Дискретная математика

Соответствия и функции

Соответствием множеств A и B называется подмножество G такое, что $G \subseteq A \times B$. Если $(a,b) \in G$, то говорят, что "b соответствует a при соответствии G".

Область определения соответствия G – множество $\text{пр}_1 G \subseteq A$.

Область значений соответствия G – множество $\text{пр}_2 G \subseteq B$.

- Соответствие G называется ***всюду (полностью) определенным*** – если $пр_1\ G = A$ (в противном случае – частично определенное соответствие).

- Соответствие G называется ***сюрьективным***, если $пр_2\ G = B$.

- ***Образ*** элемента a в множестве B при соответствии G – это множество всех элементов $b \notin B$ которые соответствуют $a \notin A$.

Прообраз элемента b в множестве A при соответствии G – это множество всех $a \notin A$, которым соответствует $b \notin B$.

- ***Образом множества*** $C \in \text{пр}_1 G$ называется объединение образов всех элементов C.

- ***Прообразом множества*** $D \in \text{пр}_2\, G$ называется объединение прообразов всех элементов D.
- Соответствие G называется ***функциональным (однозначным) соответствием***, если образом любого элемента из $\text{пр}_1\, G$ является единственный элемент из $\text{пр}_2\, G$.

- Соответствие G называется ***инъективным*** соответствием, если прообразом любого элемента из $пр_2\, G$ является единственный элемент из $пр_1\, G$.
- Соответствие F является ***функцией типа*** $F : A \to B$, если оно функционально (однозначно) $F(a) = b$.

- Соответствие G является ***отображением*** множества A в множество B, если оно функционально и полностью определено.
- Соответствие G является ***взаимно однозначным***, если оно:
  1) всюду определено; 2) сюрьективно;
  3) функционально; 4) инъективно.

- ***Преобразованием множества A*** называется отображение типа $A \to A$.
- Функция типа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется ***n-местной функцией*** $(f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b)$.
- Соответствие $H \subseteq A \times B$ называется обратным к $G \subseteq A \times B$, если H таково, что

$$(b, a) \in H \Leftrightarrow (a, b) \in G.$$

- Если соответствие, обратное к функции $f : A \to B$ является функциональным, то оно называется ***функцией, обратной к f***, (f^{-1}).
- Пусть дана функция $f : A \to B$. Соответствие (f^{-1}) является функцией тогда и только тогда, когда f инъективна, и является отображением тогда и только тогда, когда f инъективна и сюрьективна (т. е. ***биективна***).

- **Утверждение:** Для функции $f : A \to B$ существует обратная функция (f^{-1})тогда и только тогда, когда f является взаимнооднозначным соответствием между своей областью определения и областью значений.

- Пусть даны функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$
- Функция $h : A \longrightarrow C$ называется ***композицией функций*** f и g, если $h(x) = g(f(x)), x \in A$ (обозначение $h = f \circ g$). Часто говорят, что h получена ***подстановкой*** f в g.

Для многоместных функций $f : A^m \to B$

и $g : B^n \to C$ возможны различные варианты подстановки f в g, задающие функции различных типов. Например, при

$m = 3$ и $n = 4$ функция $B \times A^3 \times B^2 \to C$ имеет 6 аргументов и.

$$h = g(b_1, f(a_1, a_2, a_3), b_3, b_4)$$

- Для множества многоместных функций типа $f_1 : A^{m_1} \to A, \ldots, f_n : A^{m_n} \to A$ возможны любые *подстановки функций* друг в друга, а также любые *переименования аргументов*.
- Например, переименование x_3 в x_2 из функции четырёх аргументов порождает функцию трёх аргументов:

$$f(x_1, x_2, x_2, x_4) = f(x_1, x_2, x_4)$$

- Функция, полученная из функций $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется ***суперпозицией*** функций $f_1, \ldots, f_n$.
- Выражение, задающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки, скобки и символы аргументов, называется ***формулой***.

Взаимно однозначные соответствия и мощность множеств

- **Утверждение** (о взаимно однозначном соответствии равномощных множеств): Если между конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, то $|A|=|B|.$

- Этот факт:
- 1) позволяет установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя мощностей этих множеств;
- 2) дает возможность вычислить мощность множества, установив его взаимно однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляется.