9.1.17 План исследования функций

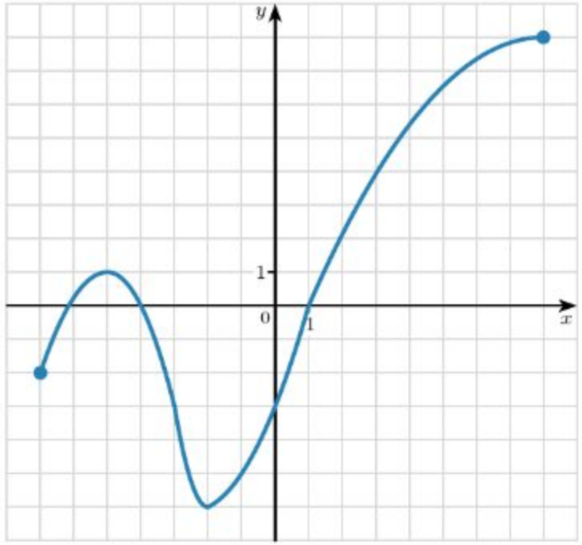
При изучении различных естественных наук мы постоянно занимаемся исследованием объектов, а именно поиском их основных характеристик и свойств. Например, в биологии для описания лягушки нам необходимо указать её вид, определить цвет, размер и другие параметры. То же самое происходит и в математике при исследовании функций: мы определяем их основные характеристики и свойства.

Давайте их перечислим:

- область определения функции;
- множество значений функции;
- чётность функции;
- точки пересечения графика с осью y;
- нули функции;
- промежутки знакопостоянства;
- промежутки возрастания и убывания;
- наибольшее и наименьшее значение;
- асимптоты.

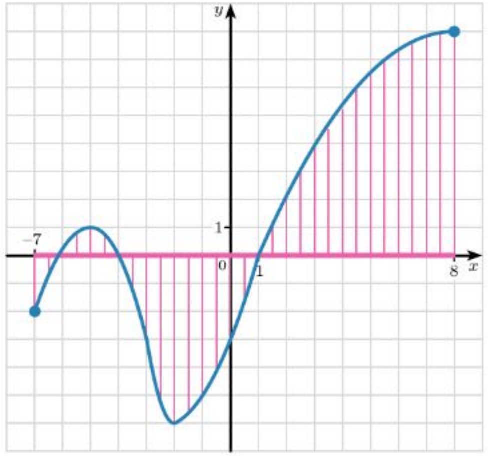
Вспомним, что *область определения функции* — это все значения, которые может принимать независимая переменная. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается $D(f)$.

Пример. Найдите по графику область определения функции.



Решение.

Мы видим, что переменная x принимает все значения от -7 включительно до 8 включительно.



Таким образом, $D(f) = [-7; 8]$.

Ответ: $[-7; 8]$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$, областью определения считают множество значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Пример. Найдите область определения функции $y = \dfrac{3x}{x-5}$.

Решение.

Выражение $\dfrac{3x}{x-5}$ не имеет смысла, когда знаменатель обращается в нуль, то есть при $x = 5$. Поэтому областью определения функции является множество чисел, не равных 5:

$$D(f) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Пример. Найдите область определения функции $y = \sqrt{7 - x}$.

Решение.

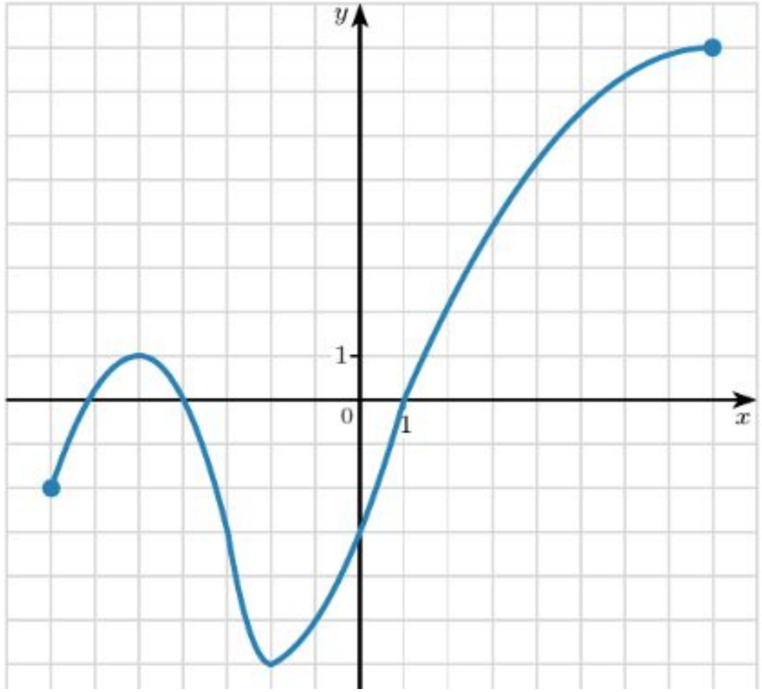
Выражение $\sqrt{7 - x}$ не имеет смысла, когда подкоренное выражение меньше нуля, то есть при $x > 7$. Поэтому областью определения функции является множество чисел, не превосходящих 7:

$$D(f) = (-\infty; 7].$$

Ответ: $(-\infty; 7]$.

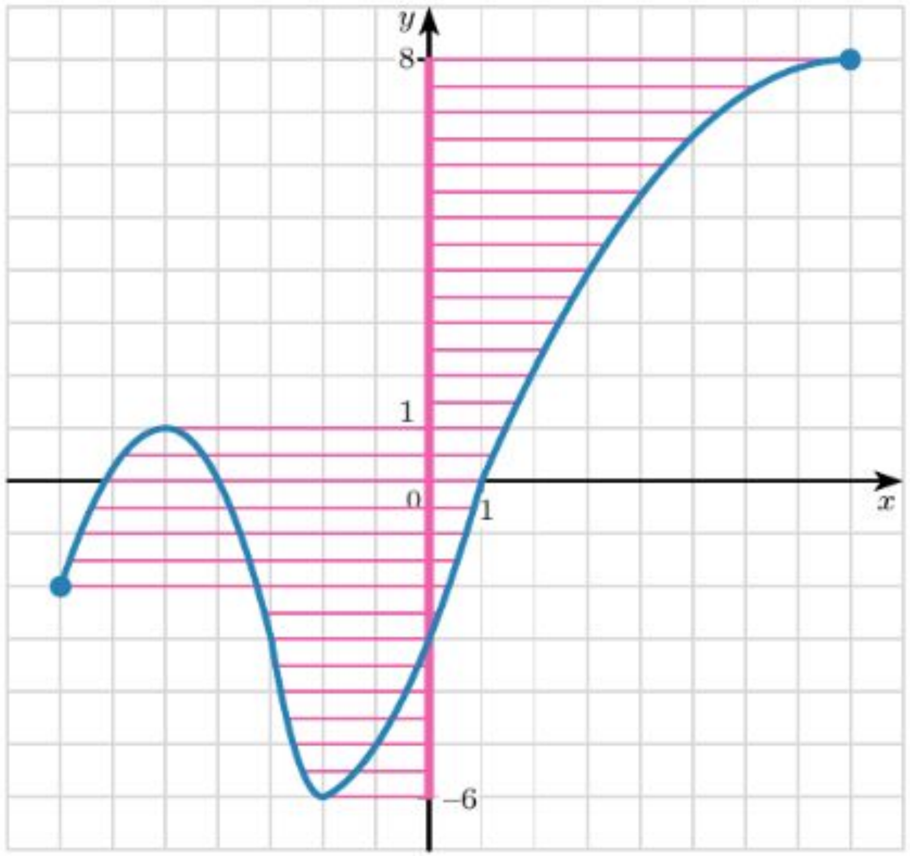
Множеством значений (или областью значений) функции является совокупность всех значений, которые может принимать функция. Множество значений функции $y = f(x)$ обозначается $E(f)$.

Пример. Найдите по графику множество значений функции.



Решение.

Мы видим, что функция принимает все значения от -6 включительно до 8 включительно.



Таким образом, $E(f) = [-6; 8]$.

Ответ: $[-6; 8]$.

Для функций, графики которых мы себе хорошо представляем, можно определять множество значений аналитически, обходясь без построений.

Пример. Найдите множество значений функции $y = x^2 - 5$.

Решение.

Мы знаем, что графиком функции $y = x^2 - 5$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а её вершина находится в точке $(0; -5)$. Поэтому множеством её значений является любое число от -5 включительно до $+\infty$, то есть $E(f) = [-5; +\infty)$.

Ответ: $[-5; +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если её график симметричен относительно оси y, то есть $f(x) = f(-x)$.

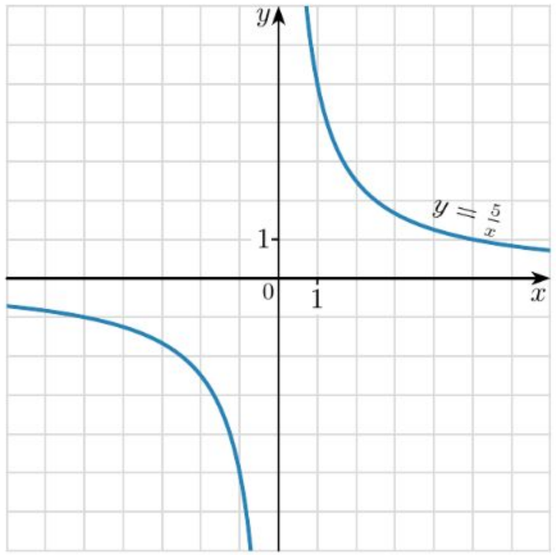
Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если её график симметричен относительно начала координат, то есть $f(-x) = -f(x)$.

Обычно чётность или нечётность функции определяют по её графику либо аналитически при подстановке $-x$ в её уравнение.

Пример. Исследуйте на чётность функцию $y = \dfrac{5}{x}$.

Решение.

Мы уже знаем, что графиком функции $y = \dfrac{5}{x}$ является гипербола, симметричная относительно начала координат. Поэтому сразу можем сказать, что функция является нечётной.



Покажем это аналитически. Подставим $-x$ в уравнение функции. Получим

$$f(-x) = \frac{5}{-x} = -\frac{5}{x} = -f(x).$$

Ответ: функция нечётная.

Пример. Исследуйте на чётность функцию $y = x^6 + x^2 - 7$.

Решение.

С ходу не так просто понять, как выглядит график этой функции, поэтому исследуем функцию аналитически.

Подставим $-x$ в уравнение функции. Получим

$$f(-x) = (-x)^6 + (-x)^2 - 7 = x^6 + x^2 - 7 = f(x).$$

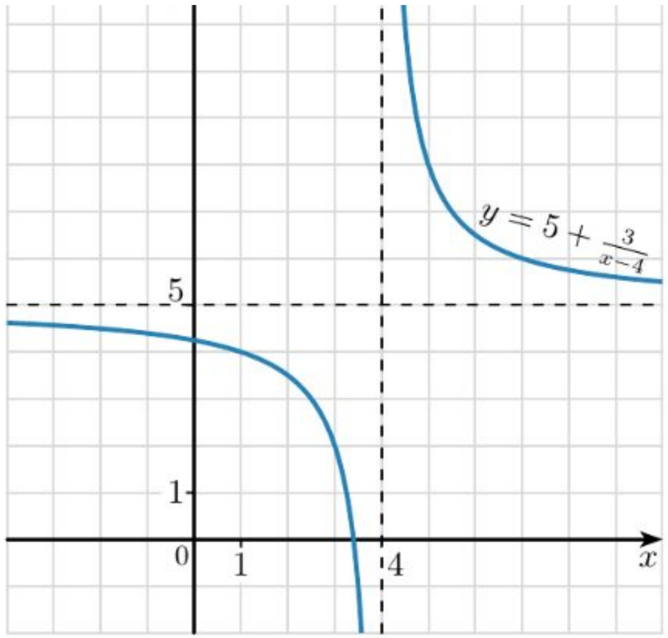
Таким образом, можно сделать вывод, что функция является чётной.

Ответ: функция чётная.

Пример. Исследуйте на чётность функцию $y = 5 + \dfrac{3}{x-4}$.

Решение.

Графиком функции является гипербола, центрально симметричная относительно точки $(4; 5)$, но не симметричная ни относительно оси y, ни относительно начала координат.



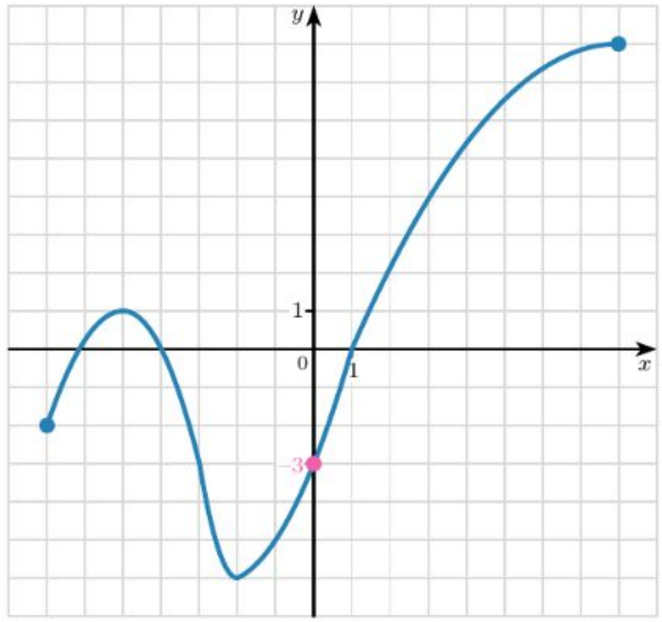
Такая функция не является ни чётной, ни нечётной.

Ответ: функция не является ни чётной, ни нечётной.

Давайте вспомним, как найти координаты точки пересечения графика функции с осью y.

Для этого нужно найти значение функции при $x = 0$. Тогда координаты этой точки имеют вид $(0; f(0))$ при условии, что функция определена в нуле.

Пример. Найдите по графику координаты его точки пересечения с осью y.



Решение.

При $x = 0$ значение функции равно -3. Поэтому точка пересечения графика функции с осью y имеет координаты $(0; -3)$.

Пример. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = 5 + \dfrac{x+1}{x+3}$ с осью y.

Решение.

Для решения мы не будем строить график функции, а подставим $x = 0$ в её уравнение. Получим

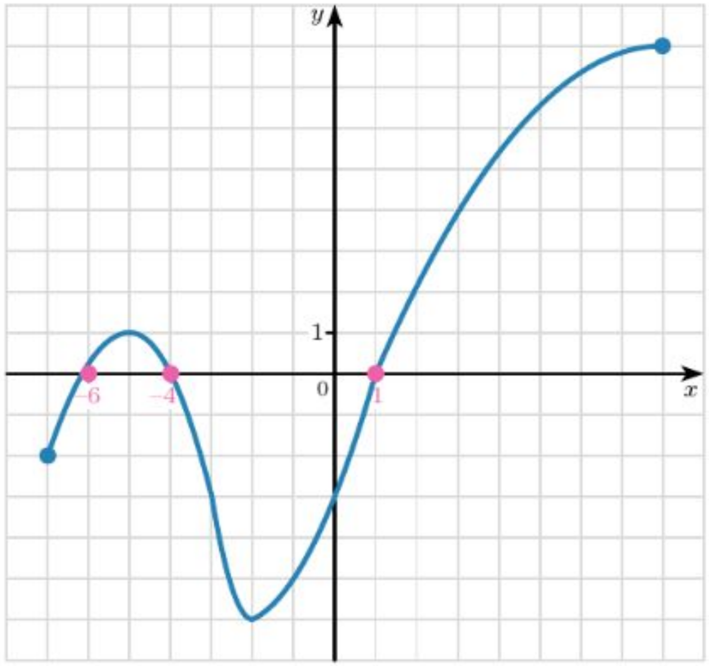
$$y(0) = 5 + \frac{0+1}{0+3} = 5 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Таким образом, точка пересечения графика функции с осью y имеет координаты $\left(0; 5\dfrac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\left(0; 5\dfrac{1}{3}\right)$.

Нулями функции $f(x)$ называются те значения переменной, при которых значение функции равно нулю. Чтобы найти нули функции $f(x)$, нужно аналитически или графически решить уравнение $f(x) = 0$.

Пример. Найдите нули функции по её графику.



Решение.

График функции пересекает ось x в трёх точках: $x_1 = -6$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$.

Ответ: $-6; -4; 1$.