

# Пример решения открытой транспортной задачи

**Задача 6.1.** На складах трех поставщиков  $A_1, A_2, A_3$  хранится 300, 250 и 200 единиц одного и того же груза. Этот груз требуется доставить четырем потребителям  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$ , заказы которых составляют 220, 150, 250 и 180 единиц груза соответственно. Стоимости перевозок  $c_{ij}$  единицы груза с  $i$ -го склада  $j$ -му потребителю указаны в правых верхних углах соответствующих клеток транспортной таблицы 7.

**Составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной**

заказы запасы		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		220	150	250	180
$A_1$	300	4	5	3	6
$A_2$	250	7	2	1	5
$A_3$	200	6	1	4	2

**Решение.** Поскольку суммарный запас груза  $a = 300 + 250 + 200 = 750$  меньше суммарной потребности  $b = 220 + 150 + 250 + 180 = 800$ , то рассматриваемая транспортная задача является открытой. Сведем ее к закрытой, добавив фиктивного поставщика  $A'_4$  с нулевыми тарифами перевозок и запасом груза  $a'_4 = b - a = 50$ .

Составим первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости, заполняя клетки в следующем порядке:

$$(4,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,4).$$

заказы запасы		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
		220	150	250	180
$A_1$	300	4	5	3	6
		220			80
$A_2$	250	7	2	1	5
				250	
$A_3$	200	6	1	4	2
			100		100
$A'_4$	50	0	0	0	0
			50		

Перейдем к анализу полученного плана. Заметим, что в этой задаче  $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ , а число занятых клеток в имеющемся плане равно 6. Значит, необходимо пополнить план еще 1 клеткой, записав в ней 0, так, чтобы пополненный план получился ациклическим. Выберем для этой цели, например, клетку (4,3).

Вычислим потенциалы по базисным клеткам плана

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 6, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2, \\ u_4 + v_2 = 0, \\ u_4 + v_3 = 0, \\ u_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = -4, \\ u_3 = -4, \\ u_4 = -5, \\ v_1 = 4, \\ v_2 = 5, \\ v_3 = 5, \\ v_4 = 6, \end{cases}$$

и вычислим для свободных клеток разности

$$\Delta c_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

потребности запасы		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		220	150	250	180	$u$
$A_1$	300	4 220	5 0	3 -2	6 80	0
$A_2$	250	7	2 1	1 250	5 3	-4
$A_3$	200	6	1 100	4 3	2 100	-4
$A_4$	50	0 1	0 50	0 0	0 -1	-5
	$v$	4	5	5	6	

Поскольку среди чисел  $\Delta c_{ij}$  есть отрицательные, то перераспределим груз на величину

$$\Delta x = \min(80, 100, 0) = 0$$

по циклу, обозначенному пунктиром. Клетка (1,3) станет базисной вместо клетки (4,3), и мы получим таблицу 10.

План, указанный в таблице 10, не является оптимальным, поскольку

$$\Delta c_{22} = \Delta c_{44} = -1 < 0.$$

Улучшим этот план с помощью перераспределения поставок по циклу, обозначенному в таблице 10 пунктиром, на величину

$$\Delta x = \min(100, 50) = 50.$$



заказы запасы		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		220	150	250	180	$u$
$A_1$	300	4 220	5 0	3 0	6 80	0
$A_2$	250	7 5	2 -1	1 250	5 1	-2
$A_3$	200	6 6	1 100	4 5	2 100	-4
$A_4$	50	0 1	0 50	0 2	0 -1	-5
	$v$	4	5	3	6	

заказы запасы		заказы				$u$
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		220	150	250	180	
$A_1$	300	4	5	3	6	
		220		0	80	0
			0	$\oplus$	$\ominus$	
$A_2$	250	7	2	1	5	
		5		250		-2
			-1	$\oplus$	$\ominus$	
$A_3$	200	6	1	4	2	
			150		50	-4
		6	$\ominus$	5	$\oplus$	
$A'_4$	50	0	0	0	0	
		2	1	3	50	-6
	$v$	4	5	3	6	

После еще одного перераспределения поставок на величину  $\Delta x = 80$

заказы запасы		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
		220	150	250	180	$u$
$A_1$	300	4 220	5 1	3 80	6 1	0
$A_2$	250	7 5	2 80	1 170	5 2	-2
$A_3$	200	6 5	1 70	4 4	2 130	-3
$A'_4$	50	0 1	0 1	0 2	0 50	-5
	$v$	4	4	3	5	

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 220 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 80 & 170 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 130 \end{pmatrix}.$$

Найдем суммарную стоимость перевозок по оптимальному плану:

$$z_{\min} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 4 \cdot 220 + 3 \cdot 80 + 2 \cdot 80 + 1 \cdot 170 + 1 \cdot 70 + 2 \cdot 130 = 1780.$$