МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

Метод проекций

Изображения, с которыми приходится встречаться в искусстве и технике, отличаются большим разнообразием, вследствие чего и требования, предъявляемые к ним, различные. В картинах и рисунках основным требованием является наглядность изображения. В технических изображениях главное требование – возможность получить по изображению точное представление о форме и размерах предмета.

В начертательной геометрии для решения геометрических задач используется графический способ, при котором геометрические свойства предметов изучаются непосредственно по чертежу. Для того чтобы чертеж соответствовал изображаемому предмету, он должен быть построен по определенным геометрическим законам. Правила построения изображений в начертательной геометрии основаны на *методе проекций*.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей.

Проекцией точки A на плоскость π_0 называется точка пересечения A^0 проецирующего луча p, проходящего в пространстве через точку A (рис. 1.1).

Различают два метода проецирования: центральное и параллельное.

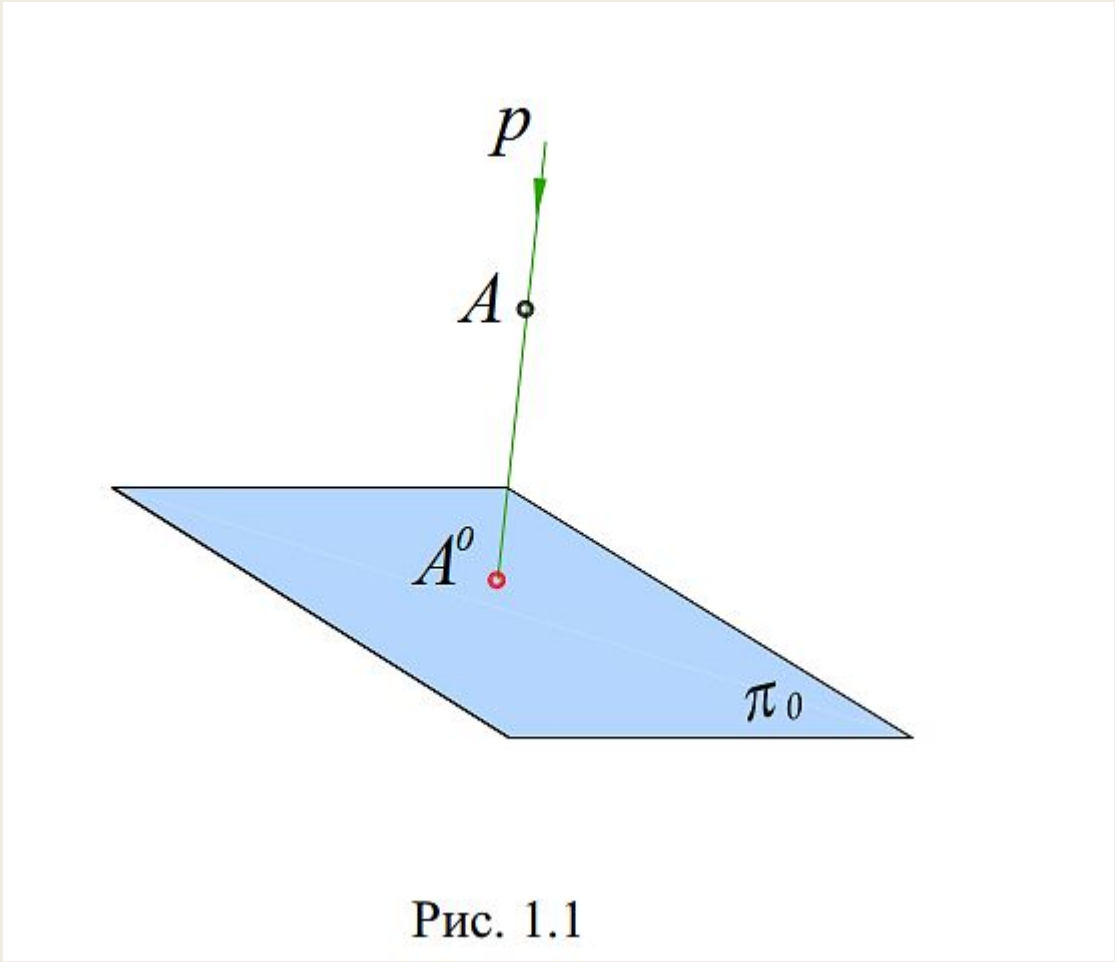

Рис. 1.1

Центральное и параллельное проецирование

При *центральном проецировании* все проецирующие лучи проходят через точку S, называемую центром проекций и не лежащую в плоскости проекций. Для построения проекций некоторых точек A, B, C, D (рис. 1.2) проводим через эти точки и центр проекций S проецирующие лучи до пересечения с плоскостью π_0. На плоскости проекций π_0 каждой точке будет соответствовать единственная точка – проекции A^0, B^0, C^0, D^0.

Центральное проецирование обладает наглядностью, оно используется при построении изображений архитектурно-строительных объектов, но дает значительное искажение размеров, вследствие чего не применяется для выполнения чертежей.

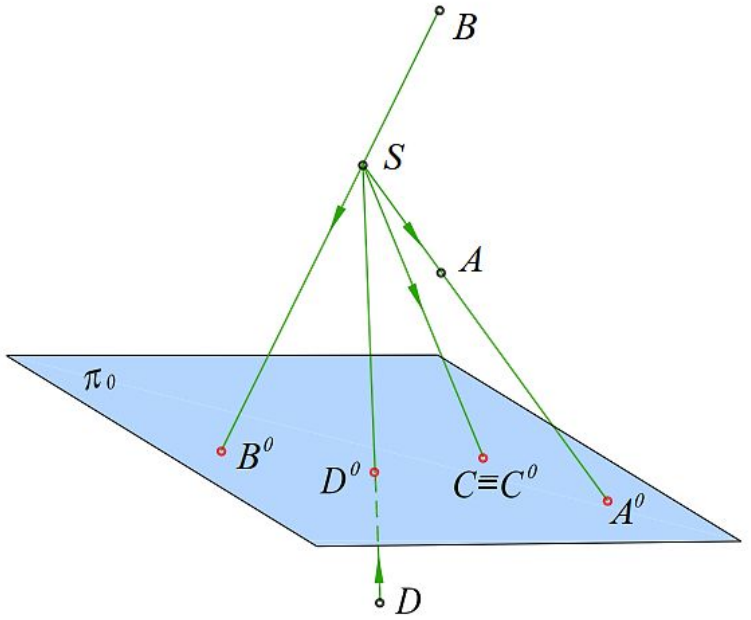

Рис. 1.2

При *параллельном* проецировании проецирующие лучи параллельны заданному направлению S (рис. 1.3). Точки пересечения проецирующих лучей, проходящих через точки A, B, C, с плоскостью проекций π_0 – параллельные проекции A^0, B^0, C^0 на плоскости π_0.

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального при бесконечно удаленном центре проекций. В зависимости от направления проецирующих лучей относительно плоскости проекций параллельное проецирование может быть *прямоугольным* (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и *косоугольным* (проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций угол, не равный 90).

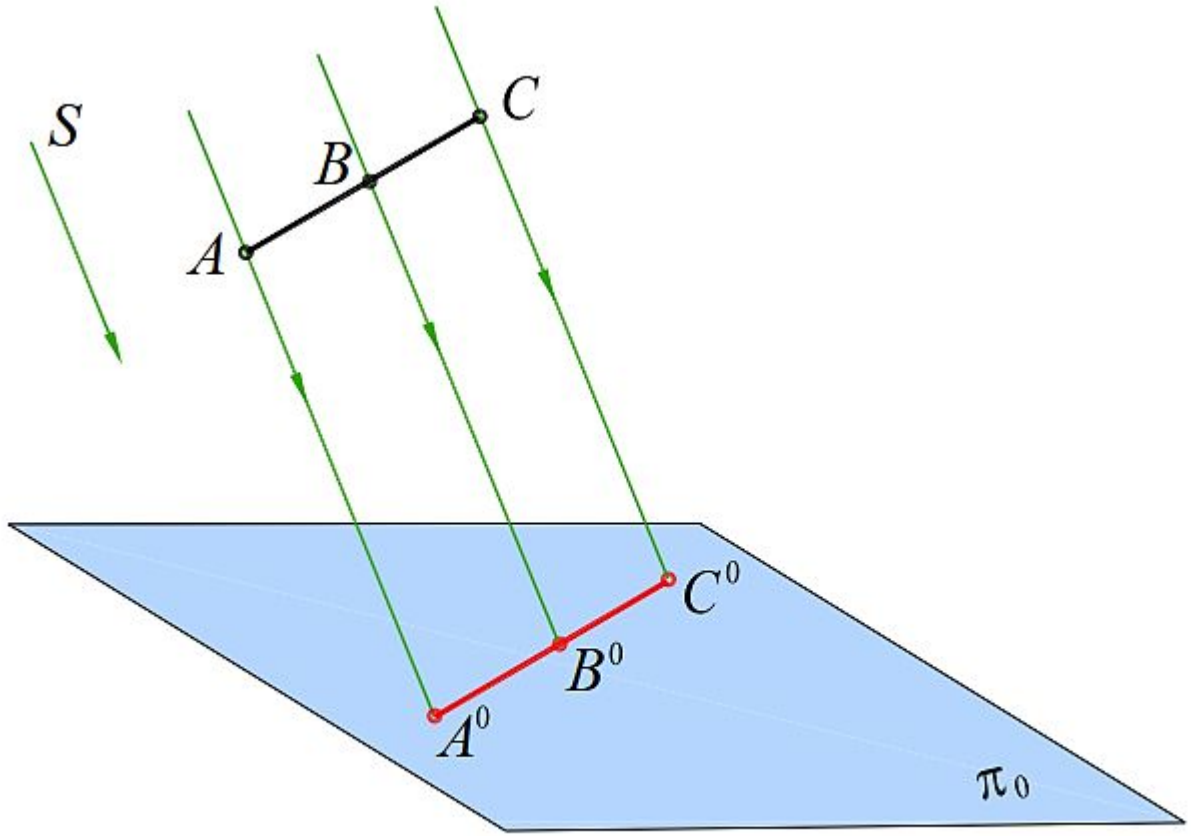

Рис. 1.3

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки A (рис. 1.4) является основание перпендикуляра A^0, проведенного из точки A на плоскость π_0. Ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед центральным и косоугольным параллельным проецированием.

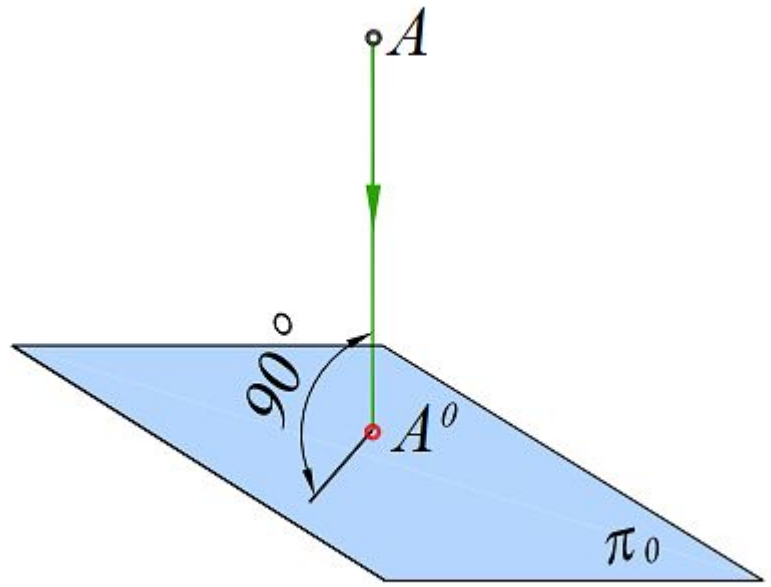

Рис. 1.4

К ним относятся простота геометрических построений и удобство измерений, поэтому прямоугольное (ортогональное) проецирование широко применяется для разработки чертежей. Прямоугольное проецирование включает в себя все свойства центрального и параллельного проецирования.

Свойства прямоугольного проецирования

1. Каждая точка и прямая в пространстве имеют единственную проекцию на плоскости, так как через любую точку в пространстве можно провести только один проецирующий луч (рис. 1.4).
2. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общий проецирующий луч (рис. 1.5).
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.6).
4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (рис. 1.6):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A^0B^0}{B^0C^0}.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны. Если $AB \parallel CD$ то $A^0B^0 \parallel C^0D^0$ (рис. 1.7).
6. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (рис. 1.7):

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A^0B^0}{C^0D^0}.$$

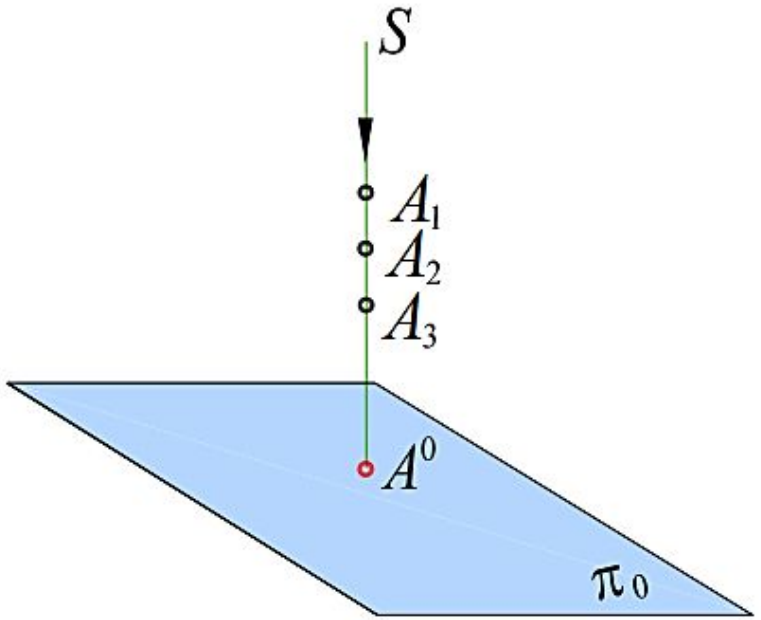

Рис. 1.5

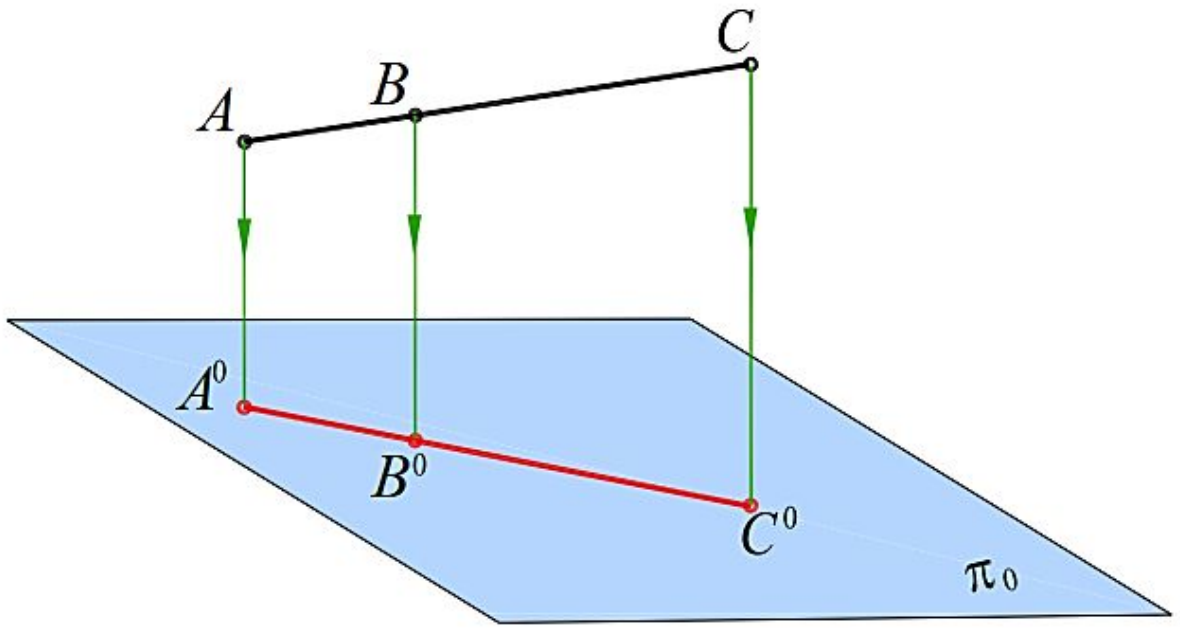

Рис. 1.6

7. Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проекцией этой прямой является точка (прямая *AB* рис. 1.8).
8. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость отрезок спроецируется в натуральную величину (прямая *CD* рис. 1.8).

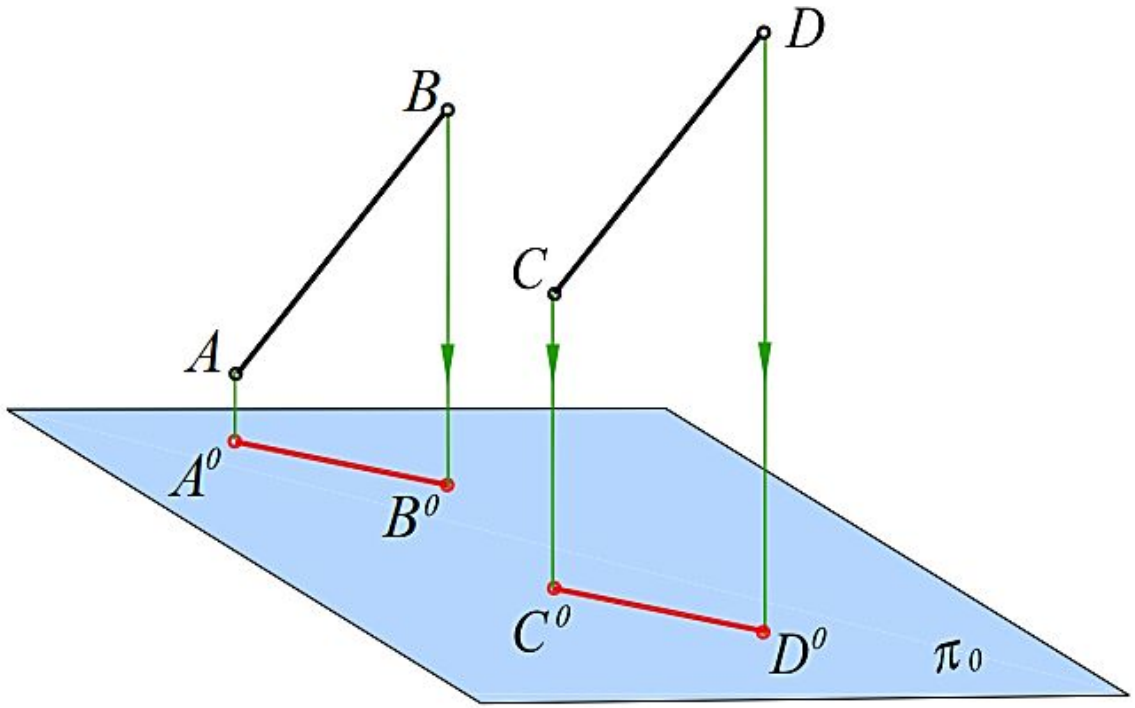

Рис. 1.7

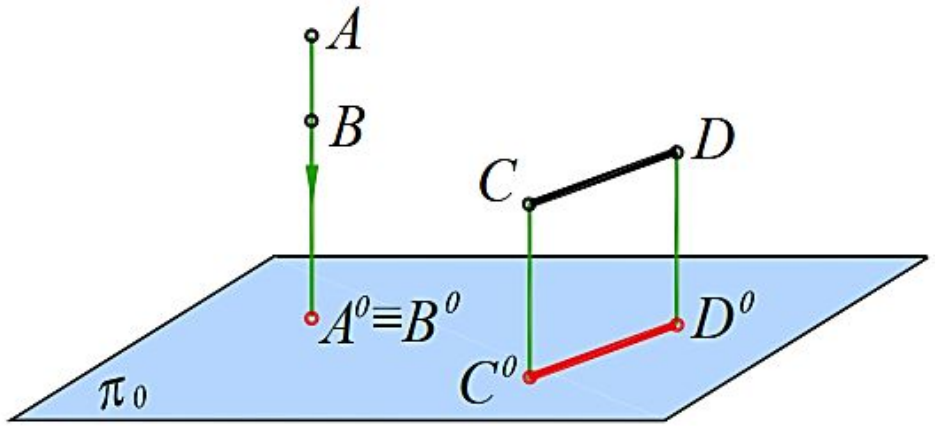

Рис. 1.8

Точка в системе двух и трех плоскостей проекций

Изучение способов построения проекций любых объектов начинают с изучения правил построения проекций точек. Возьмем в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости. Одна из них располагается горизонтально – ее называют *горизонтальной плоскостью проекций* и обозначают буквой π_1. Другая плоскость перпендикулярна горизонтальной и называется *фронтальной плоскостью проекций*. Эта плоскость обозначается буквой π_2 (рис. 1.9). Линия пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций*. Ось проекций x разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости. Четыре двугранных угла I, II, III, IV, образованных при пересечении плоскостей, называются четвертями или квадрантами пространства.

Спроецируем точку A, расположенную в I четверти, на плоскости проекций π_1 и π_2. *Горизонтальной проекцией точки* называют прямоугольную проекцию точки на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A, с плоскостью π_1 . Обозначим ее символом A'. Проведем из точки A' в плоскости π_1 перпендикуляр на ось Ox и отметим вспомогательную точку A_x.

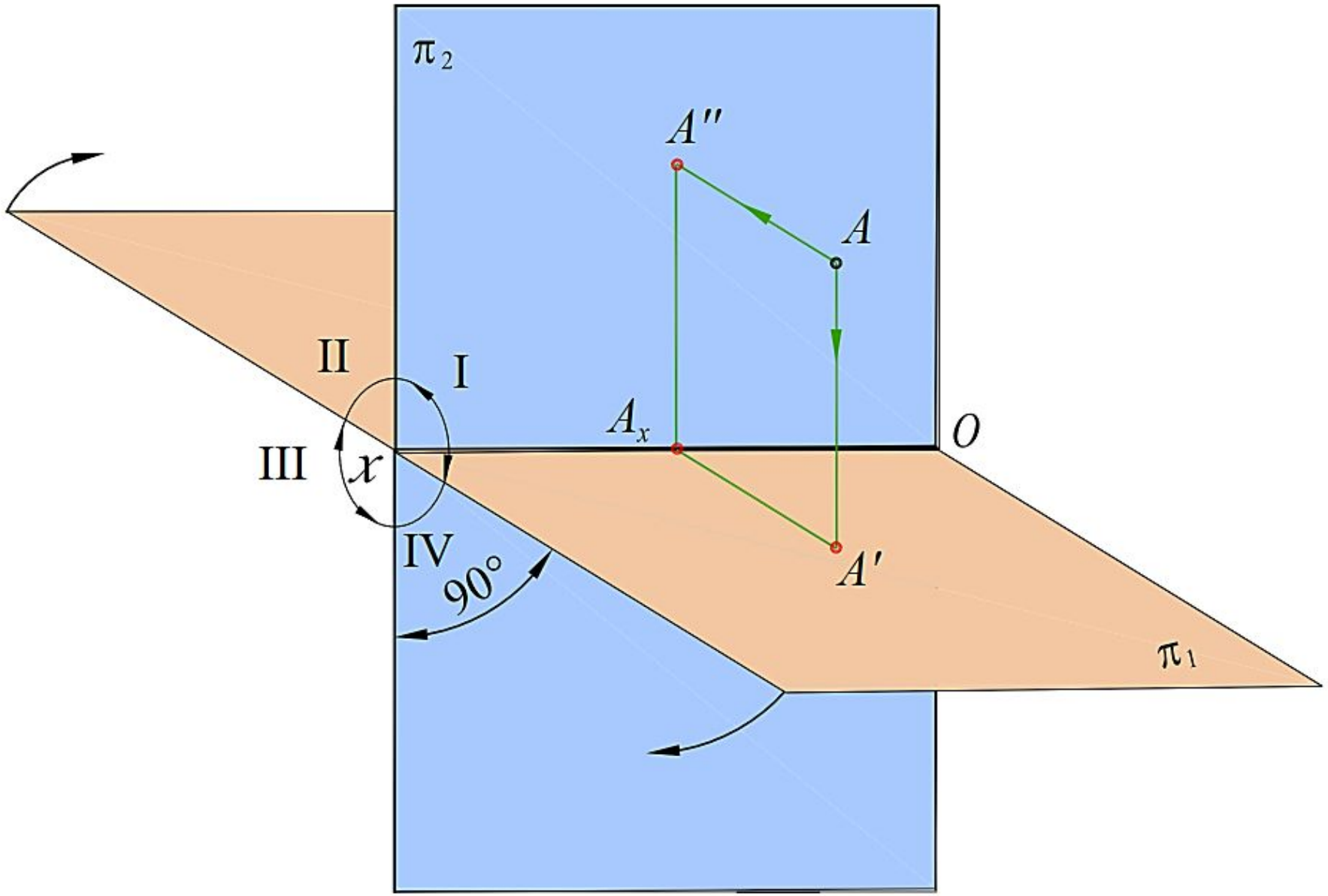

Рис. 1.9

Фронтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на фронтальной плоскости проекций. Фронтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A, с плоскостью π_2. Обозначим ее A''. Опустив перпендикуляр из точки A'' в плоскости π_2 на ось Ox, получим вспомогательную точку A_x.

Рассмотрим обратную задачу – построение точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной A' и фронтальной A''. Точку A находим в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции A' к плоскости π_1 и из проекции A'' к плоскости π_2. Эти перпендикуляры пересекутся в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций – т. е. чертеж становится обратимым.

Для получения плоского чертежа точки необходимо совместить плоскость π_1 с плоскостью π_2 поворотом вокруг оси *Ox* на угол 90° вниз по стрелке, как это показано на рис. 1.9. При этом отрезки A_xA'' и A_xA' образуют один отрезок *A"A',* перпендикулярный к оси *Ox*. Этот отрезок *A"A'* называется *линией проекционной связи* (рис. 1.10). В результате совмещения плоскостей проекций получается чертеж, известный под названием эпюр Монжа (Epure – чертеж (франц.)). Он был назван в честь основоположника начертательной геометрии французского ученого Гаспара Монжа. Без обозначения плоскостей π_1 и π_2 этот чертеж будет выглядеть так, как это показано на рис. 1.11.

Иногда двух проекций геометрического элемента бывает недостаточно, чтобы определить его форму и истинные размеры. Тогда выполняют построение изображения на третьей плоскости. Введем в систему π_1, π_2 третью плоскость проекций, перпендикулярную плоскостям π_1 и π_2. Ее называют *профильной* плоскостью проекций и обозначают π_3 (рис. 1.12).

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций называются координатными плоскостями. Они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым *Ox*, *Oy*, *Oz*, которые называются *осями координат* и обозначаются *x*, *y*, *z*. Общая точка *O* – начало координат.

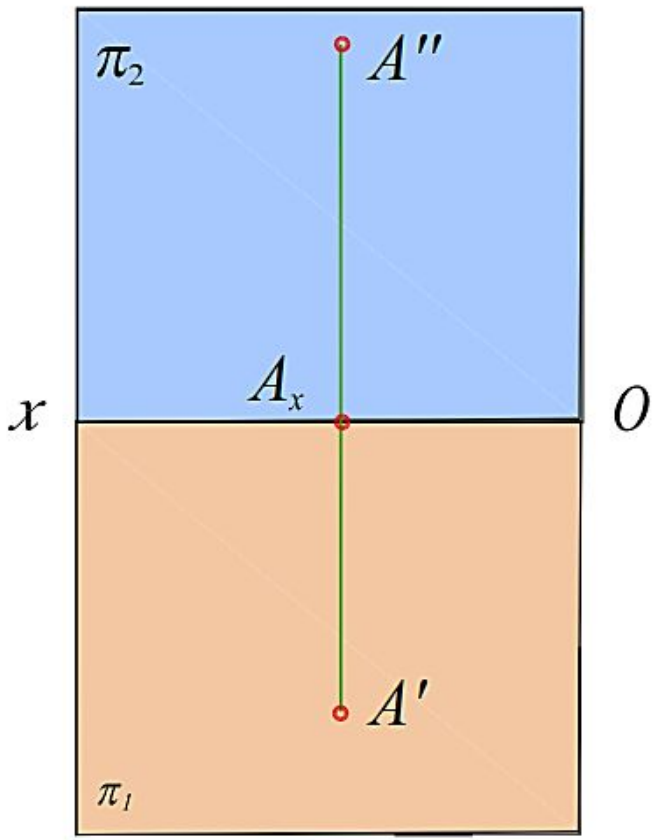

Рис. 1.10

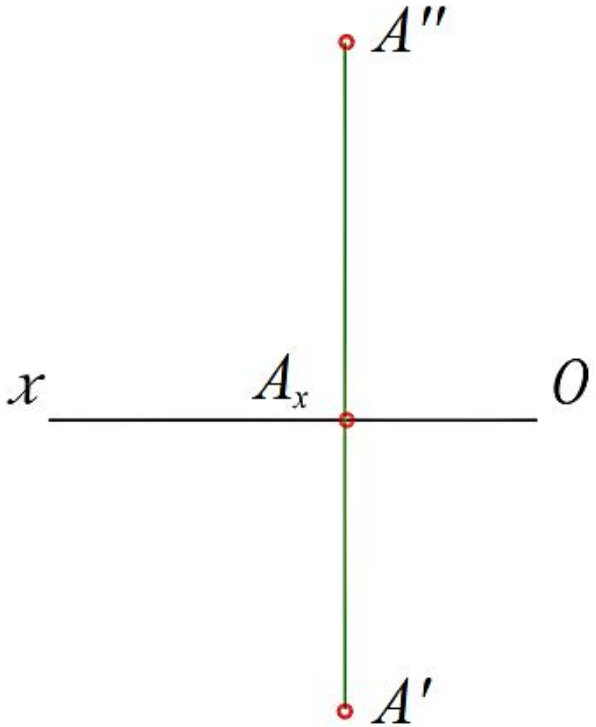

Рис. 1.11

Плоскости π_1, π_2, π_3, пересекаясь между собой, делят пространство на восемь частей, называемых октантами, как это показано на рис. 1.12. В зависимости от положения точки относительно плоскостей проекций ее координаты могут иметь положительные и отрицательные значения. Например, в первом октанте все координаты имеют положительные, а в седьмом – отрицательные значения.

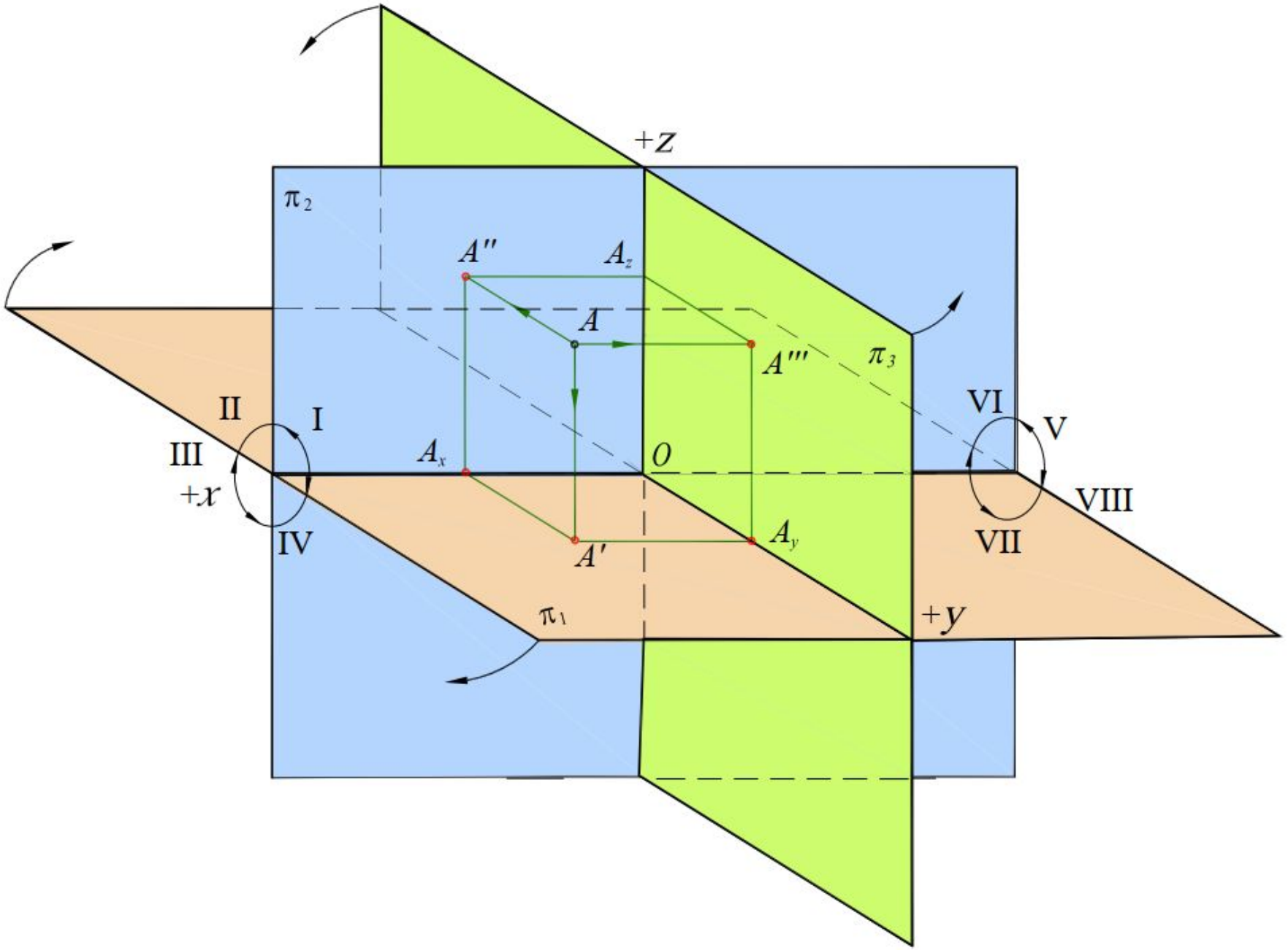

Рис. 1.12