СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОД КРАМЕРА

Преподаватель:
Махмудов Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

Системы из n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим общую квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет решение и ***несовместной***, если она не имеет решений.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Система называется ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$
Однородная система совместна, так как всегда имеет нулевое решение.

Вспомним такие понятия как:

$AX = B$ - запись СЛАУ в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A – основная матрица системы

X – матрица-столбец неизвестных

B – матрица-столбец свободных членов

Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Центральная задача линейной алгебры - это решение систем линейных уравнений.

Наиболее простым, является случай, когда число неизвестных ***n*** равно числу уравнений ***n***. Пусть ***n = 2***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Свободные члены уравнения

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

Номер неизвестного,

Номер уравнения

Решение данной системы - это пара чисел x_1 и x_2, которая при подстановке обращает оба этих уравнения в тождества.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot a_{22}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{22}\cdot x_2 = b_1\cdot a_{22} \\ a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{22}\cdot x_2 = a_{12}\cdot b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot x_1 = a_{22}\cdot b_1 - a_{12}\cdot b_2$$

Обозначим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\cdot a_{22} - a_{12}\cdot b_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\cdot x_1 = \Delta_1$$

Аналогично получим: $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$

обозначив; $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

Система уравнений будет иметь вид: $$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы находится по формулам:

$$\boxed{x_1 = \frac{\boxed{\Delta_1}}{\boxed{\Delta}}; \quad x_2 = \frac{\boxed{\Delta_2}}{\boxed{\Delta}}}$$

Вспомогательные определители системы

Главный определитель системы

Формулы Крамера

Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Вычислим главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = -9$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{7}{1} = 7; \qquad x_2 = \frac{-9}{1} = -9$$

Рассмотрим пример 1

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 + 3X_2 = 7 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

$\boldsymbol{\Delta}$ - отличен от нуля $\Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) Составим и вычислим необходимые определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14;$$

3) Находим неизвестные переменные по формулам

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1 \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Ответ: $X_1 = 1$, $X_2 = 2$.

Метод Крамера

Для сокращения выкладок запишем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вспомогательные определители получаются из главного определителя, если заменить соответствующий столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

По величине главного и вспомогательных определителей можно судить о характере системы:

- Если $\Delta \neq 0$ то система совместна и определенна.
- Если $\Delta = 0,\ \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ то система совместна и неопределенна.
- Если $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_3 \neq 0$ то система несовместна.

В общем случае будем иметь *n +1* определителей *n – ого* порядка

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-1}, \Delta_n$$

и, если $\Delta \neq 0$, то решение системы находится по формулам Крамера:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \cdots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

Рассмотрим пример 2

Задание.

Решите систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Основная матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Вычислим ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2) Составим и вычислим необходимые определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36 + 6 + 0 - 4 - 18 - 0 = -52$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 9 - 2 + 3 - 18 - 4 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 0 + 18 - 6 - 0 = 13$$

3) Находим неизвестные переменные по формулам

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1$$

Ответ: $X_1 = 4$, $X_2 = 0$, $X_3 = -1$.