СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

Степени

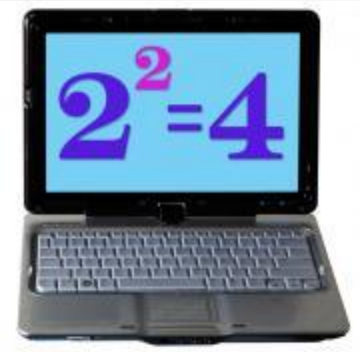
- ✍ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- ✍ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- ✍ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- ✍ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- ✍ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степень с натуральным показателем	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	
Степень с целым показателем	$a^0 1, \quad a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$; $(-1{,}2)^0 = 1$; $(\frac{2}{5})^{-3} = (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8}$.
Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа а	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ Если $m < 0$, то $a > 0$. Если $m > 0$, то $a \geq 0$.	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$; $0^{\frac{3}{5}} = 0$; $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$; $(0{,}04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не определена.

Степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней.

Свойства степеней
$a^p \cdot a^r = a^{p+r};$
$a^p : a^r = a^{p-r};$
$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r;$
$(a^p)^r = a^{p \cdot r};$
$(\frac{a}{b})^{-r} = (\frac{b}{a})^r;$
$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}.$

ОПЕРАЦИЯ НАХОЖДЕНИЯ СТЕПЕНИ НАЗЫВАЕТСЯ **ВОЗВЕДЕНИЕМ В СТЕПЕНЬ**



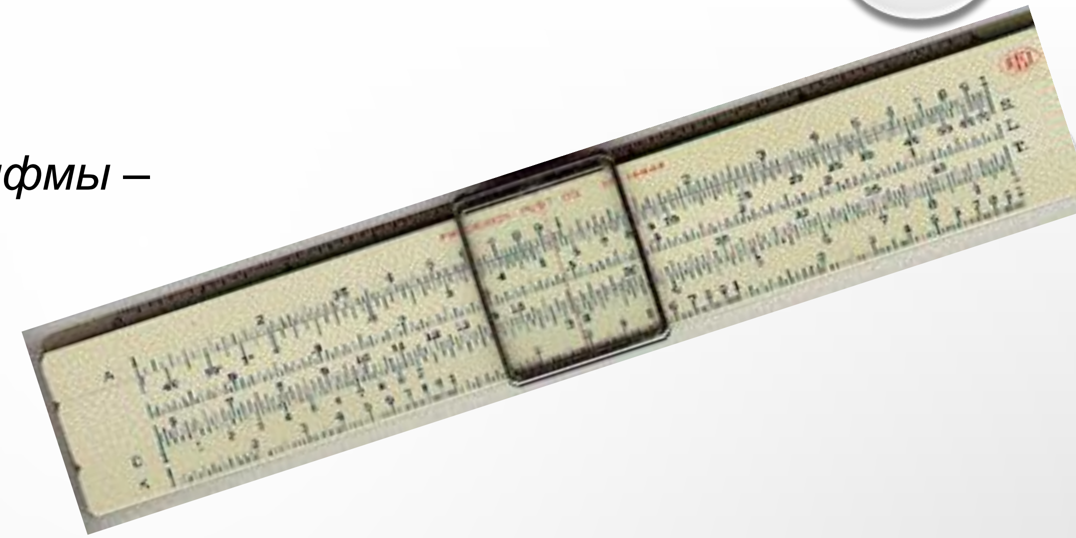
<u>Об истории развития логарифмов.</u>

Слово **логарифм** происходит от слияния двух греческих слов (*λóγος* — «слово», «отношение» и *ἀριθμός* — «число») и переводится как отношение чисел, одно из которых является членом арифметической прогрессии, а другое членом геометрической прогрессии.

В первые это понятие ввел английский математик Джон Непер, о чем сообщалось в публикации 1614 года.
Кроме того, этот человек известен тем, что он первый изобрел таблицу логарифмов, которая пользовалась большой популярностью среди ученых на протяжении долгих лет.
Первые таблицы десятичных логарифмов были составлены в 1617 г. английским математиком Бриггсом.
Изобретатели логарифмов не ограничились созданием логарифмических таблиц, уже через 9 лет после их разработки в 1623 г. английским математиком Гантером была создана первая логарифмическая линейка. Она стала рабочим инструментом для многих поколений инженеров (до 70-х годов нашего века). В настоящее время значения логарифмов находят используя компьютер.

Как не правы те друзья,
что утверждают смело: логарифмы – ерунда,
не нужны для дела.

Логарифмы – это всё:
музыка и звуки,
и без них никак нельзя
обойтись в науке!



Десятичные логарифмы до изобретения калькуляторов широко применялись для вычислений. Неравномерная шкала десятичных логарифмов обычно наносилась на логарифмические линейки. Подобная шкала широко используется в различных областях науки, например:

- Физика— интенсивность звука (децибелы).
- Астрономия — шкала яркости звёзд.
- Химия — активность водородных ионов.
- Сейсмология — шкала Рихтера.
- Теория музыки — нотная шкала, по отношению к частотам нотных звуков.
- История — логарифмическая шкала времени.

Логарифмом положительного числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

Т.е. $log_a b = c \; (a > 0, a \neq 1, b > 0)$ **тогда и только тогда, когда** $a^c = b$.

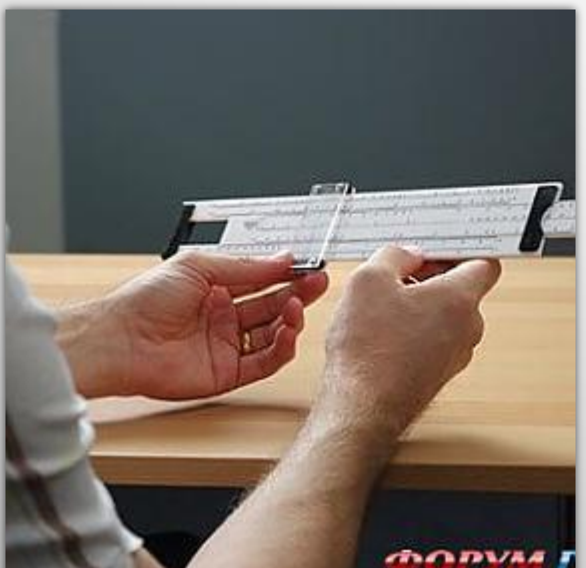
Свойства логарифмов

$log_a 1 = 0;$ $log_a a = 1;$	$log_a \frac{1}{a} = -1;$ $log_{a^m} a = \frac{1}{m};$	$log_a a^m = m;$ $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}.$

Основные соотношения	Дополнительные соотношения
Логарифм произведения: $log_c(ab) = log_c a + log_c b;$ Логарифм частного: $log_c\left(\frac{a}{b}\right) = log_c a - log_c b;$ Логарифм степени: $log_a b^m = m \cdot log_a b;$ Переход к новому основанию: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$	$log_a b = \frac{1}{log_b a};$ $log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot log_a b;$ $\frac{log_n b}{log_n c} = \frac{log_m b}{log_m c} = log_c b;$ $log_n b \cdot log_m c = log_m b \cdot log_n c;$ $a^{log_n b} = b^{log_n a}.$

ОПЕРАЦИЯ НАХОЖДЕНИЯ ЛОГАРИФМА НАЗЫВАЕТСЯ **ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ**

М



Свойства степеней и логарифмов связаны между собой:

Свойства степеней	Свойства логарифмов
$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	$log_a(c_1c_2) = log_a c_1 + log_a c_2$
$a^{b_1} : a^{b_2} = a^{b_1-b_2}$	$log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = log_a c_1 - log_a c_2$
$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$	$log_a b^r = r \cdot log_a b$
$\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} log_a c$

Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$log_{10} 1000 = 3$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$log_{0,3} 0{,}0081 = 4$

ВЫВОДЫ.

1. ОПЕРАЦИЯ ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ОБРАТНОЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВОЗВЕДЕНИЮ В СТЕПЕНЬ С СООТВЕТСТВУЮЩИМ ОСНОВАНИЕМ.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА МОЖНО СВЕСТИ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРОГО ПОКАЗАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.