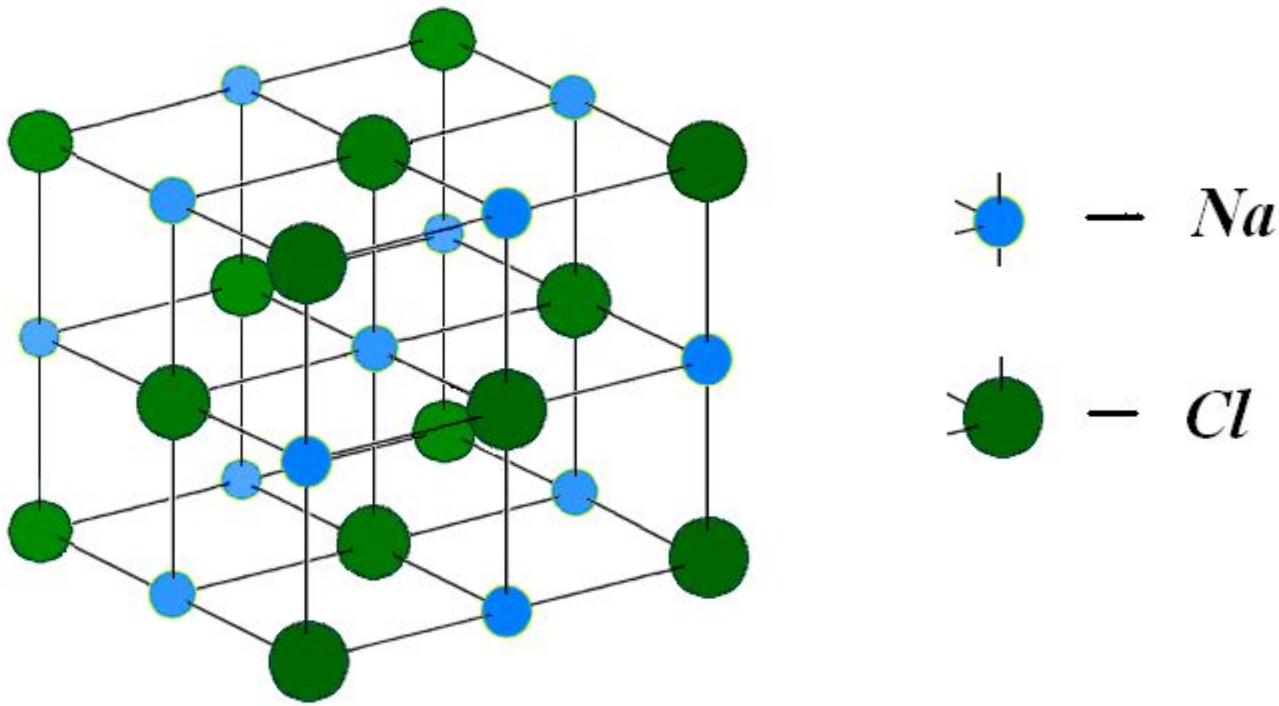
Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

2. **Неполярные диэлектрики.** Молекулы (атомы) приобретают дипольный момент в поле внешних источников: инертные газы, CO_2, H_2.



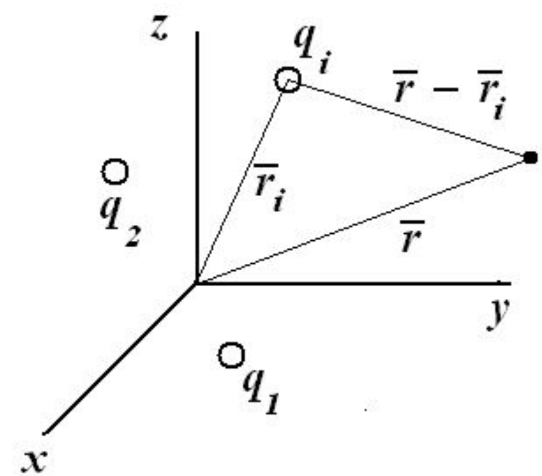
Структура диэлектриков и их реакция на внешнее поле

3. **Ионные кристаллы:** NaCl. При включении поля ионные решетки смещаются в противоположных направлениях. Каждая ячейка кристалла приобретает дипольный момент.



Дипольный момент системы зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \left(r^2 - 2\cdot\vec{r}\cdot\vec{r}_i + r_i^2\right)^{1/2} = r\cdot\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

r_i

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = r^{-1}\cdot\left(1 - \frac{2\cdot\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\cdot\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_i}{r^2} + \cdots\right)$$

При $r_i << r$, ограничившись двумя членами разложения

$$\varphi = \frac{1}{r}\cdot\sum_i q_i + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\sum_i q_i\cdot\vec{r}_i = \frac{1}{r}\cdot\sum_i q_i + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$, где

$\vec{p} = \sum_i q_i\cdot\vec{r}_i$ - вектор дипольного момента системы.

Если заряд системы равен нулю, вектор $\vec{p}$ не зависит от выбора начала координат:

$$\sum_i q_i\cdot(\vec{r}_i + \vec{a}) = \sum_i q_i\cdot\vec{r}_i + \vec{a}\cdot\sum_i q_i = \sum_i q_i\cdot\vec{r}_i$$

Если в системе всего два заряда, то дипольный момент $\vec{p} = q\cdot\vec{l}$.

В наиболее общей форме дипольный момент системы имеет вид

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{r}\cdot\rho\cdot dV;$$

Поляризация диэлектрика - физическая величина

Если в диэлектрике выделить произвольный физически бесконечно малый объем ΔV, то в отсутствие внешнего поля можно ожидать, что сумма дипольных моментов всех атомов, молекул или кристаллических ячеек, находящихся в нем, равна нулю (см. предыдуще слайды).

Включение поля приводит к состоянию диэлектрика (поляризации), которое описывается с помощью физической величины – поляризации – дипольный момент единицы объема

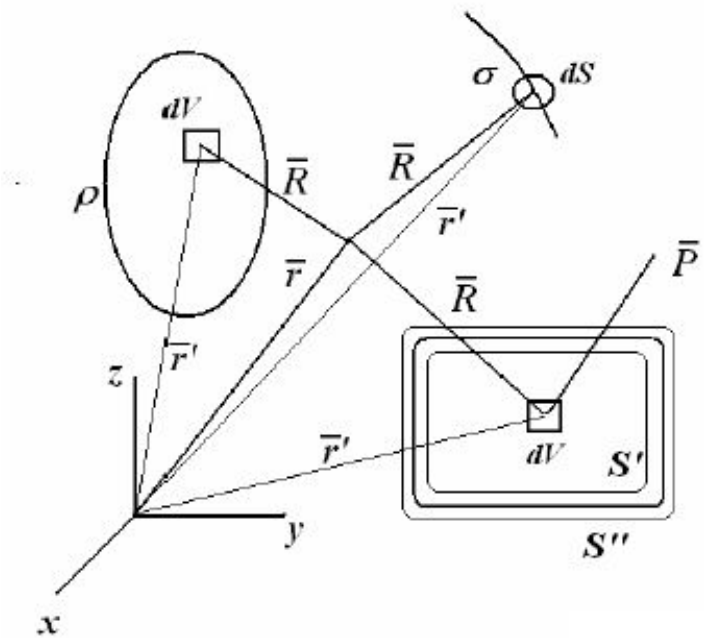
$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}$$

Теперь дипольный момент вещества в дифференциально малом объеме имеет вид:

$$d\vec{p} = \vec{P} dV;$$

И теперь это выражение можно применить для описания вклада поляризованного диэлектрика в электрическое поле.

Расчет потенциала в присутствии диэлектриков

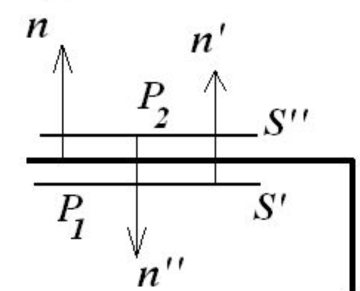


$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\cdot dV}{R} + \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')\cdot dS}{R} + \int\limits_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot \vec{R}}{R^3}\cdot dV$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}}{R^3} = \vec{P}\cdot grad_{r'}\left(\frac{1}{R}\right) = div_{r'}\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) - \frac{1}{R}\cdot div\vec{P}$$

Здесь индекс r’ означает, что дифференцирование проводится по координатам начальной точки радиус-вектора (где находится dV).



$$grad_{r'}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\cdot grad_{r'}R = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{-\vec{R}}{R}$$

$$\int\limits_V div_{r'}\frac{\vec{P}}{R}\cdot dV = \oiint\limits_{S_\infty}\frac{P_n}{R}\cdot dS + \oiint\limits_{S''+S'}\frac{P_n}{R}\cdot dS \to 0 + \iint\limits_{S_P}\frac{-(P_{2n}-P_{1n})}{R}\cdot dS$$

Свободные и связанные (поляризационные) заряды

Вводим обозначения

$$\rho' = -div\,\vec{P}; \quad \sigma' = -(P_{2n} - P_{1n});$$

В этих обозначениях потенциал поля сторонних зарядов и поляризованного диэлектрика имеет единообразный вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\cdot dV}{R} + \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')\cdot dS}{R} + \int\limits_V \frac{\rho'(\vec{r}\,')}{R}\cdot dV + \int\limits_S \frac{\sigma'(\vec{r}\,')}{R}\cdot dS$$

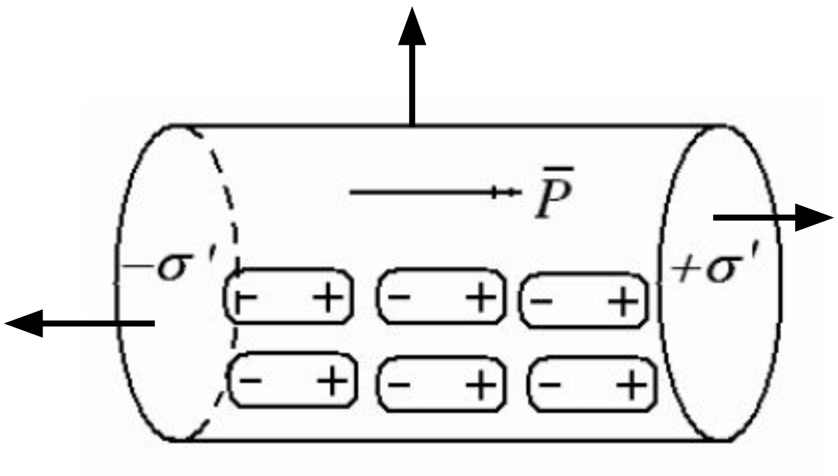
то их вклад в потенциал поля выглядит как у сторонних зарядов. Эти уравнения и есть самое строгое определение связанных зарядов.

Понятие сторонних (свободных) и поляризационных (связанных) зарядов.

Сторонние (свободные) - те, которые внесены извне, могут находиться в объемах и на поверхностях (в том числе, диэлектриков и проводников)

Связанные - это локальные макроскопические нарушения электрической нейтральности при микроскопических смещениях микроскопических зарядов, входящих в состав нейтральных молекул диэлектрика или ионов, составляющих кристаллическую решетку.

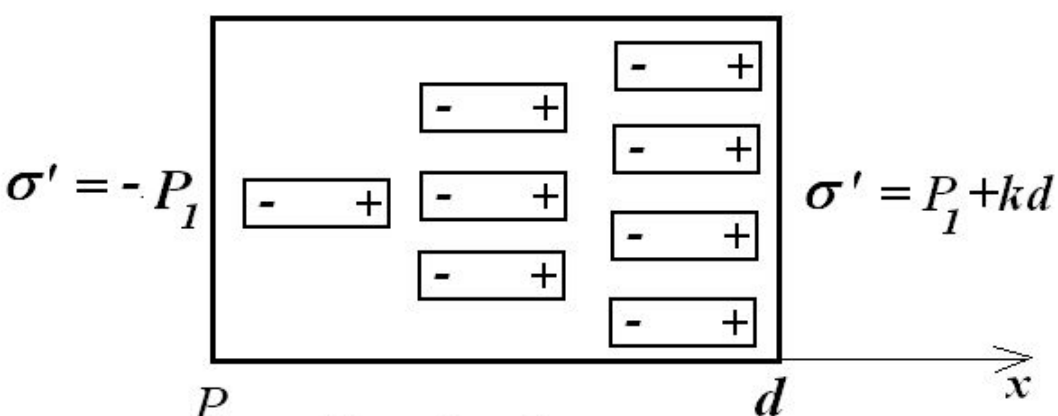
Пример: поляризованный цилиндр (брусок)



$\vec{P}(\vec{r}) = const; \Rightarrow div\,\vec{P} = 0; \Rightarrow \rho' = 0;$

$\sigma' = -(0 - P) = P$ на правом торце,

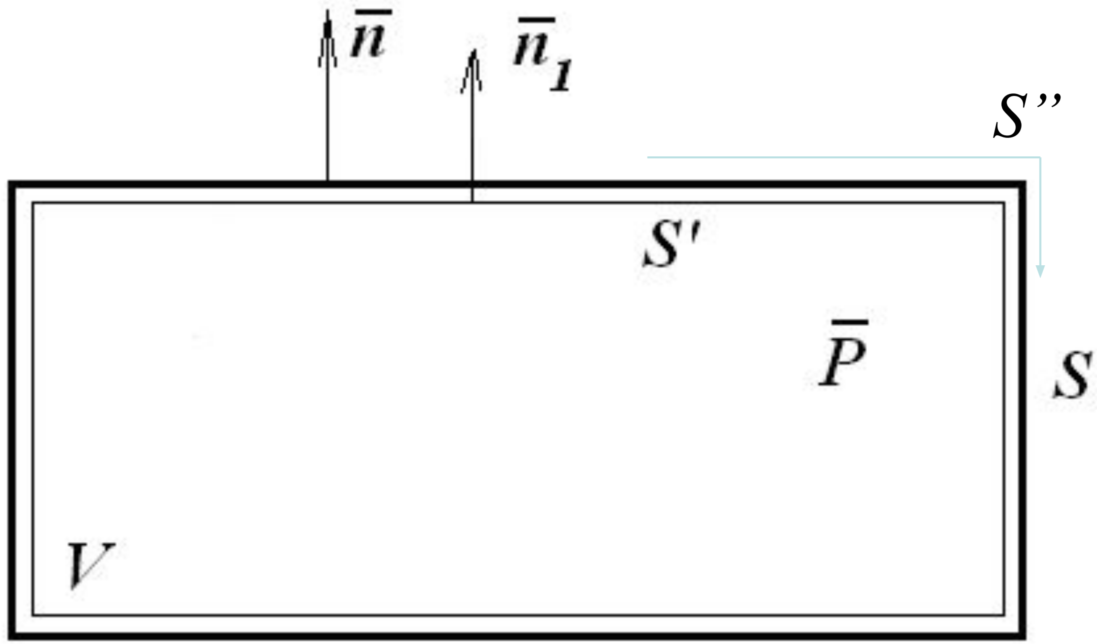
$\sigma' = -(0 - -P) = -P$ на левом торце



$$P_x = P_1 + k \cdot x$$

$$\rho' = -k$$

Электронейтральность поляризованного диэлектрика



$$\iiint\limits_V div\,\vec{P}\cdot dV = -Q_V = \oiint\limits_{S'_1} P_{1n_1}\cdot dS = \oiint\limits_{S}[-(P_{2n}-P_{1n})]dS = Q_s$$

Уравнения поля электростатики диэлектриков

$$\vec{E} = -grad\ \varphi; \quad rot\ \vec{E} = 0; \quad \oint_{\Gamma} E_l dl = 0; \quad \left[\vec{n}, (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\right] = 0$$

В уравнении с дивергенцией необходимо учитывать все заряды:

$$div\ \vec{E} = 4\pi \cdot (\rho + \rho')$$

С учетом $\rho' = -div\ \vec{P}$ получим

$$div\ (\vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}) = 4\pi \cdot \rho$$

Определим вектор электрической индукции (смещения)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \cdot \vec{P}$$

Это сумма двух совершенно разных физических величин. Физического смысла не имеет. Его введение существенно упрощает описание поля в присутствии диэлектриков. Основное уравнение имеет вид

$$div \vec{D} = 4\pi \cdot \rho$$

Здесь справа - только свободные заряды. Теорема Гаусса для D тоже очевидна.

$$\oiint_S D_n \cdot dS = 4\pi \cdot Q$$

Здесь справа стоит свободный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности. На произвольной поверхности скачок нормальной компоненты вектора D

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \cdot \sigma$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ - поверхностная плотность свободного заряда.

Материальные уравнения

Материальные уравнения – связь поляризации диэлектрика и напряженности поля. Из опыта следует, что в большинстве случаев поляризация диэлектрика пропорциональна напряженности поля с коэффициентом - **поляризуемость диэлектрика**.

$$\vec{P} = \alpha \cdot \vec{E}$$

В изотропных средах - это число, в анизотропных - тензор поляризуемости:

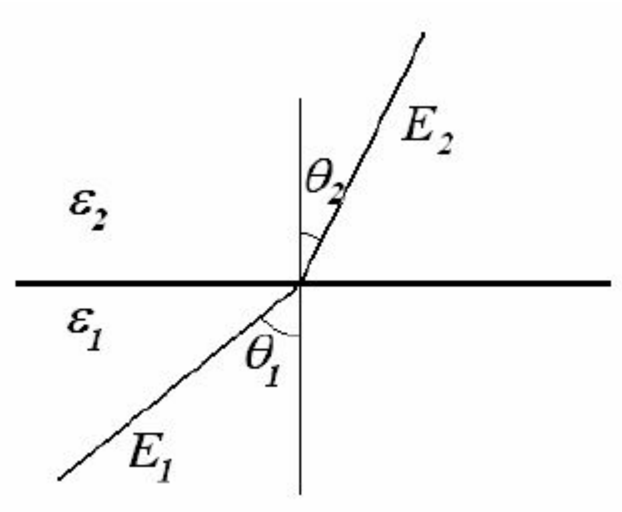
$$P_i = \sum_k \alpha_{ik} \cdot E_k$$

Отсюда получается связь D и E через ε - диэлектрическую проницаемость

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = (1 + 4\pi \cdot \alpha) \cdot \vec{E}$$

Примеры значений ε для некоторых веществ: воздух – 1,00058; керосин – 2,0; спирт – 26; вода - 81; полиэтилен – 2,3; оргстекло – 3,5; стекло/фарфор – 6,0.

Преломление линий поля на границе диэлектриков



Заданы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta_1, E_1$. Найти θ_2, E_2

Решение следует из граничных условий:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad E_1 \cdot \sin\theta_1 = E_2 \cdot \sin\theta_2;$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos\theta_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2 \cdot \cos\theta_2;$$

Делим первую строку на вторую:

$$\frac{tg\,\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{tg\,\theta_2}{\varepsilon_2};$$

Делим второе уравнение на ε_2, возводим оба в квадрат, складываем и получаем:

$$E_2^{\,2} = E_1^{\,2} \cdot \left(\sin^2\theta_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \cdot \cos^2\theta_1 \right);$$

В проводниках полагают D=0 вместе с E=0.

На границе проводник - диэлектрик $\varepsilon \cdot \vec{E} = \vec{D} = 4\pi \cdot \sigma \cdot \vec{n}$ - нормально к поверхности.

Вопросы к коллоквиуму

ВОПРОС 12

Диэлектрики в электростатическом поле. Дипольный момент системы точечных зарядов. Вектор поляризации. Выражение потенциала поля через свободные и связанные заряды. Уравнения электростатики в диэлектриках. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая восприимчивость и проницаемость. Преломление линий поля на границе между двумя диэлектриками.

Спасибо за внимание