

Арифметический корень натуральной степени

Сегодня на уроке

1. Узнаем, что подразумевается под понятием «арифметический корень натуральной степени».
2. Познакомимся с корнем нечётной степени из отрицательного числа.
3. Рассмотрим некоторые свойства арифметического корня n -й степени.

Вспомним

Квадратным корнем из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен a .

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &= x, \\ x^2 &= a, \\ x \geq 0, a &\geq 0\end{aligned}$$

Аналогично определяется корень n -й степени из числа a , где n – произвольное натуральное число.

$$x^4 = 625$$

$$x^4 - 625 = 0$$

$$(x^2 - 25)(x^2 + 25) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 25 = 0 \end{cases}$$

Уравнение $x^2 + 25 = 0$ не имеет решения на множестве действительных чисел.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x + 5 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -5$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

корни 4-й степени из числа 625

$$x^4 = 625$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

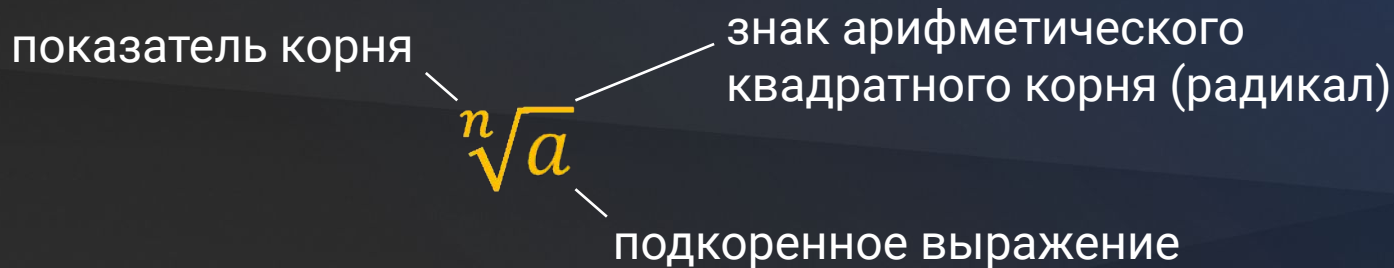
$$\sqrt[4]{625} = 5$$

арифметический корень 4-й степени
из числа 625

$$\sqrt[4]{625}$$

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a

называется неотрицательное число,
 n -я степень которого равна a .



Арифметический корень n -й степени

Корень второй степени,
или квадратный корень из числа:

$$n = 2$$

$$\sqrt{a}$$

Корень третьей степени,
или кубический корень из числа:

$$n = 3$$

$$\sqrt[3]{a}$$

Арифметический корень n -й степени

$$\sqrt[n]{a}$$

Действие, посредством которого отыскивается корень n -й степени, называется извлечением корня n -й степени.

Это действие является обратным действию возведения в n -ю степень.

Корень n -й степени.



Арифметический корень n -й степени

Равенство $\sqrt[n]{a} = b$ при $a \geq 0$ верно,

когда выполняются два условия:

- 1) $b \geq 0$;
- 2) $b^n = a$.

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$1) 3 > 0;$$

$$2) 3^3 = 27.$$

Из определения арифметического корня

следует, что если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

$$(\sqrt[5]{9})^5 = 9$$

$$(\sqrt[7]{19})^7 = 19$$

$$x^3 = 64$$

$$x^3 - 64 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$$

$$(x - 4)((x + 2)^2 + 12) = 0$$

$$(x + 2)^2 + 12 \neq 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$4 > 0$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$x^3 = -64$$

$$x^3 + 64 = 0$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

$$(x + 4)((x - 2)^2 + 12) = 0$$

$$(x - 2)^2 + 12 \neq 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$-4 < 0$$

Число -4 является корнем третьей степени из числа -64 , однако это число не является арифметическим корнем по определению.

Число -4 называют корнем кубическим из числа -64 .

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \neq \sqrt[3]{a^3 + (a^3 + b^3)^2 + b(a^2 + 2ab + b^2)}$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа

Для любого нечётного натурального числа $2k + 1$ уравнение $x^{2k+1} = a$ при $a < 0$ имеет только один корень, причём отрицательный.

$${}^{2k+1}\sqrt{a}$$

Запомните!

При нечётном n существует $\sqrt[n]{a}$,
и притом только один.

Для корней нечётной степени
справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$$

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Корень нечётной степени из
отрицательного числа a связан с
арифметическим корнем из числа
 $-a = |a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$$

Свойства арифметического корня n -й степени

При условии, что $a \geq 0, b > 0$,
а n, m и k – натуральные числа,
причём $n \geq 2, m \geq 2$, справедливы равенства:

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

(число b может также быть равным 0)

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

(число m может быть любым целым, если $a > 0$)

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$5. \sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства арифметического корня n -й степени

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

По определению арифметического корня $\sqrt[n]{ab}$ – это такое неотрицательное число, n -я степень которого равна ab .

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0;$$

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0; \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

$$3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$(\sqrt[n]{a})^m \geq 0;$$

$$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^{nm} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m.$$

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \geq 0;$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$5. \sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\sqrt[n]{a^m} \geq 0;$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = a^{mk}.$$

Задание № 1

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{343}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; в) $\sqrt[5]{-3125}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{343} = 7$;

$$7 > 0;$$

$$7^3 = 343;$$

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$;

$$\frac{3}{2} > 0;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16};$$

в) $\sqrt[5]{-3125} = -\sqrt[5]{3125} = -5$.

Задание № 2

Преобразуйте выражения:

а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$.

Решение:

$$\text{а) } \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2;$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7};$$

$$\text{г) } \sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[7 \cdot 3]{2^7} = \sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt[kn]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^n}}$$