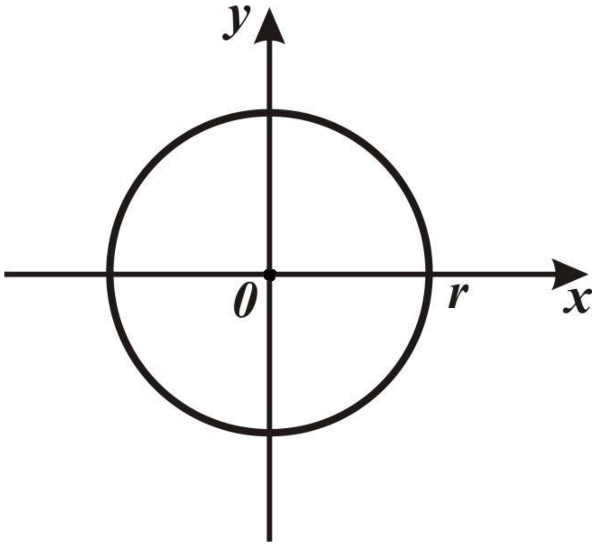
Кривые второго порядка

Окружность

Определение: *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности).

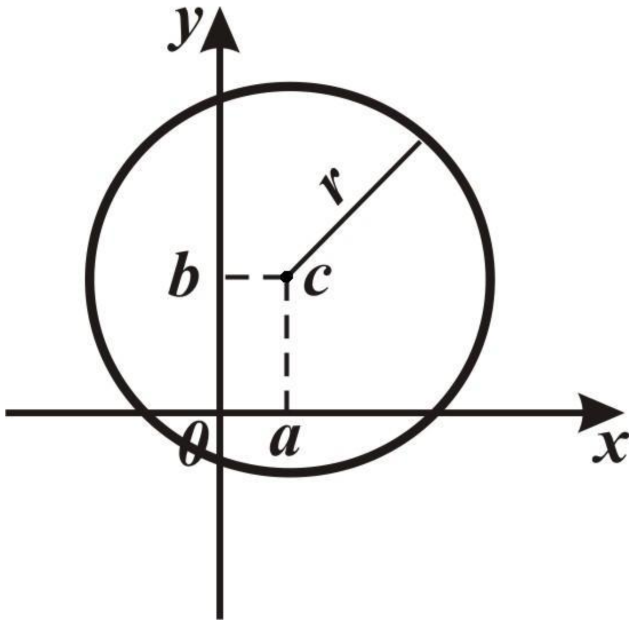
Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$



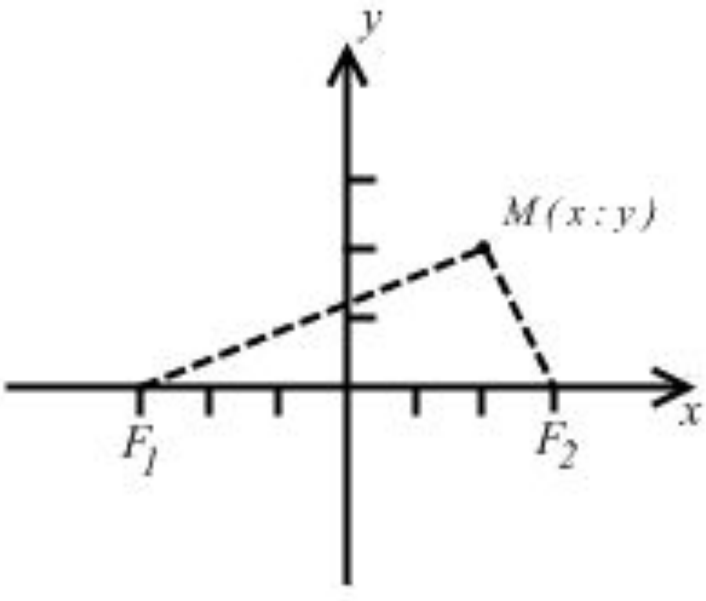
Если r – радиус окружности, а точка $C(a;\, b)$ – ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (2)$$



Эллипс

Определение: *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между двумя фокусами.

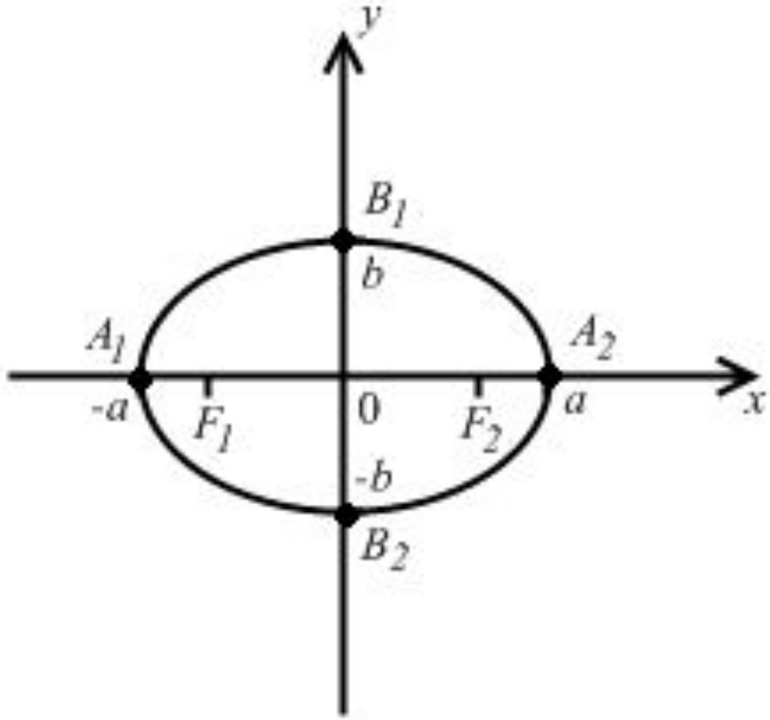


По определению $MF_1 + MF_2 = 2a$, $F_1F_2 = 2c$ и, следовательно, $2a > 2c$ или $a > c$. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ (4) , a – длина большой полуоси эллипса, b – длина малой полуоси эллипса ($a > b$), c – половина расстояния между фокусами.

Оси координат являются *осями симметрии эллипса*.



$|A_1A_2| = 2a$ – длина большой оси эллипса,

$|B_1B_2| = 2b$ – длина малой оси эллипса,

O – центр эллипса,

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$ – вершины эллипса,

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ – фокусы эллипса.

Определение: *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение половины расстояния между фокусами к длине большой полуоси эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (5).

Так как $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$.

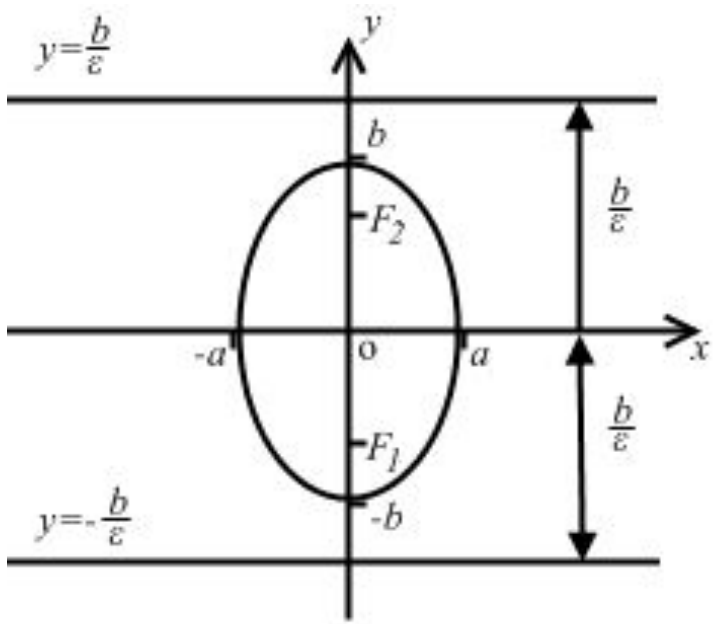
Чем больше эксцентриситет, тем больше расстояние от центра эллипса до его фокусов и тем более «сплющен» эллипс; чем ближе эксцентриситет к 0, тем больше форма эллипса приближается к окружности.

При $a = b$ эллипс преобразуется в окружность, тогда $c = 0$ и, следовательно, $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 1$, эллипс преобразуется в свою сдвоенную большую ось.

При $b > a$ эллипс расположен вдоль оси Oy. В этом случае оси Ox и Oy поменялись местами: большая ось и фокусы такого эллипса лежат на оси Oy, а малая ось на оси Ox.

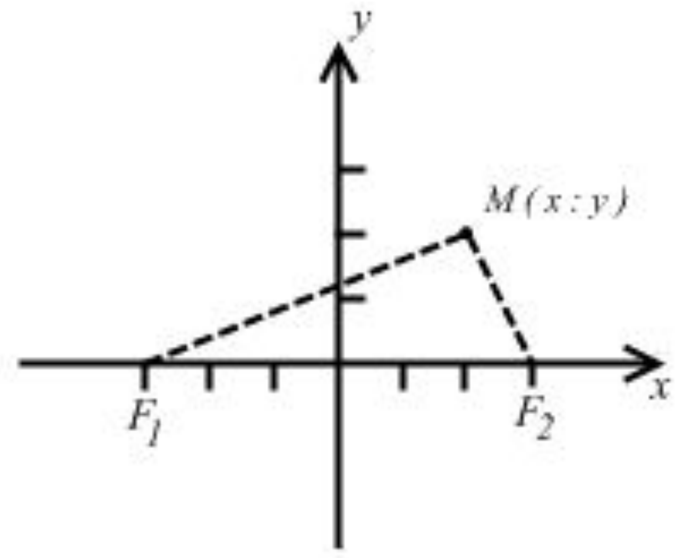
Для такого эллипса: $c^2 = b^2 - a^2, \quad \varepsilon = \dfrac{c}{b};$

$F_1(0; -c), \quad F_2(0; c)$ – координаты фокусов;



Гипербола

Определение: *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между двумя фокусами.



По определению $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $F_1F_2 = 2c$ и, следовательно, $2a < 2c$ или $a < c$. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

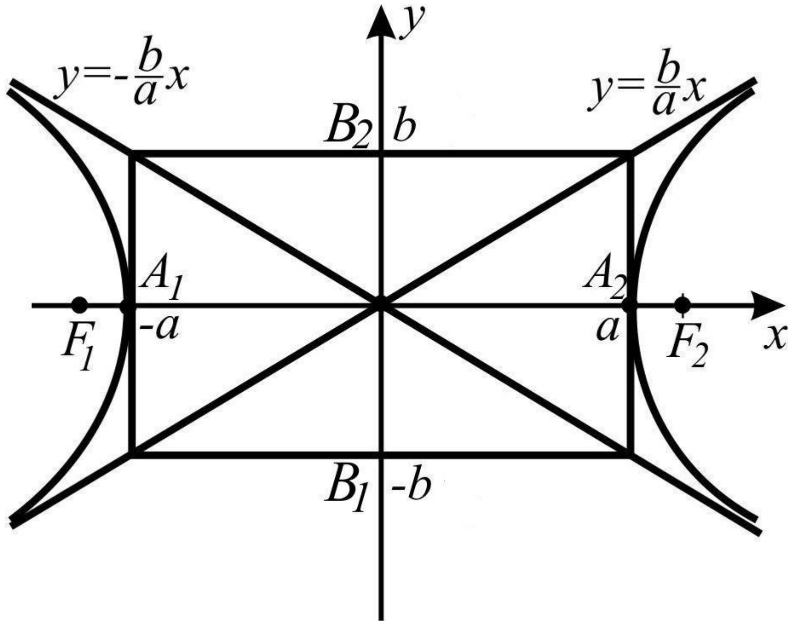
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ (7) , a – длина действительной полуоси гиперболы, b – длина мнимой полуоси гиперболы, c – половина расстояния между фокусами.

Для построения гиперболы необходимо сначала построить осевой прямоугольник, затем провести диагонали этого прямоугольника, которые являются асимптотами гиперболы.

В силу симметрии гиперболы, она имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Наличие асимптот и симметрии позволяют построить всю гиперболу.

Кривая состоит из двух не смыкающихся ветвей, лежащих в углах между асимптотами $y = \pm\frac{b}{a}x$ (8), и неограниченно приближающихся к этим прямым.



$|A_1A_2| = 2a$ – длина действительной оси гиперболы,

$|B_1B_2| = 2b$ – длина мнимой оси гиперболы,

O – центр гиперболы,

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$ – вершины гиперболы,

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы.

Определение: *Эксцентриситетом гиперболы* называется отношение половины расстояния между фокусами к длине действительной полуоси гиперболы: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ (9).

Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

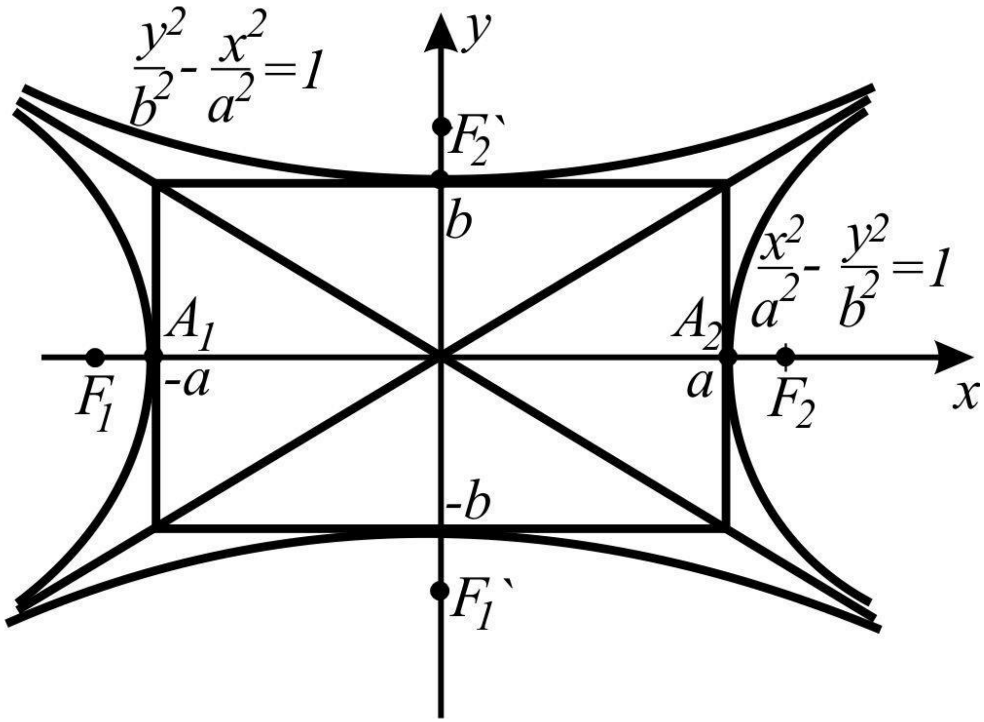
Если $a = b$, то гипербола называется *равнобочной* и ее асимптоты образуют прямой угол. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (10)$$

Определение: Две гиперболы, у которых оси совпадают и равны, но действительная ось одной из них служит мнимой осью другой, и наоборот, называются *сопряженными гиперболами*.

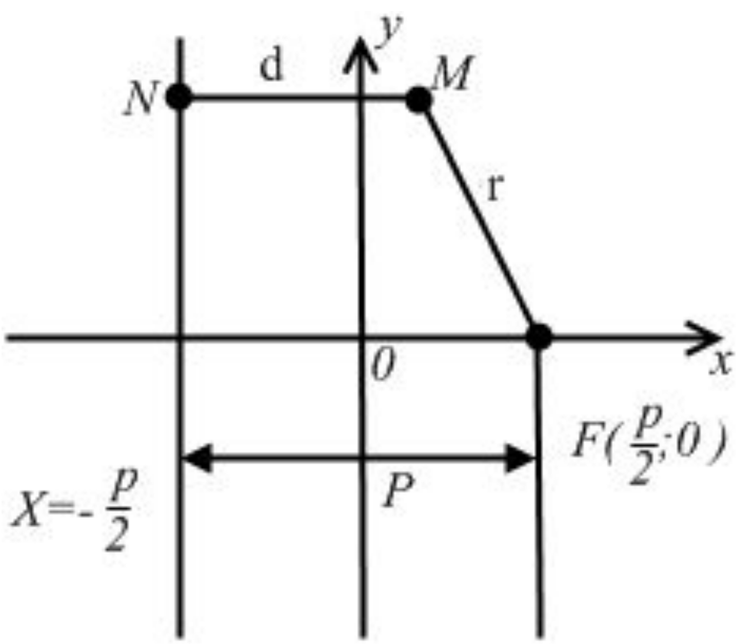
Если уравнение одной из сопряженных гипербол $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то уравнение второй $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

Асимптоты сопряженных гипербол совпадают, а сами гиперболы расположены в смежных углах между асимптотами.



Парабола

Определение: *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.



Согласно определению точка M будет лежать на параболе, когда $r = d$, где r – расстояние от точки до фокуса, d – расстояние от точки до директрисы.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

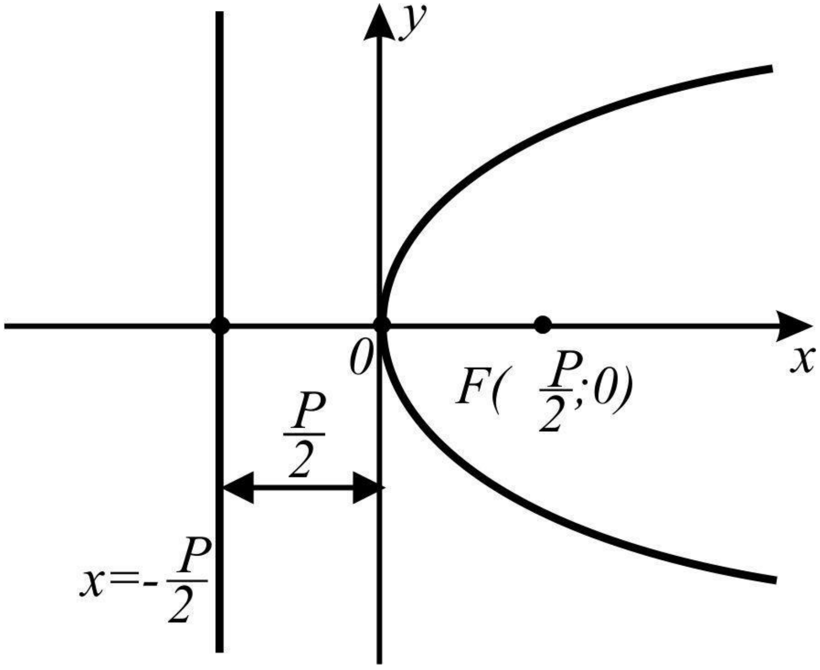
$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \qquad (1)$$

где p – параметр параболы (расстояние от фокуса до директрисы).

Параметр параболы характеризует ширину области ограниченной параболой. Чем больше p, тем шире распахнуты ветви параболы.

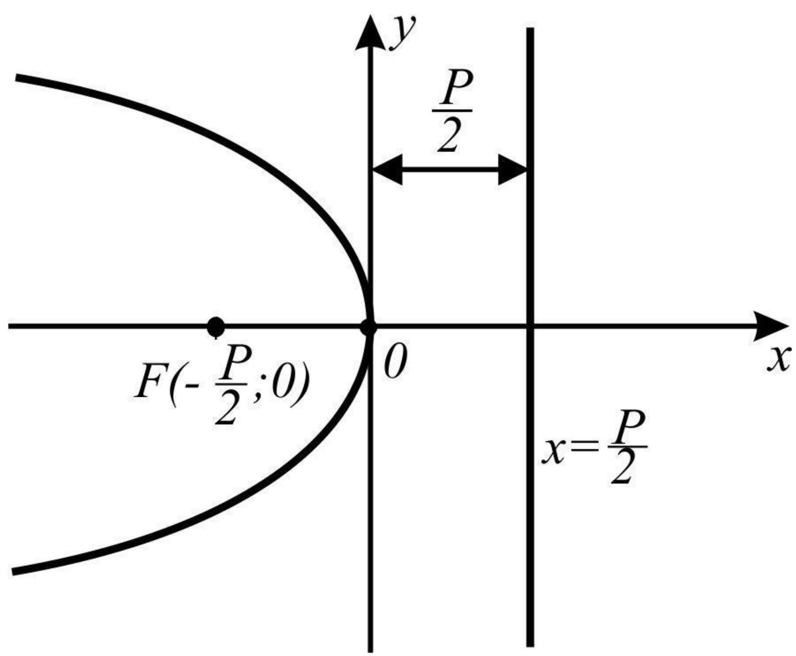
Парабола $y^2 = 2px,\ p > 0$ расположена симметрично относительно оси Ox, ветви направлены вправо.

Директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Вершина такой параболы находится в начале координат $O(0;0)$.



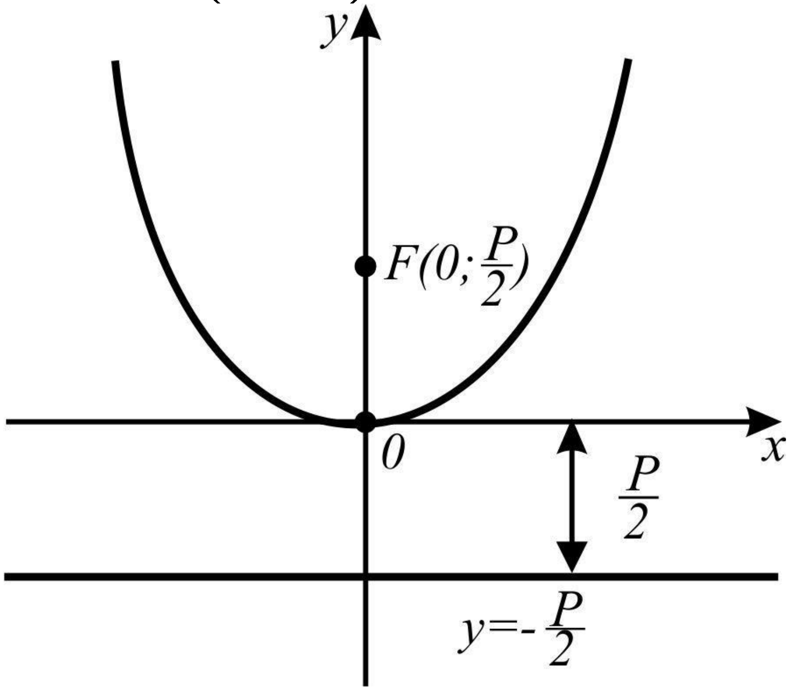
Парабола $y^2 = -2px,\ p > 0$, расположена симметрично относительно оси Ox , ветви направлены влево.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $x = \dfrac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$.



Парабола $x^2 = 2py,\ p > 0$, расположена симметрично относительно оси Oy , ветви направлены вверх.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $y = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$.



Парабола $x^2 = -2py,\ p > 0$, расположена симметрично относительно оси Oy , ветви направлены вниз.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $y = \frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$.