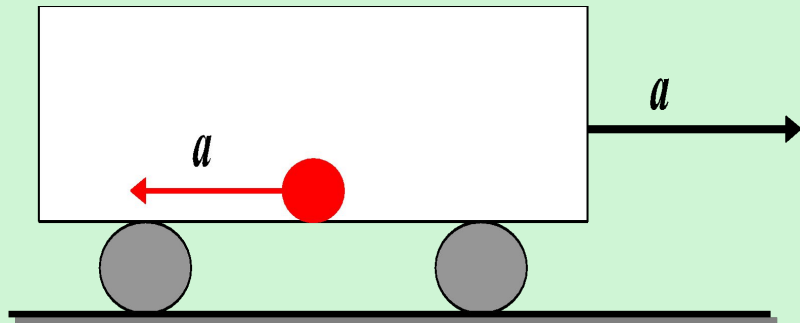


*Понятие о  
неинерциальных системах отсчета*

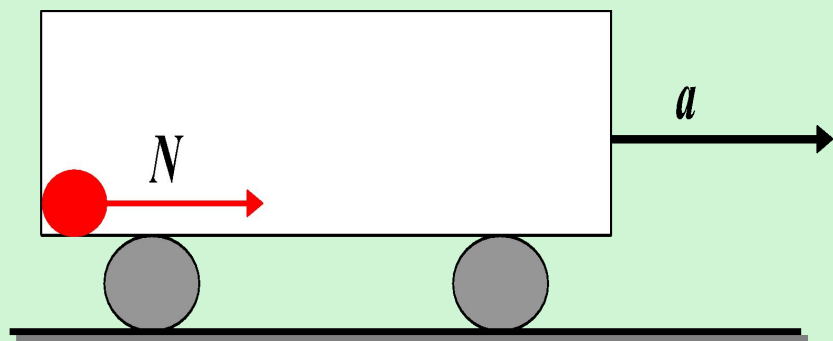
# Неинерциальные СО

**Неинерциальные СО** – системы отсчёта, движущиеся относительно инерциальных систем отсчета с ускорением.

- Геоцентрическая система отсчета (жёстко связанная с Землёй) в общем случае является неинерциальной вследствие суточного вращения Земли.
- Максимальное ускорение точек Земли не превосходит  $0,5 \%g$ . Следовательно, в большинстве практических задач геоцентрическую СО считают инерциальной.

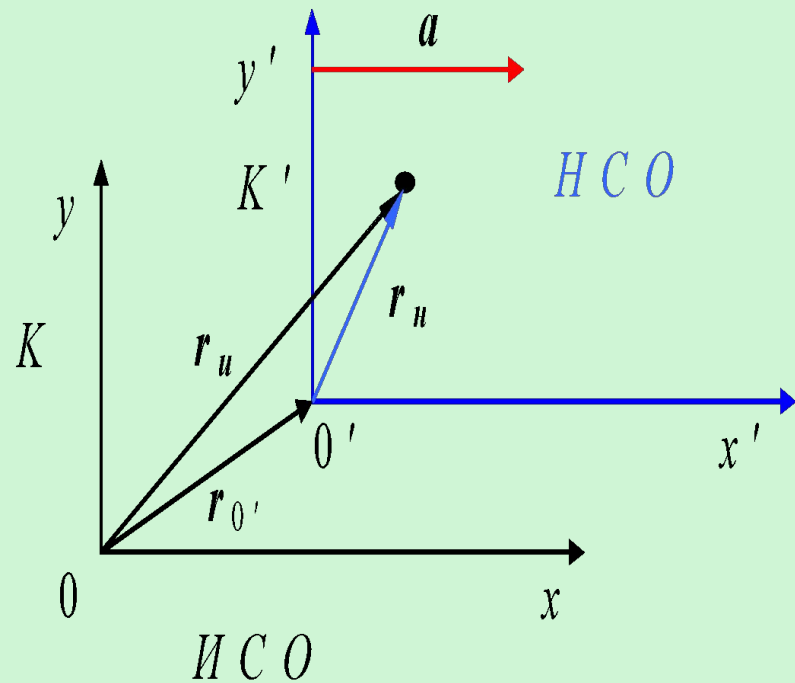


Поезд двинулся с ускорением  $a$ , шарик приобрёл ускорение  $a$ . В неинерциальных СО *первый закон Ньютона* нарушается: тело получает ускорение без взаимодействия с другими телами.



Поезд движется с ускорением, шарик у стенки, на него действует сила реакции опоры  $N$ , но шарик находится в покое. В неинерциальных СО *второй закон Ньютона* нарушается: при наличии взаимодействия тело не получает ускорение.

# Принцип Даламбера



В момент  $t = 0$  системы  $K$  и  $K'$  совпадают.

Система  $K'$  начинает двигаться относительно  $K$  с ускорением  $a$ .

В момент  $t$ :

$$\overset{\square}{v}_{0'} = \overset{\square}{a}t; \quad \overset{\square}{r}_u = \overset{\square}{r}_{0'} + \overset{\square}{r}_n, \quad (1)$$

$r_u$  – радиус-вектор материальной точки в системе  $K$ ,

$r_n$  – радиус-вектор материальной точки в системе  $K'$ ,

$r_{0'}$  – радиус-вектор начало координат системы  $K'$  в системе  $K$ .

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\frac{dr_u^{\square}}{dt} = \frac{dr_{0'}^{\square}}{dt} + \frac{dr_H^{\square}}{dt}, (2) \quad dt = dt'$$

$$v_u^{\square} = v_{0'}^{\square} + v_H^{\square}. (3)$$

$$\frac{dv_u^{\square}}{dt} = \frac{dv_{0'}^{\square}}{dt} + \frac{dv_H^{\square}}{dt}, (4) \quad v_{0'}^{\square} = at \Rightarrow$$

$$a_u^{\square} = a^{\square} + a_H^{\square}, (5) \Rightarrow a_H^{\square} = a_u^{\square} - a^{\square}, (6)$$

$a_H^{\square}$  – ускорение материальной точки относительно НСО,

$a_u^{\square}$  – ускорение материальной точки относительно ИСО,

$a$  – ускорение НСО относительно ИСО.

$$m\overset{\square}{a}_H = m\overset{\square}{a}_u - m\overset{\square}{a}, (7)$$

$m\overset{\square}{a}_u = \overset{\square}{R}$  – векторная сумма сил взаимодействия,

–  $m\overset{\square}{a} = \overset{\square}{J}$  – сила инерции.

$m\overset{\square}{a}_H = \overset{\square}{R} + \overset{\square}{J} (7)$  – принцип Даламбера.

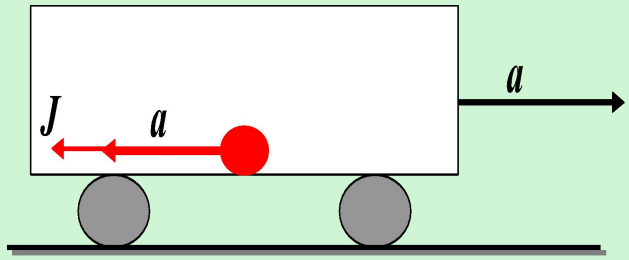
**Произведение массы тела на его ускорение относительно НСО равно векторной сумме сил взаимодействия сложенной с силой инерции.**

# Сила инерции

**Сила инерции** – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена взаимодействием с другими телами, а вызвана ускоренным движением НСО относительно ИСО.

Т.к. сила инерции обусловлена ускоренным движением системы отсчёта относительно другой СО, то она не подчиняется *третьему закону Ньютона*.

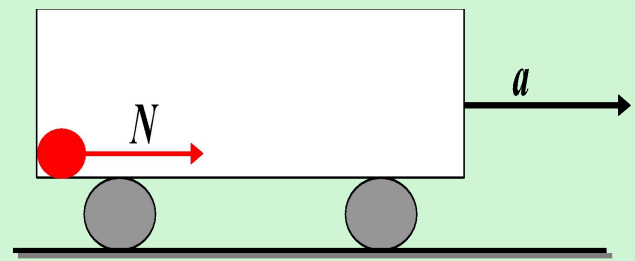




$$\vec{a}_u = \vec{a}_H + \vec{a}, \quad m\vec{a}_u = m\vec{a}_H + m\vec{a} \Rightarrow$$

$$m\vec{a}_H = m\vec{a}_u - m\vec{a}.$$

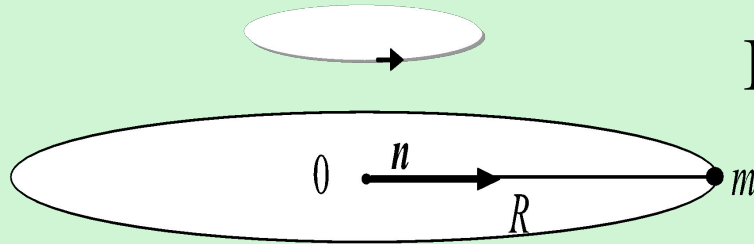
$$\frac{J}{m} = -a.$$



$$|\vec{J}| = |\vec{N}|, \quad \vec{J} = -m\vec{a}.$$

$$m\vec{a}_H = R + J.$$

# Сила инерции во вращающихся системах отсчёта



Центробежная сила инерции во вращающихся СО зависит от местоположения тела в СО.

$n$  – единичный орт.

$$m \overset{\boxtimes}{a}_n = m \overset{\boxtimes}{a}_u \overset{\boxtimes}{J} m \overset{\boxtimes}{a}, \quad \overset{\boxtimes}{J} = -m (\overset{\boxtimes}{a}_u - \overset{\boxtimes}{a}_n). \quad (1)$$

Тело  $m$  покоится относительно диска (НСО),  
т.е. вращается вместе с диском

$$\left. \begin{aligned} \overset{\boxtimes}{a}_n &= 0, \quad (2) \\ \overset{\boxtimes}{a}_u &= -\omega^2 R n. \quad (3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \overset{\boxtimes}{J} &= m \omega^2 R n, \quad \overset{\boxtimes}{R} = R \cdot n \Rightarrow \\ \overset{\boxtimes}{J}_{ц.б} &= m \omega^2 R. \quad (4) \end{aligned}$$

*центробежная сила инерции.*

## Свойства центробежной силы:

- 1) величина центробежной силы инерции ( $F_{ц.б}$ ) зависит от положения тела во вращающейся СО,
- 2) величина  $F_{ц.б}$  не зависит от скорости тела относительно вращающейся СО,
- 3)  $F_{ц.б}$  является консервативной.

$$dA = \overset{\sphericalangle}{F}_{\text{ц.б}} \overset{\sphericalangle}{dR}; \quad dA = m\omega^2 \overset{\sphericalangle}{R} \cdot \overset{\sphericalangle}{dR}.$$

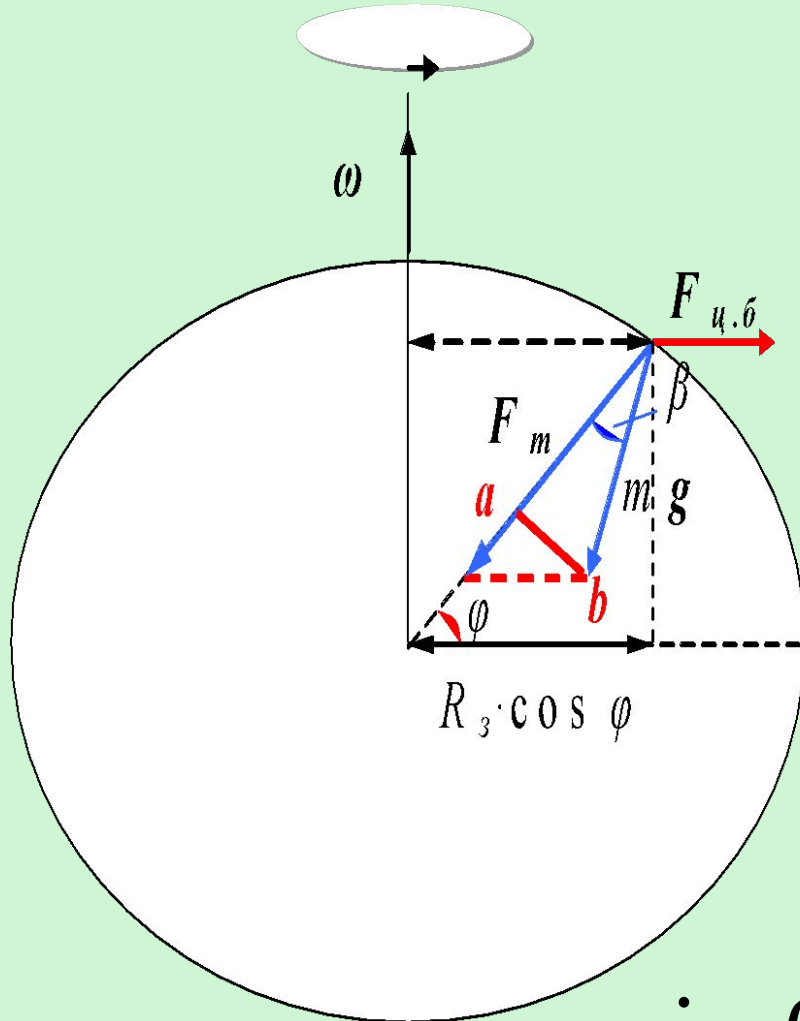
$$\overset{\sphericalangle}{R} \cdot \overset{\sphericalangle}{dR} = \frac{\overset{\sphericalangle}{dR^2}}{2}, \quad \overset{\sphericalangle}{R^2} = \overset{\sphericalangle}{R} \cdot \overset{\sphericalangle}{R} \cos \angle R, \quad \overset{\sphericalangle}{R} = R^2, \quad \frac{\overset{\sphericalangle}{dR^2}}{2} = R \cdot dR. \quad \left. \vphantom{\frac{\overset{\sphericalangle}{dR^2}}{2}} \right\}$$

$$dA = m\omega^2 R \cdot dR.$$

$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} m\omega^2 R \cdot dR = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{m\omega^2 (R_2^2 - R_1^2)}{2},$$

**т.е. не зависит от формы пути.**

Из-за  $F_{ц.б}$  направления  $F_{тяжести}$  и  $F_{тягиения}$   
не совпадают.



$$|ab| = mg \sin \beta,$$

$$|ab| = F_{ц.б} \sin \varphi =$$

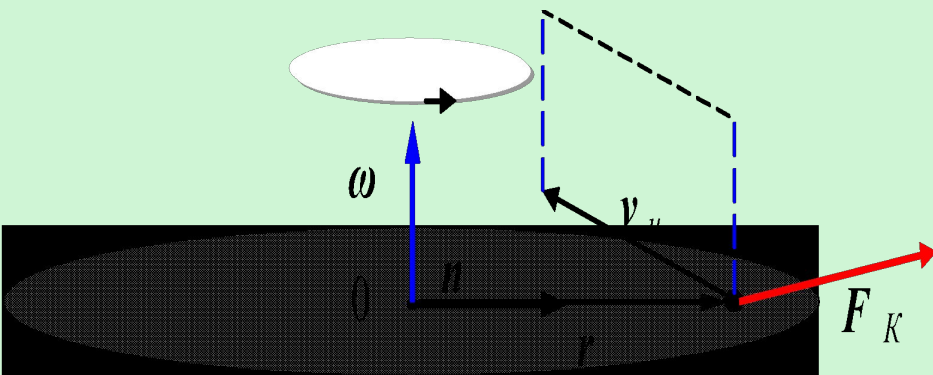
$$= m \omega^2 R_3 \cos \varphi \sin \varphi.$$

$$\sin \beta = \frac{\omega^2 R_3 \cos \varphi \sin \varphi}{g} =$$

$$= \frac{\omega^2 R_3 \sin 2\varphi}{2g}.$$

$$\sin \beta = 0,0018 \sin 2\varphi.$$

# Сила Кариолиса



$\mathbf{v}_H$  – скорость движения материальной точки относительно вращающейся СО – НСО, направление  $\mathbf{v}_H$  произвольное.

На эту точку действует сила, обусловленная инерцией

$$|F_K| \sim v_H \cdot \omega \sin \angle \overbrace{v_H}^{\perp} \overbrace{\omega}^{\perp} = v_H \cdot \omega.$$

$90^\circ$

## Скорость точки относительно ИСО:

$$\vec{v}_u = \vec{v}_H + \vec{v} = \vec{v}_H + [\vec{\omega}, \vec{r}].(1)$$

$$\vec{J} = -m(\vec{a}_u - \vec{a}_H).(2)$$

Пусть  $\vec{v}_H \uparrow \uparrow \vec{v}$ .

$$\vec{a}_u = -\frac{v_u^2}{r} \vec{n} = -\frac{v_u^2}{r} \vec{n} = -\frac{(v_H + \omega r)^2}{r} \vec{n}.(3)$$

$$\vec{a}_H = -\frac{v_H^2}{r} \vec{n} = -\frac{v_H^2}{r} \vec{n}.(4)$$

$$\vec{J} = m \left( \frac{v_H^2}{r} + 2 \frac{v_H \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} - \frac{v_H^2}{r} \right) \vec{n} = m(2v_H \omega + \omega^2 r) \vec{n}.$$

$$\overset{\boxtimes}{J} = m \left( \frac{v_H^2}{r} + 2 \frac{v_H \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} - \frac{v_H^2}{r} \right) \overset{\boxtimes}{n} = m (2v_H \omega + \omega^2 r) \overset{\boxtimes}{n}.$$

$$\overset{\boxtimes}{F}_{ц.б} = m \omega^2 r \overset{\boxtimes}{n}.$$

$$\overset{\boxtimes}{F}_K = m 2v_H \omega \overset{\boxtimes}{n}.$$

• В общем случае  $\overset{\boxtimes}{F}_K = 2m [\overset{\boxtimes}{v}_H \cdot \overset{\boxtimes}{\omega}].$

Если материальная точка движется во вращающейся СО со скоростью  $v_H$ , то на материальную точку действует сила

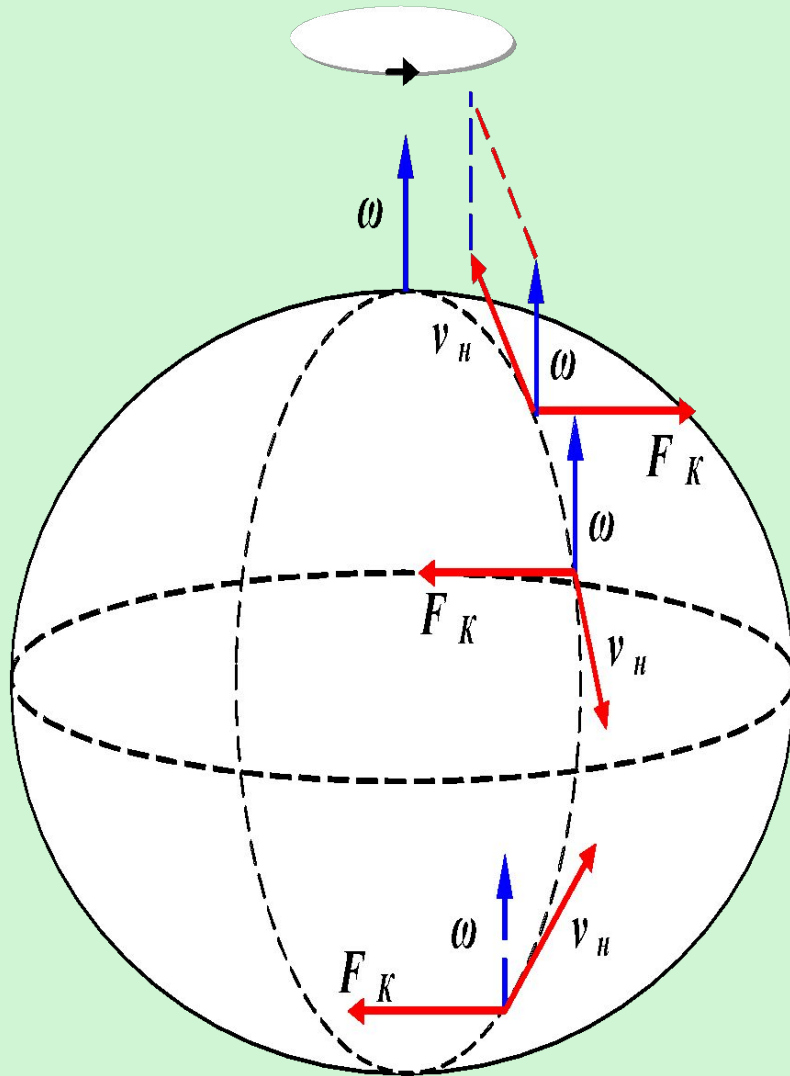
Кориолиса  $\overset{\boxtimes}{F}_K = 2m [\overset{\boxtimes}{v}_H \cdot \overset{\boxtimes}{\omega}].$



## Свойства силы Кариолиса:

- 1) величина  $F_K$  не зависит от положения материальной точки во вращающейся СО,
- 2) величина  $F_K$  зависит от скорости  $v_H$ ,
- 3)  $\vec{F}_K \perp \vec{v}_H \Rightarrow$  работы не совершает. Эта сила называется *гироскопической*.

# Закон Бэра



## *В северном полушарии*

Если тело движется на север -  $F_K$  на восток,  
если тело движется на юг -  $F_K$  на запад.

Следовательно, правый берег рек подмывается сильнее;  
правые рельсы железных дорог по движению изнашиваются сильнее.

## *В южном полушарии*

$F_K$  направлена влево по отношению к направлению движения  $v_n$ .

# Гравитационное поле

Фундаментальные взаимодействия: электронное, гравитационное, сильное, слабое.

Гравитационное взаимодействие *универсальное*, т. е. возникает между любыми двумя материальными точками.

***Закон всемирного тяготения:*** между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \vec{r},$$

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} - \text{гравитац. пост.}$$

Первая формулировка дана Ньютоном в 1687 г. в труде «Математические начала натуральной философии».

**Гравитационная масса** – мера способности тел притягивать и притягиваться к другим телам.

Величину  $\gamma$  оценил Ньютон. Более точно в 1797 г. определил Кавендиш с помощью крутильного маятника.

## Напряженность поля тяготения

Это векторная величина, численно равная силе, действующей на единицу массы, помещенную в данную точку поля и направленная вдоль действия силы (или совпадает с силой тяготения).

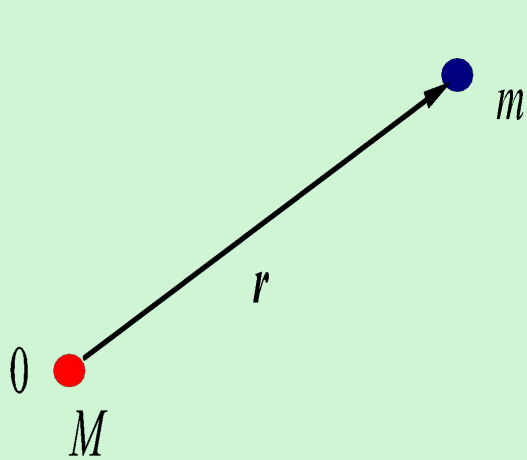
$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r}.$$

## Принцип суперпозиции

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_n.$$

Если гравитационное поле создано системой материальных точек (гравитационных масс), то результирующая напряженность поля равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждой материальной точкой.

# Работа в гравитационном поле



$$dA = F dr; \quad dA = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^3} r dr,$$

$$r dr = \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr. \Rightarrow$$

$$dA = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^3} r dr = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} dr.$$

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} dr = \gamma \frac{m \cdot M}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma m M \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). (1) \Rightarrow$$

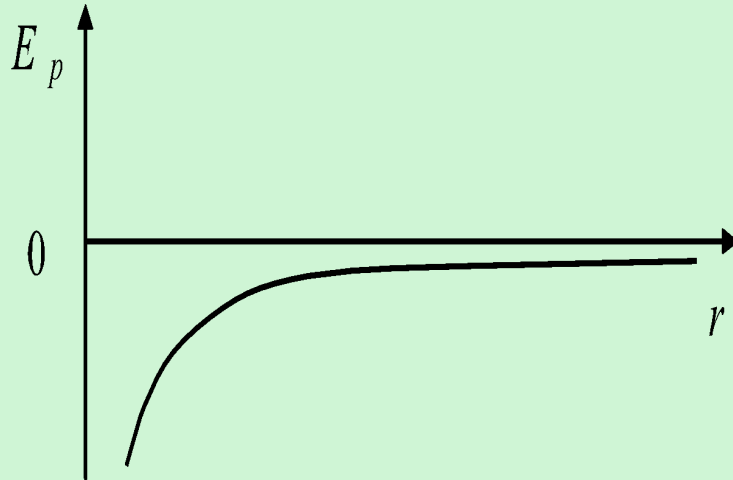
**Гравитационные силы консервативные.**

## *Потенциальная энергия в поле тяготения.*

$$dA = -dE_p.$$
$$A_{12} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = E_{p1} - E_{p2}. \quad (2)$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), запишем

$$E_{p1} = -\gamma \frac{mM}{r_1}, \quad E_{p2} = -\gamma \frac{mM}{r_2}.$$





## Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -\gamma \frac{M}{r}; \quad M - \text{точечная масса.}$$

Потенциал поля тяготения в данной точке равен потенциальной энергии тела единичной массы, помещенного в данную точку поля.

Принцип суперпозиции:  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$ .

Если гравитационное поле создано системой точечных масс, то потенциал результирующего поля в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждой из точечных масс по отдельности.

# Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек, потенциал которых одинаков, называется *эквипотенциальной поверхностью* или *поверхностью равного потенциала*.

Для точечных масс – сфера.

Связь напряженности и потенциала поля тяготения:

$$\vec{G} = -grad\varphi.$$

# «Взвешивание» (определение массы) Солнца, Земли, планет

$$F_{\text{тяготения}} = F_{\text{ц.б.}}$$

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = ma_{\text{ц.б.}}, \quad a_{\text{ц.б.}} = \frac{v^2}{R} = \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 \frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

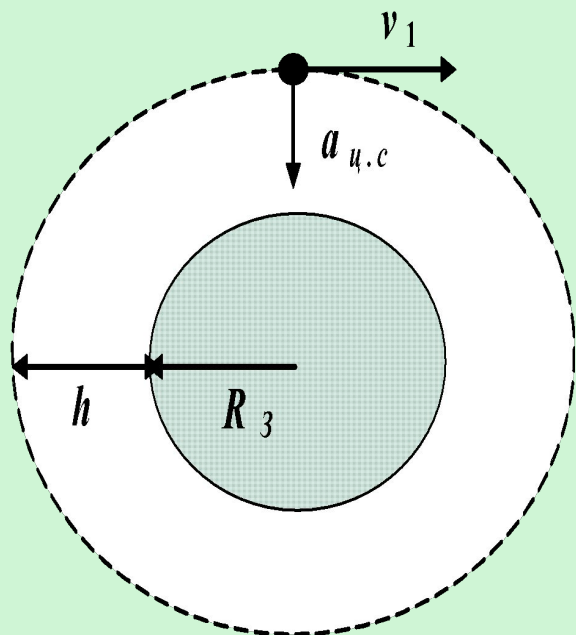
$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2},$$

$M$  – масса Солнца,

$R$  – расстояние между Землёй и Солнцем,

$T$  – период обращения Земли вокруг Солнца.

# Космические скорости



**Первая** космическая скорость (круговая) – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите. Становится искусственным спутником Земли. Движение финитное.

$$\overset{\sphericalangle}{F}_m = m \overset{\boxtimes}{a}_{ц.с}. (1)$$

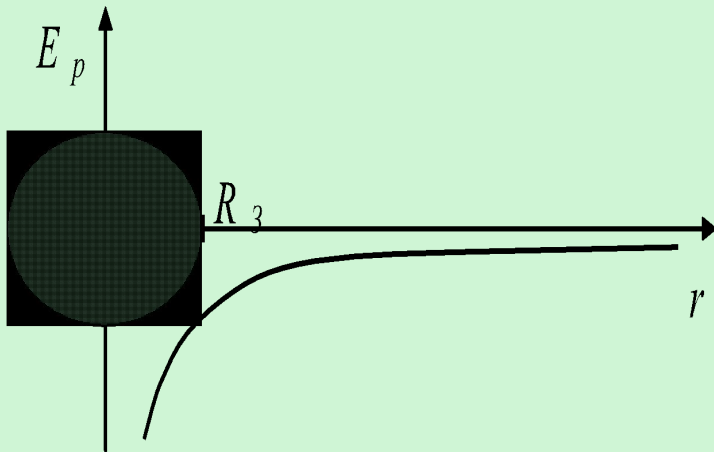
$$\gamma \frac{mM}{(R_3 + h)^2} = \frac{mv_1^2}{R_3 + h}; \quad h \ll R_3 \Rightarrow$$

$$\gamma \frac{M}{R_3} = v_1^2, (2)$$

$$\overset{\boxtimes}{F}_m = gm = \gamma \frac{mM}{R_3^2}.$$

$$(2) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{\cancel{R_3} R_3^2} \cdot R_3} = \sqrt{g R_3} = 7,9 \frac{\text{KM}}{c}.$$

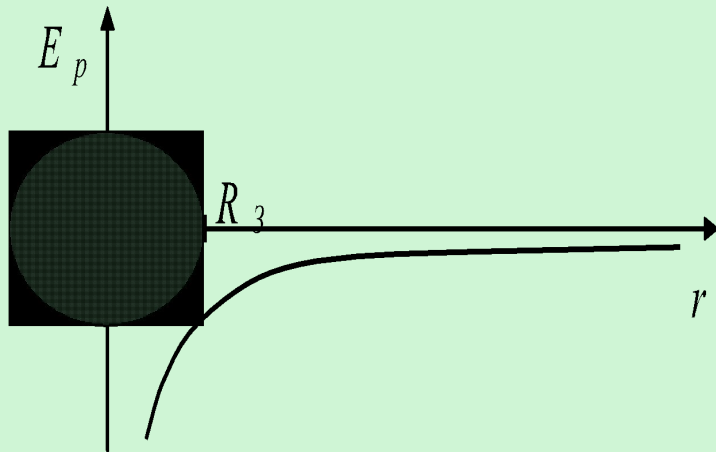
**Вторая** космическая скорость (параболическая) – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и стать искусственным спутником Солнца, т.е. его орбита в поле тяготения Солнца будет параболической.



Потенциальная энергия на большом расстоянии от Земли стремится к 0.

Кинетическая энергия должна быть равна работе ( $\Delta E_p$ ), совершаемой против сил тяготения.

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{mM_3}{R_3} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\gamma \frac{M_3}{R_3^2} \cdot R_3} = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \frac{\text{KM}}{\text{c}}$$



**Третья** космическая скорость – скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно преодолело притяжение Солнца и покинуло пределы Солнечной системы.

$$v_3 = 16,7 \text{ км/с.}$$



# Законы Кеплера.

## Законы движения планет

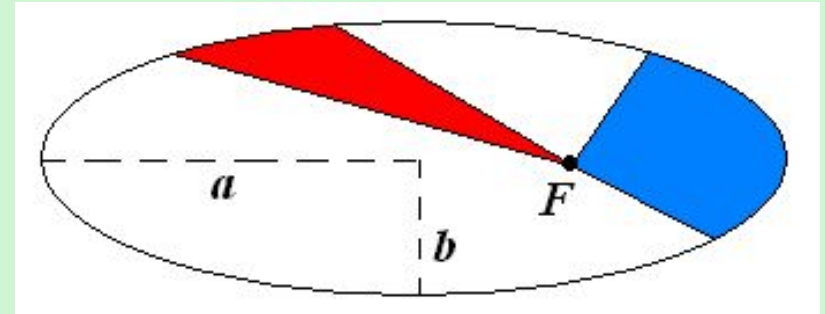
Описывают движение тел в центральном поле, каковым является поле тяготения.

Кеплер (1571 – 1630 гг.) уточнил результаты наблюдений датского астронома Браге (1546 – 1601 гг.)

1. Планеты Солнечной системы вращаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор планет за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Для круговых орбит  $a = R$ .

Законы Кеплера являются следствием законов Ньютона.

Например, третий закон Кеплера. Для частного случая движения планет по круговой орбите.

Для планеты 1: масса Солнца  $M = \frac{4\pi^2 R_1^3}{\gamma T_1^2}$ .

Для планеты 2: масса Солнца  $M = \frac{4\pi^2 R_2^3}{\gamma T_2^2}$ .

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

# Чёрные дыры

**Чёрные дыры** – космические объекты, поглощающие все частицы, в том числе фотоны, проходящие через их поверхность.

Если фотон поглощается, то его кинетическая энергия меньше (равна) его потенциальной энергии в поле чёрной дыры. Следовательно,

$$\frac{mc^2}{\gamma} \leq \gamma \frac{mM}{r}, \quad \begin{array}{l} M - \text{масса чёрной дыры,} \\ r - \text{радиус чёрной дыры.} \end{array}$$

$E_{\text{к фотона}}$

Если  $r \leq \gamma \frac{2M}{c^2}$ ,

то свет не может покинуть данный классический объект.

Т.к. чёрные дыры поглощают всё и почти ничего не испускают, то о существовании чёрных дыр можно судить по косвенным данным — поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения.