ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Основы математической обработки информации
лектор Макеева О.В.

Основы математической обработки информации

Семестр: 3
Лекции: 6
Практические занятия: 10
Контрольная работа: 1
Зачёт

Лекция 2.
Дискретные и непрерывные модели
Аппроксимация

§1. Задача о размножении кроликов
Последовательности

§2. Задача о ступеньках из домино
Ряды

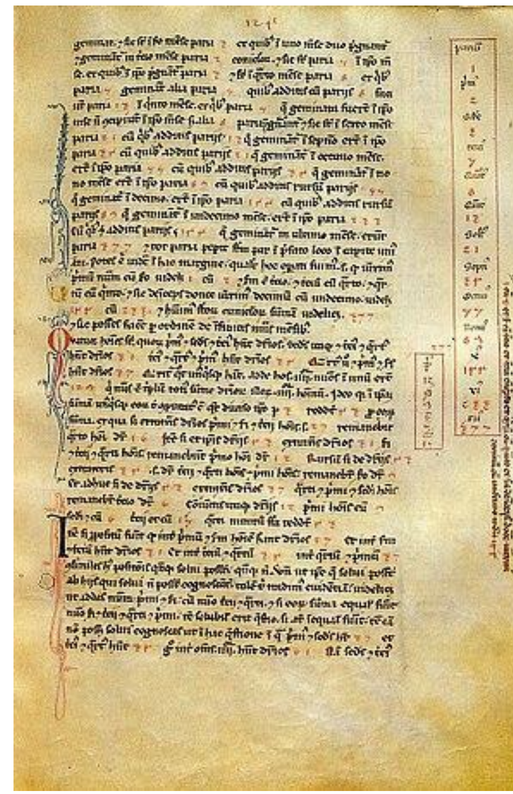
§3. Задача о площади сектора
Функции

§4. Задача об эксплуатации автомобиля
Аппроксимация

§5. Математическое моделирование

§1. Задача о размножении кроликов

Леона́рдо Пиза́нский
1170-1250



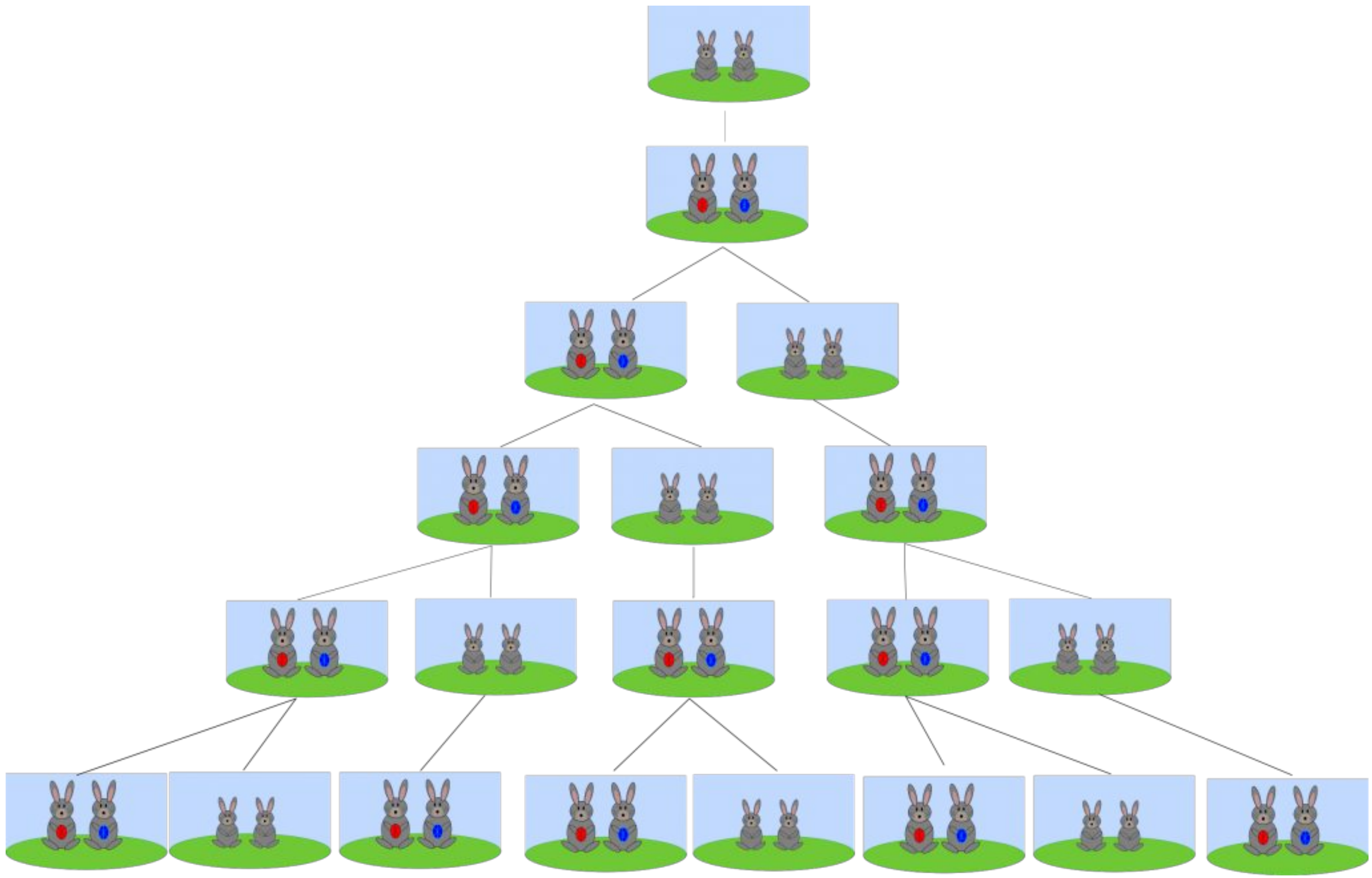
§1. Задача о размножении кроликов

В своей книге «Liber Abaci» (1202) Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи, рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая, что:

- *изначально есть новорожденная пара кроликов (самец и самка);*
- *со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться,*
- *и каждый месяц производить новую пару кроликов;*
- *кролики никогда не умирают.*

Сколько пар кроликов будет через n месяцев?

§1. Задача о размножении кроликов



§1. Задача о размножении кроликов

Обозначим через *A* пару зрелых кроликов, а через *B* – пару новорожденных кроликов. Тогда процесс «размножения» может быть описан с помощью двух «переходов»:

A – AB моделирует ежемесячное превращение каждой зрелой пары кроликов *A* в две пары, а именно в ту же самую пару зрелых кроликов *A* и новорожденную пару кроликов *B;*

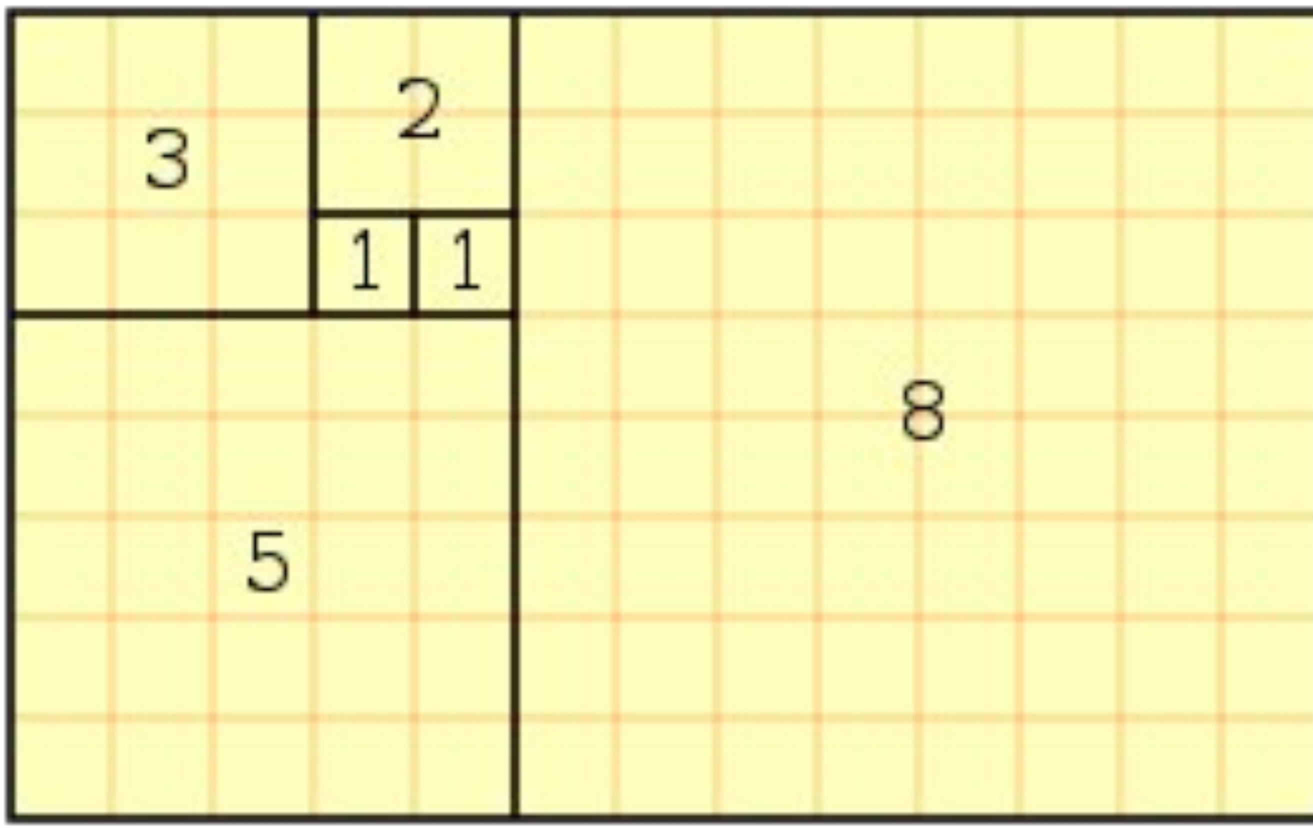
B – A моделирует процесс «созревания» кроликов, когда новорожденная пара кроликов *B* через месяц превращается в зрелую пару *A.*

§1. Задача о размножении кроликов

Дата	Пары кроликов	A	B	A+B
1-го января	A	1	0	1
1-го февраля	AB	1	1	2
1-го марта	ABA	2	1	3
1-го апреля	ABAAB	3	2	5
1-го мая	ABAABABA	5	3	8
1-го июня	ABAABABAABAAB	8	5	13

§1. Задача о размножении кроликов Последовательности

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1, n \in \mathrm{N}$$



§1. Задача о размножении кроликов Последовательности

Последовательность – числовая функция натурального аргумента.

$$\{a_n |\ a_n = f(n), \forall n \in \mathrm{N}\}$$

Способы задания последовательности

- описание;
- перечисление элементов;
- формула общего члена;
- рекуррентная формула;
- графический.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

§1. Задача о размножении кроликов Последовательности

Свойства последовательностей

- стационарность;
- цикличность;
- монотонность;
- ограниченность.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots$$

Операции над последовательностями

- сложение;
- вычитание;
- умножение;
- деление;
- умножение на число.

§1. Задача о размножении кроликов Последовательности

Частные случаи последовательностей

- арифметическая прогрессия: $a_{n+1} = a_n + d$

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$

- геометрическая прогрессия: $b_{n+1} = b_n \cdot q, q \neq 0$

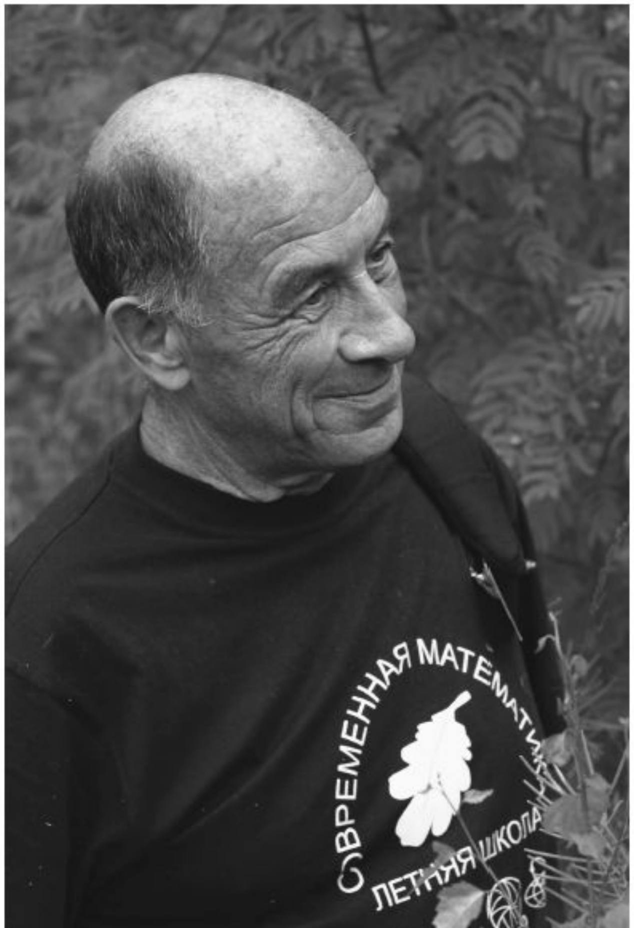
$$b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}$$

Предел последовательности

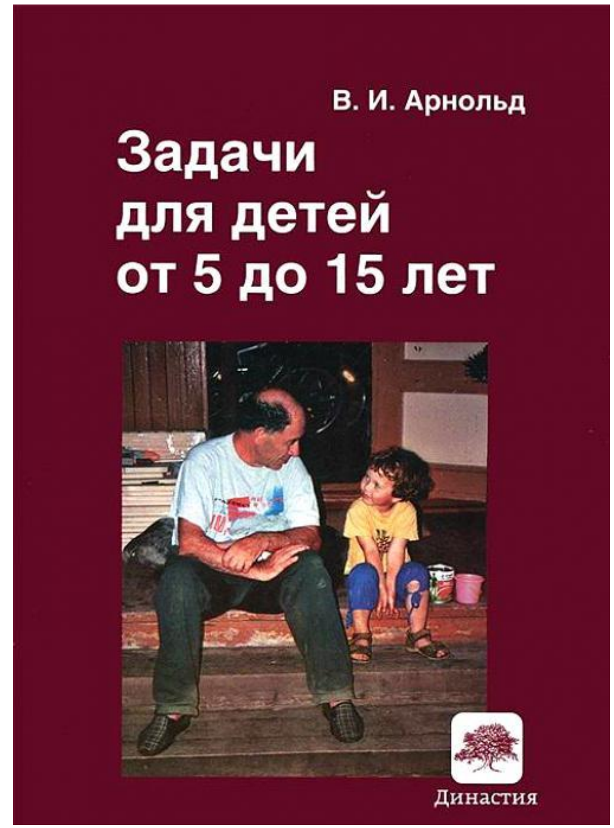
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{:=} \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots \to 1$$

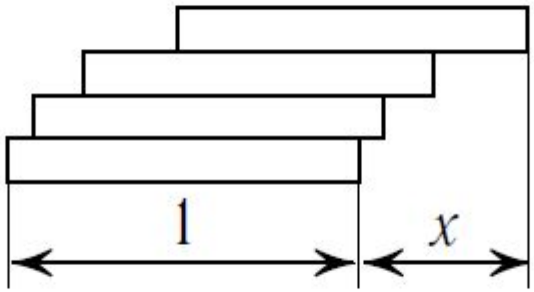
§2. Задача о ступеньках из домино



Владимир Игоревич Арнольд
12 июня 1937 — 3 июня 2010

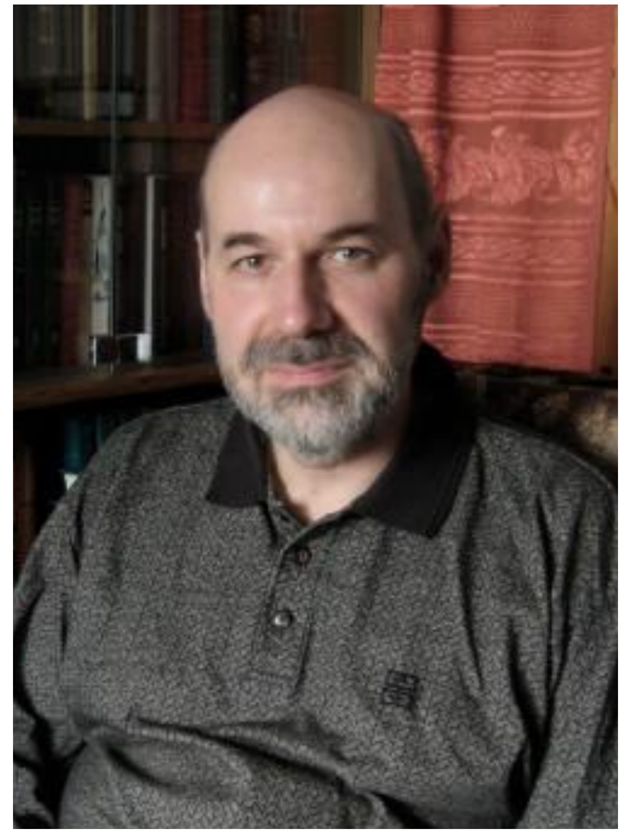


§2. Задача о ступеньках из домино



16. Положив (нужным образом) друг на друга несколько одинаковых пластинок (например, костяшек домино), можно образовать навес длиной x костяшек. Каково наибольшее достижимое значение длины навеса x?

§2. Задача о ступеньках из домино



Пантаев
Михаил Юрьевич

§2. Задача о ступеньках из домино

35 Пусть имеется неограниченный запас одинаковых кирпичей, которые кладутся друг на друга с некоторым сдвигом так, чтобы конструкция не падала. На какое наибольшее расстояние конец последнего кирпича может отстоять от начала первого (рис. 24)?

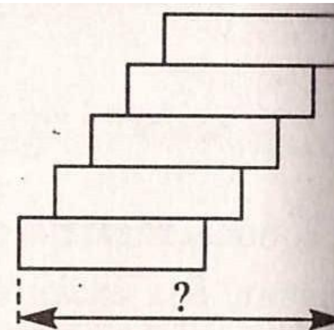


Рис. 24

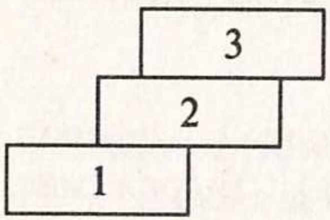


Рис. 25

В формулировке задачи содержится некий отвлекающий момент, препятствующий правильной догадке о том, что «крышу» можно сделать бесконечно длинной. В самом деле: если действительно класть кирпичи друг на друга, то, положив два со сдвигом $1/2$ (считаем длину кирпича равной 1), мы увидим (рис. 25), что дальше-то некуда: если хоть немного сдвинуть 3-й кирпич относительно 2-го, пирамида рухнет.

Поступим иначе: станем подсовывать кирпичи друг под друга; тогда стратегия будет состоять в том, чтобы после добавления очередного кирпича центр тяжести всей конструкции проецировался в край нижнего кирпича.

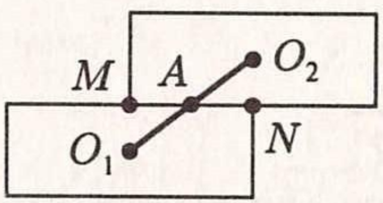


Рис. 26

Тогда второй кирпич по-прежнему можно сдвинуть относительно первого на $1/2$. Если O_1 и O_2 — центры тяжести кирпичей (рис. 26), то их общий центр тяжести находится в точке A, делящей отрезок MN пополам и отстоящей от края второго кирпича на $1/4$.

§2. Задача о ступеньках из домино
Ряды

Значит, третий кирпич можно сдвинуть относительно второго на $1/4$. *Если* O_3 — *центр тяжести третьего кирпича (рис. 27), то общий центр тяжести системы из трех кирпичей находится в точке B, такой что* $O_3B : BA = 2:1$ *(правило рычага). Значит, точка B делит отрезок* M_1N_1 *(равный половине длины кирпича) в отношении 2:1, т. е.* $M_1B = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, *тогда* $BN_1 = \frac{1}{6}$ *и четвертый кирпич можно сдвинуть относительно третьего на* $1/6$. *Аналогично устанавливается, что для следующего центра имеем пропорцию* $O_4C : CB = 3:1$ *и, значит, пятый кирпич можно сдвинуть на* $1/8$, *и т. д.*

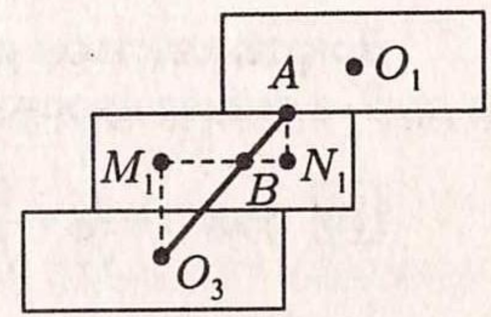


Рис. 27

Тогда общий сдвиг составит величину $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, *а поскольку ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *расходится, крыша может быть бесконечно длинной.*

§2. Задача о ступеньках из домино
Ряды

Ряд – это бесконечная сумма.

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Виды рядов

- числовые ряды;
  - положительные;
  - знакопеременные;
    - знакочередующиеся;

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

- функциональные;
  - степенные;
  - тригонометрические;
  - …

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

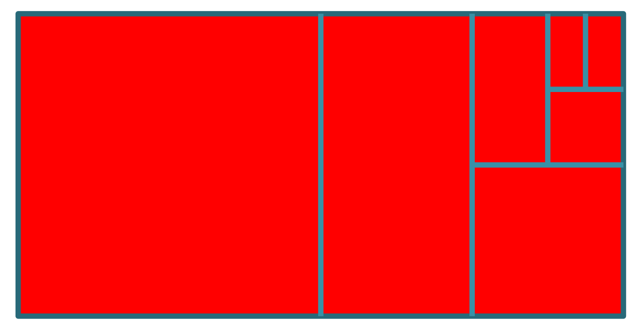
§2. Задача о ступеньках из домино
Ряды

Вычисление (исследование) рядов

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

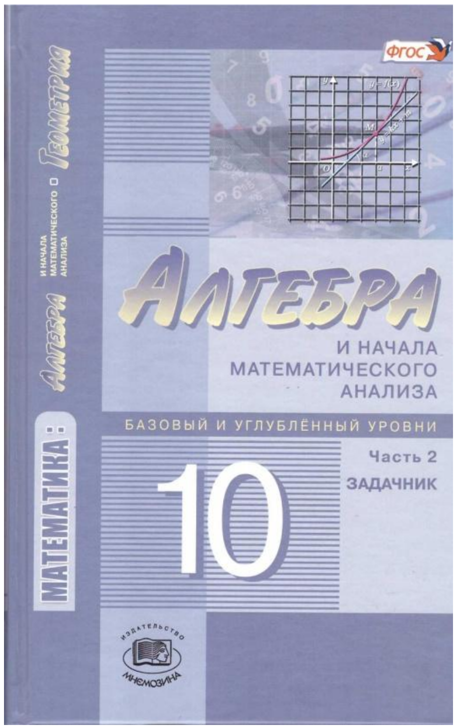
$$S_1, S_2, S_3, S_4, \dots \to S$$



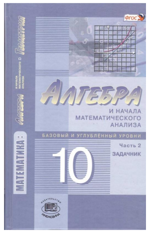
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_2 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{7}{4}, S_4 = \frac{15}{8}, \dots, S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \to 2$$

§3. Задача о площади сектора Функции



Мордкович
Александр Григорьевич



§3. Задача о площади сектора Функции

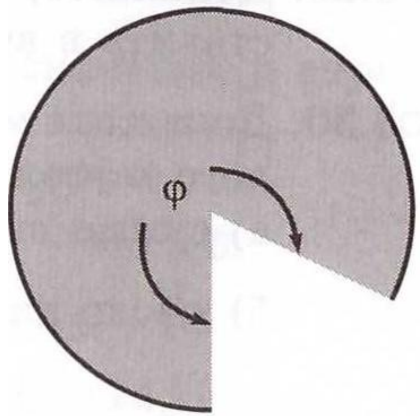


Рис. 6

7.4. На рисунке 6 изображен сектор круга, радиус которого равен 1, а центральный угол равен φ, причем $\varphi \in (0; 2\pi)$.

а) Выразите площадь S этого сектора как функцию угла φ : $S = S(\varphi)$.

Постройте график функции $S = S(\varphi)$.

б) Вычислите значение функции $S = S(\varphi)$ при $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

в) Найдите $S(2) - S(1)$.

г) Найдите $S(\varphi + \delta) - S(\varphi)$.

§3. Задача о площади сектора функции

Числовой функцией с областью определения **D** называется зависимость, при которой каждому числу из множества D ставится в соответствие единственное число y, обычно обозначаемое y=f(x).[1]

Способы задания функций

- описание;
- табличный;
- графический;
- аналитический.

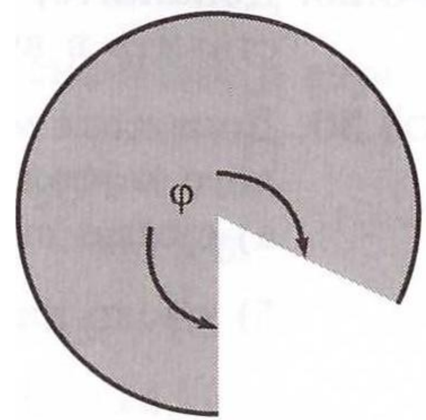


Рис. 6

---

[1] Сравните с определением Лекции 1 (слайд 31).

§3. Задача о площади сектора
Функции

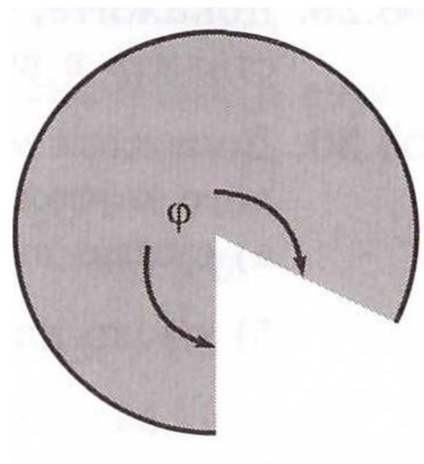


Рис. 6

Свойства функций

- монотонность;
- ограниченность;
- чётность/нечётность;
- периодичность.

Операции над функциями

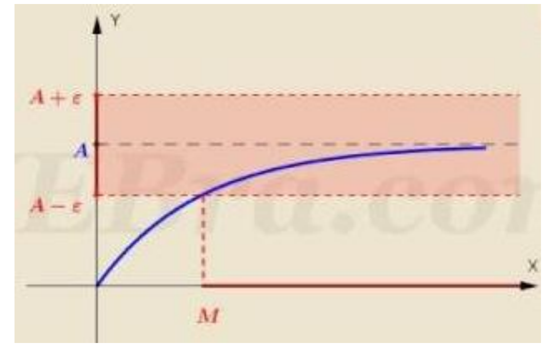
- сложение;
- вычитание;
- умножение;
- деление;
- умножение на число;
- суперпозиция.

§3. Задача о площади сектора Функции

Основные элементарные функции

- линейная;
- квадратичная;
- степенная;
- показательная;
- логарифмическая;
- тригонометрические;
- обратные тригонометрические.

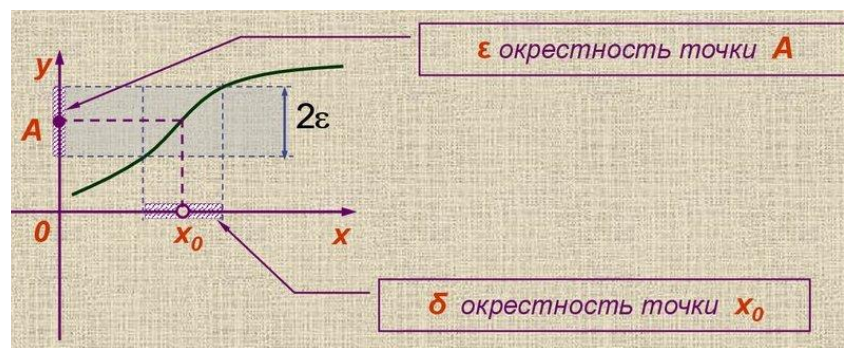
§3. Задача о площади сектора Функции



Предел функции

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \overset{def}{:=}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \geq M \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{:=}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

§4. Задача об эксплуатации автомобиля Аппроксимация

В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Составьте линейную зависимость стоимости ремонта от срока эксплуатации.

Определите предполагаемую величину затрат на ремонт на 10-й год эксплуатации.

§4. Задача об эксплуатации автомобиля Аппроксимация

Аппроксима́ция (от лат. *proxima* – ближайшая) или **приближе́ние** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов.

§4. Задача об эксплуатации автомобиля Аппроксимация

Интерполя́ция **интерполи́рование** — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Экстраполя́ция, **экстраполи́рование** — особый тип аппроксимации, при котором функция аппроксимируется вне заданного интервала, а не между заданными значениями.

§4. Задача об эксплуатации автомобиля
Аппроксимация
Метод наименьших квадратов

Этот метод применяется для согласования между собой слегка противоречащих друг другу данных эксперимента (измерений). Пусть измерены координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n точек, которые — теоретически — должны лежать на одной прямой. Как выбрать прямую, которая наилучшим образом соответствует этим точкам?

Пусть $y = ax + b$ — уравнение искомой прямой; вертикальное отклонение точки $(x_k; y_k)$ от этой прямой равно $y_k - ax_k - b$; согласно принципу наименьших квадратов, числа a и b надо подобрать так, чтобы минимизировать сумму

$$z = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2$$

как функцию двух переменных a и b. Частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2\,(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-x_2) + \ldots + 2(y_n - ax_n - b)(-x_n),$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2\,(y_1 - ax_1 - b)(-1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-1) + \ldots + 2(y_n - ax_n - b)(-1).$$

Стационарная точка находится из равенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k x_x - a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} y_k - a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - nb = 0 \end{cases}$$

§4. Задача об эксплуатации автомобиля
Аппроксимация
Метод наименьших квадратов

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

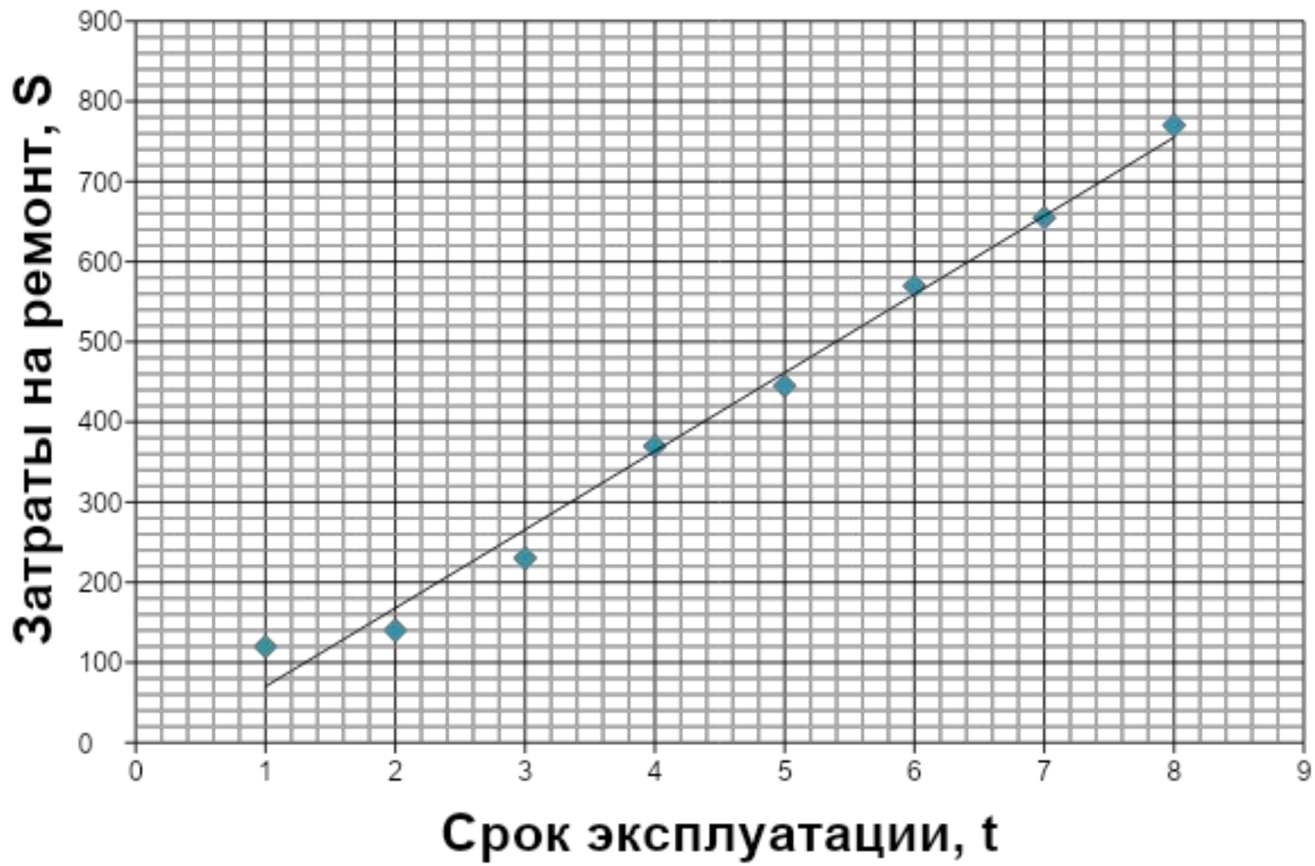
$$S = a \cdot t + b$$

t	S	t^2	t*S
1	120	1	120
2	140	4	280
3	230	9	690
4	370	16	1480
5	445	25	2225
6	570	36	3420
7	655	49	4585
8	770	64	6160
36	**3300**	**204**	**18960**

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot S_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} t_i + nb = \sum_{i=1}^{n} S_i. \end{cases}$$

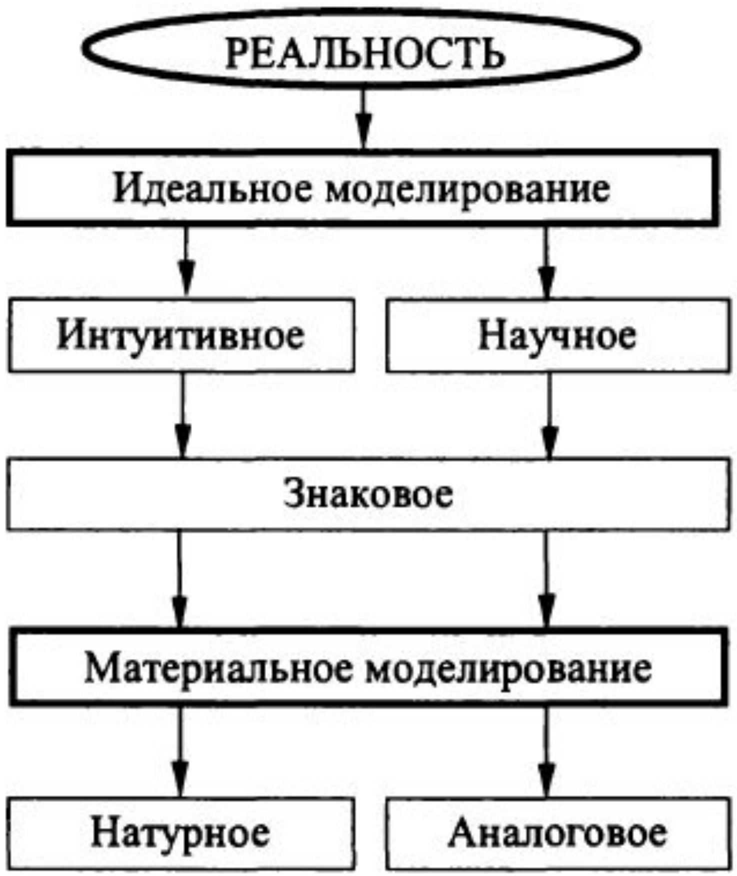
$$\begin{cases} a \cdot 204 + b \cdot 36 = 18960, \\ a \cdot 36 + 8 \cdot b = 3300 \end{cases}$$

§4. Задача об эксплуатации автомобиля
Аппроксимация
Метод наименьших квадратов



$$S(10) = 97,857 \cdot 10 - 27,857 = 950,713$$

§5. Математическое моделирование



Математическое моделирование – идеальное, научное, знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследования модели проводятся с использованием математических методов.

§5. Математическое моделирование

Классификация математических моделей
в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§5. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- **Сложности объекта моделирования**;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§5. Математическое моделирование

$$A: X \to Y, \quad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y$$

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- **Оператора модели**;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§5. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- ❑Сложности объекта моделирования;
- ❑Оператора модели;
- **❑Входных и выходных параметров;**
- ❑Способа исследования модели;
- ❑Цели моделирования.

§5. Математическое моделирование

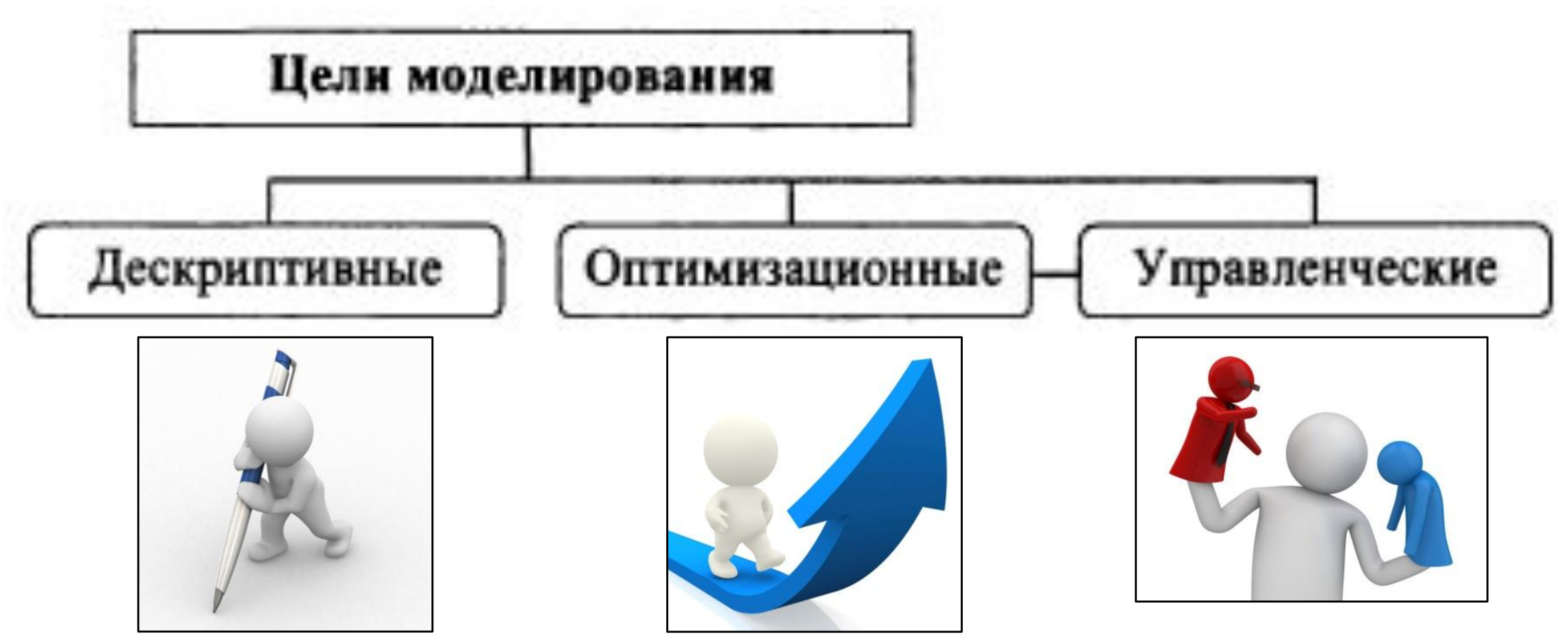
Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

§5. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- **Цели моделирования**.



§5. Математическое моделирование

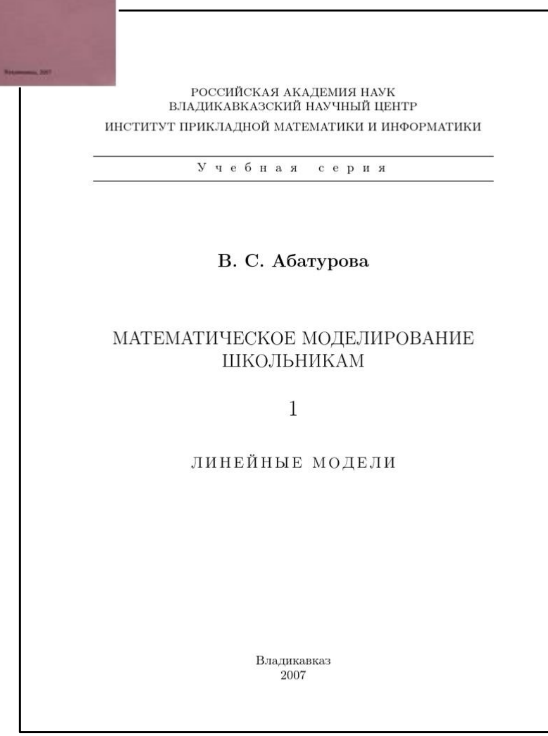
Этапы построения математической модели

§5. Математическое моделирование

Владикавказский центр непрерывного математического образования

Абатурова Вера Сергеевна

к.п.н.; зав. отделом образовательных и информационных технологий Южного математического института Владикавказского научного центра РАН;
директор ВЦНМО



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Учебная серия

В. С. Абатурова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ШКОЛЬНИКАМ

1

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Владикавказ
2007

§5. Математическое моделирование

Задача Ньютона [19]. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?

a - количество единиц травы, которое было на лугу первоначально;
b - количество единиц травы, которое ежедневно вырастает на лугу;
c - количество единиц травы, которое ежедневно съедает одна корова.

$$\begin{cases} a + 24b = 1680c, \\ a + 60b = 1800c, \\ a + 96b = 96xc. \end{cases}$$

Ответ: 20 коров.

1. Выбор переменных.
2. Запись ограничений на переменные.
3. Формулировка требований задачи на языке математики (с помощью переменных).
4. Решение математической задачи.
5. Интерпретация результатов. Запись ответа.

Основы математической обработки информации

Продолжение следует…