Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ №8

ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

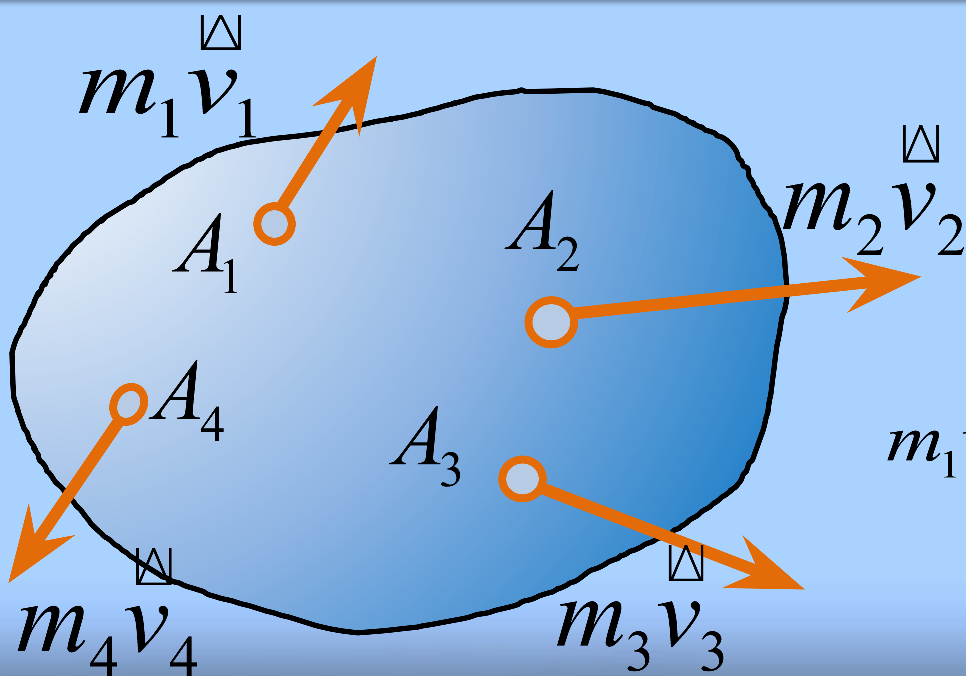
Кафедра теоретической механики

План лекции:

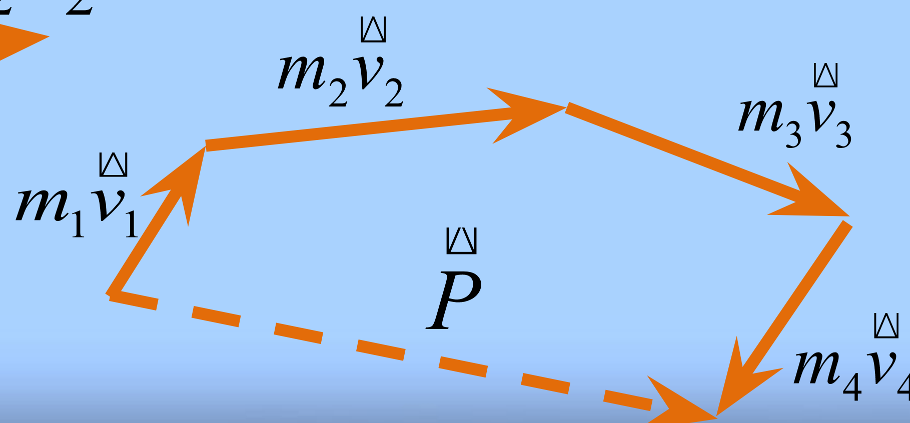
- Понятие импульса механической системы
- Теорема об изменении импульса системы
- Закон сохранения импульса системы

Понятие импульса механической системы (МС)

Импульс (количество движения) МС – **векторная величина $\vec{P}$, равная геометрической сумме (главному вектору) импульсов всех точек системы.**



$$\vec{P}=\sum m_k\vec{v}_k$$



По определению можно вывести формулу, по которой значительно легче вычислять величину $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k, \quad \vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_k \vec{r}_k \Rightarrow \sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c$$

От этого выражения возьмём производную по времени:

$$\sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M \frac{d\vec{r}_c}{dt}, \text{или} \ \sum m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_c$$

Следовательно, $\vec{P} = M\vec{v}_c$ *, то есть*

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс.

Из этого следует, что **если центр масс при движении системы остаётся неподвижным, то импульс системы равен нулю.**

Теорема об изменении импульса МС

Производная по времени импульса МС равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.

Для доказательства возьмём дифференциальные уравнения движения материальной системы в следующей форме:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_1^{\,i}, \; \ldots, m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^{\,e} + \vec{F}_n^{\,i}$$

И сложим почленно все уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i}$$

По первому свойству внутренних сил, геометрическая сумма всех внутренних сил системы равна нулю (левая часть уравнения); правая же часть неравенства равна главному вектору $\boldsymbol{F^e}$:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = \vec{F}^e, \; или \; \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e,$$

что и требовалось доказать.

Интегральная форма теоремы об изменении импульса МС:

Изменение импульса МС за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

Доказательство:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e \Rightarrow \ d\vec{P} = \left(\sum \vec{F}_k^e\right) dt \Rightarrow \int_{P_0}^{P_1} d\vec{P} = \sum \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_k^e\right) dt;$$

$$\vec{S}^e = \sum \vec{S}_k^e = \sum \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k^e dt \ ;$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_0 = \vec{S}^e$$

Следствия из теоремы:

Интегральная форма:

1. Если сумма импульсов внешних сил, действующих на систему за некоторый промежуток времени равна нулю, то вектор импульса системы не изменится за этот промежуток времени.

$$\sum \vec{S}_k^e = 0 \rightarrow \vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_0)$$

2. Если сумма проекций импульсов внешних сил, действующих на систему, на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция вектора импульса системы не изменится за этот промежуток времени.

$$\sum S_{kx}^e = 0 \rightarrow P_x(t_1) = P_x(t_0)$$

Следствия из дифференциальной формы – закон сохранения импульса:

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор импульса системы остаётся постоянным по величине и направлению.

$$\sum \vec{F}_k^e = 0 \rightarrow \qquad P = const$$

2. Если проекция главного вектора всех внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось остаётся постоянной.

$$\sum F_{kx}^e = 0 \rightarrow \qquad P_x = const$$

Пример:

Человек массой m_1=60 кг, бегущий со скоростью v_1=2 м/с, впрыгивает на тележку массой m_2=80 кг, движущуюся со скоростью v_2=1 м/с. С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком на ней, если: а) человек догоняет тележку; б) тележка и человек двигаются навстречу друг другу?

Решение.

Закон сохранения импульса в данном случае имеет вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

а) Когда человек догоняет тележку, то их скорости направлены в одну сторону, следовательно, при проецировании на горизонтальную ось

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{60*2 + 80*1}{80 + 60} = \frac{10}{7} \approx 1{,}43(м/с)$$

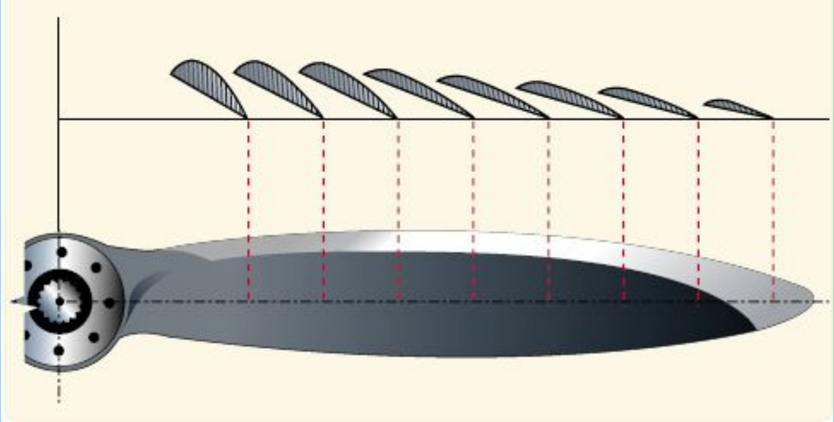
б) Когда человек и тележка движутся навстречу друг другу, то их скорости имеют разные знаки. Тогда, в проекции на ось x

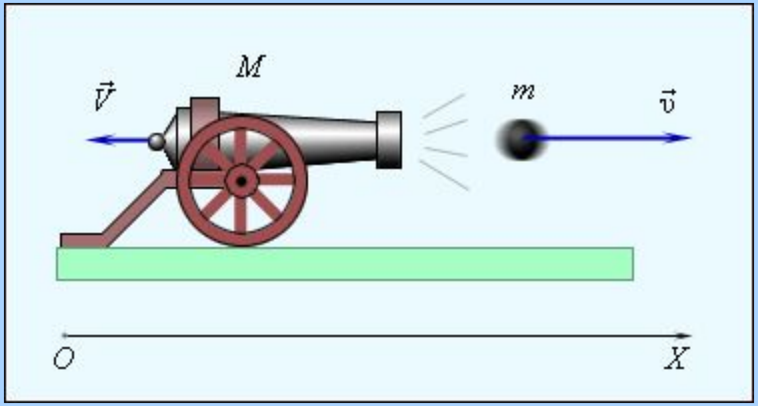
$$u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{60*2 - 80*1}{80 + 60} = \frac{2}{7} \approx 0{,}29(м/с)$$

Тележка с человеком на ней будет двигаться в сторону, противоположную тому, куда двигалась тележка без человека.

Пример: тело переменной массы

Почему двигается самолет?





От чего оттолкнуться в космосе?

Реактивное движение

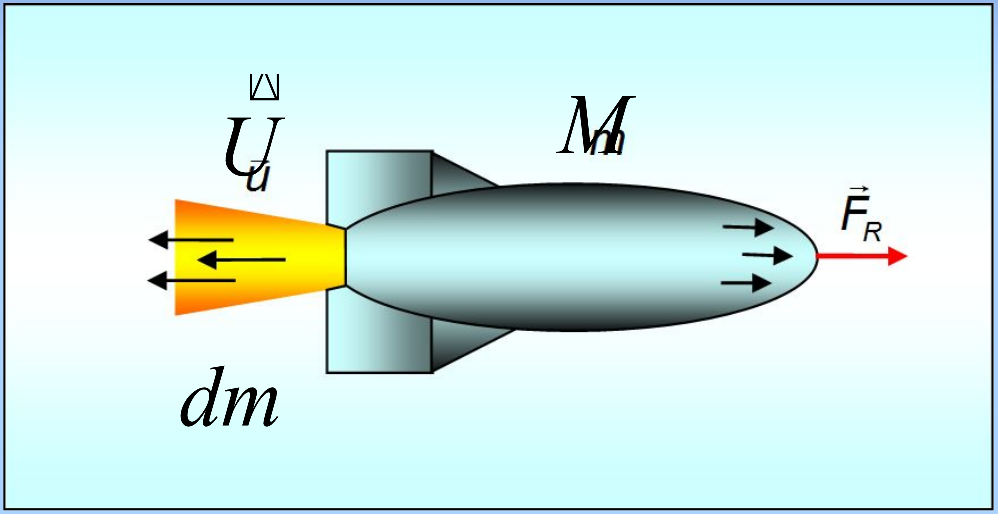
«Земля – колыбель разума, но нельзя же вечно находится в колыбели»

К.Э.Циолковский

Движение тела, возникающее вследствие отделения от него части его массы с некоторой скоростью, называют реактивным.

Устройство ракеты

Уравнение движения ракеты



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

$$d\vec{P} = M d\vec{v} + \vec{U} dm$$

$$d\vec{P} = M d\vec{v} - \vec{U} dM$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{U} \frac{dM}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{U} \frac{dM}{dt}$$

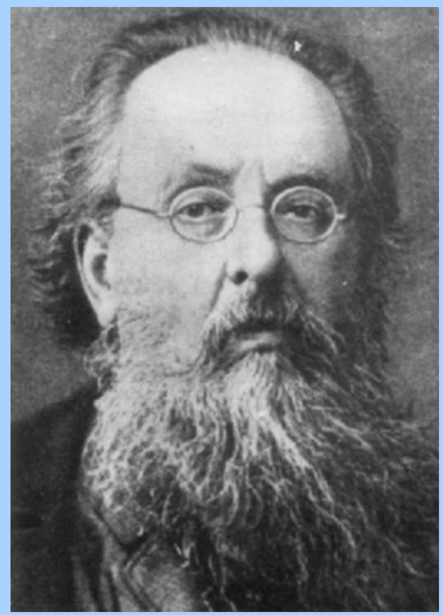
$$\vec{F}_R = \vec{U} \frac{dM}{dt}$$

Уравнение движения ракеты

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum \vec{F}_k^e+\vec{F}_R$$

формула Мещерского

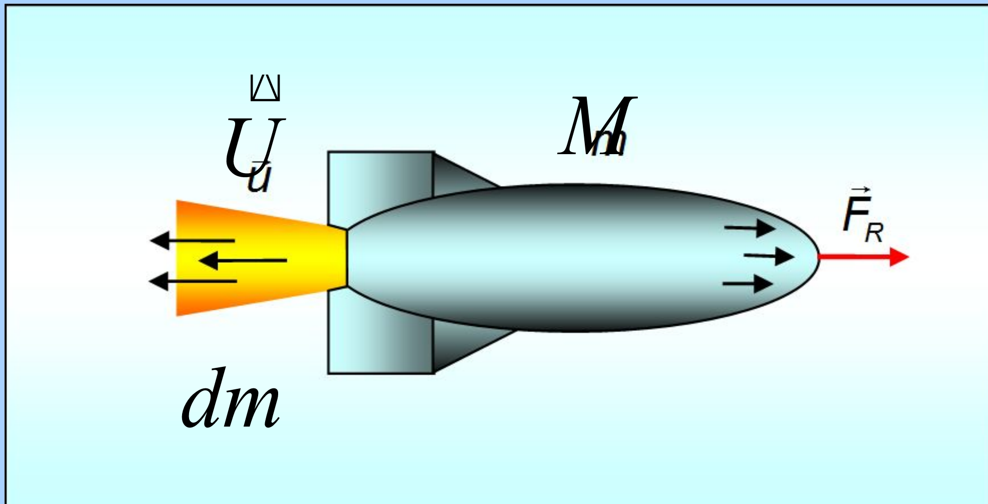
Иван Всеволодович
Мещерский



Константин Эдуардович
Циолковский

Уравнение движения ракеты

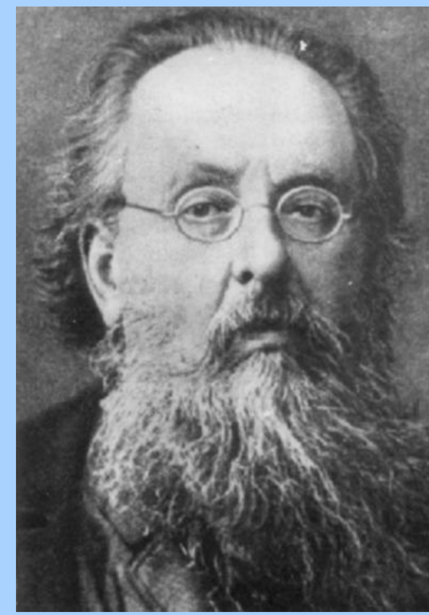
$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_R \qquad M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{U}\frac{dM}{dt} = -\vec{U}\left|\frac{dM}{dt}\right| = -\mu\vec{U}$$



$$v_k = v_0 - U(\ln(M_K) - \ln(M_0))$$

$$v_k = v_0 - U\ln(M_0 / M_K)$$

формула Мещерского



Константин Эдуардович Циолковский

Тема следующей лекции

Теорема об изменении момента импульса