Сегодня: пятница, 7 октября 2022 г.

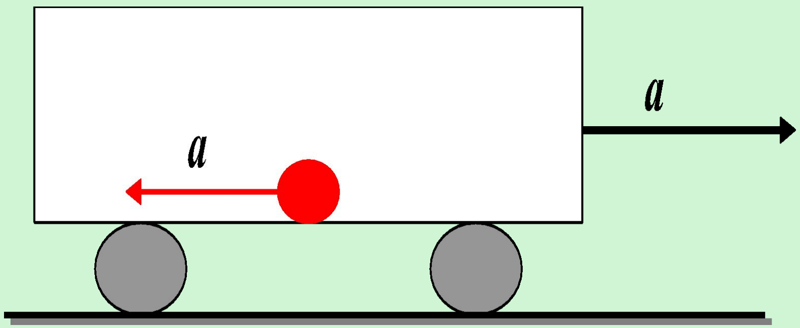
Лекция 6

Понятие о неинерциальных системах отсчета

Неинерциальные СО

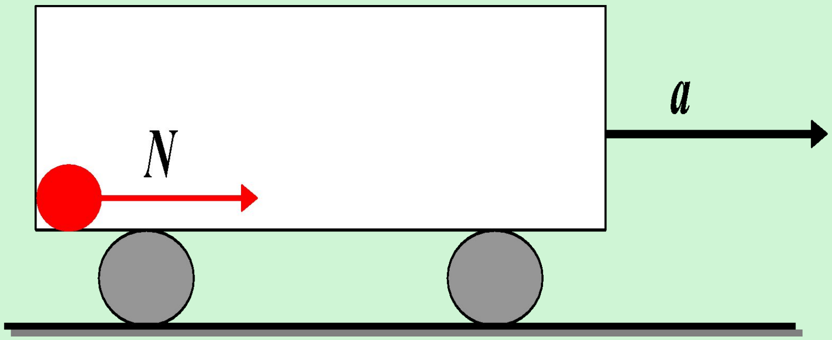
Неинерциальные СО – системы отсчёта, движущиеся относительно инерциальных систем отсчета с ускорением.

- Геоцентрическая система отсчета (жёстко связанная с Землёй) в общем случае является неинерциальной вследствие суточного вращения Земли.
- Максимальное ускорение точек Земли не превосходит 0,5 %g. Следовательно, в большинстве практических задач геоцентрическую СО считают инерциальной.



Поезд двинулся с ускорением a, шарик приобрёл ускорение a.

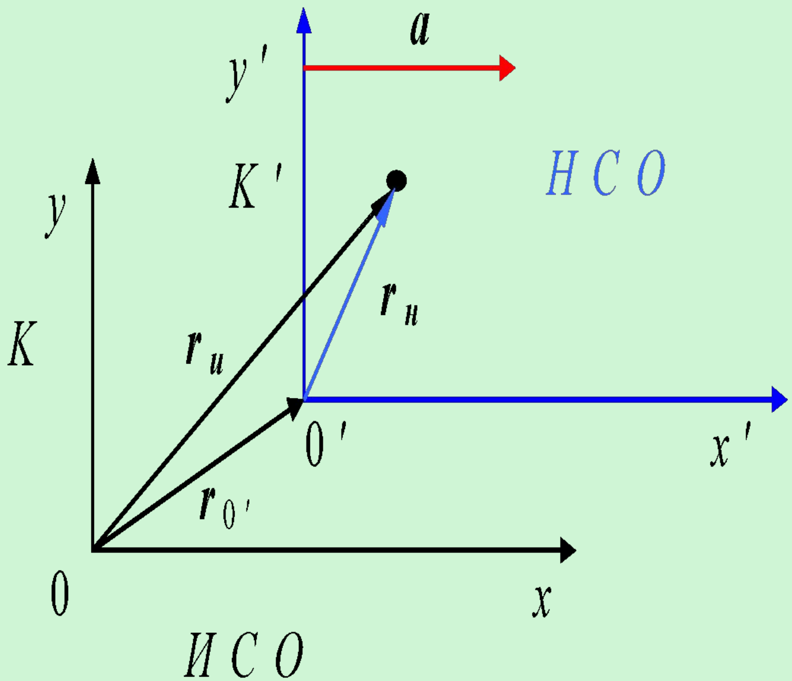
В неинерциальных СО ***первый закон Ньютона*** нарушается: тело получает ускорение без взаимодействия с другими телами.



Поезд движется с ускорением, шарик у стенки, на него действует сила реакции опоры ***N***, но шарик находится в покое.

В неинерциальных СО ***второй закон Ньютона*** нарушается: при наличии взаимодействия тело не получает ускорение.

Принцип Даламбера



В момент $t = 0$ системы K и K' совпадают.

Система K' начинает двигаться относительно K с ускорением $\boldsymbol{a}$.

В момент t:

$$\vec{v}_{0'} = \vec{a}t; \quad \vec{r}_и = \vec{r}_{0'} + \vec{r}_н, (1)$$

$r_и$ – радиус-вектор материальной точки в системе K,

$r_н$ – радиус-вектор материальной точки в системе K',

$r_{0'}$ – радиус-вектор начало координат системы K' в системе K.

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\frac{d\vec{r}_и}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_н}{dt}, (2) \quad dt = dt'.$$

$$\vec{v}_и = \vec{v}_{0'} + \vec{v}_н. (3)$$

$$\frac{d\vec{v}_и}{dt} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_н}{dt}, (4) \quad \vec{v}_{0'} = \vec{a}t \Rightarrow$$

$$\vec{a}_и = \vec{a} + \vec{a}_н, (5) \Rightarrow \vec{a}_н = \vec{a}_и - \vec{a}, (6)$$

$a_н$ – ускорение материальной точки относительно НСО,

$a_и$ – ускорение материальной точки относительно ИСО,

a – ускорение НСО относительно ИСО.

$$m\vec{a}_{н} = m\vec{a}_{и} - m\vec{a}, (7)$$

$m\vec{a}_{и} = \vec{R}$ – векторная сумма сил взаимодействия,

$-m\vec{a} = \vec{J}$ – сила инерции.

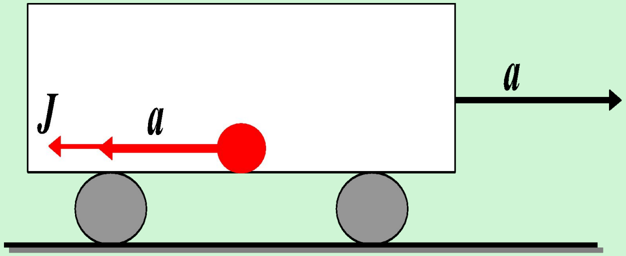
$$m\vec{a}_{н} = \vec{R} + \vec{J} (7) - \text{принцип Даламбера.}$$

Произведение массы тела на его ускорение относительно НСО равно векторной сумме сил взаимодействия сложенной с силой инерции.

Сила инерции

Сила инерции – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена взаимодействием с другими телами, а вызвана ускоренным движением НСО относительно ИСО.

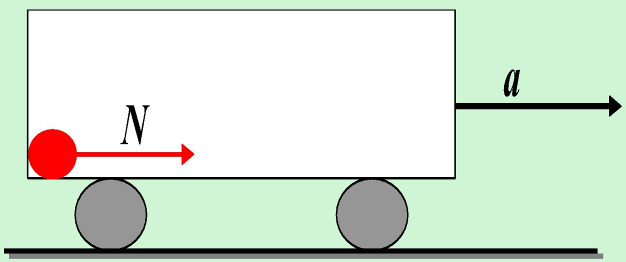
Т.к. сила инерции обусловлена ускоренным движением системы отсчёта относительно другой СО, то она не подчиняется ***третьему закону Ньютона***.



$$\vec a_и = \vec a_н + \vec a, \quad m\vec a_и = m\vec a_н + m\vec a \Rightarrow$$

$$m\vec a_н = \underbrace{m\vec a_и}_{R} + \underbrace{(-m\vec a)}_{J}.$$

$$\frac{\vec J}{m} = -\vec a.$$

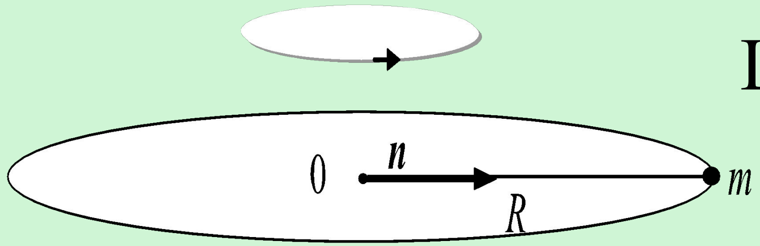


$$\left|\vec J\right| = \left|\vec N\right|, \quad \vec J = -m\vec a.$$

$$m\vec a_н = \vec R + \vec J.$$

Сила инерции

во вращающихся системах отсчёта



Центробежная сила инерции во вращающихся СО зависит от местоположения тела в СО.

n **– единичный орт.**

$$m\vec{a}_{н} = m\vec{a}_{и} + \vec{J}, \quad \vec{J} = -m\left(\vec{a}_{и} - \vec{a}_{н}\right).(1)$$

Тело *m* покоится относительно диска (НСО),
т.е. вращается вместе с диском

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_{н} &= 0,(2) \\ \vec{a}_{и} &= -\omega^2 R\vec{n}.(3) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\vec{J} = m\omega^2 R\vec{n}, \quad \vec{R} = R\cdot\vec{n} \Rightarrow \\ &J_{ц.б} = m\omega^2 R.(4) \end{aligned}$$

центробежная сила инерции.

Свойства центробежной силы:

1) величина центробежной силы инерции (*Fц.б*) зависит от положения тела во вращающейся СО,

2) величина *Fц.б* не зависит от скорости тела относительно вращающейся СО,

3) *Fц.б* является консервативной.

$$dA = \vec{F}_{ц.б}\, d\vec{R}; \quad dA = m\omega^2 \vec{R} \cdot d\vec{R}.$$

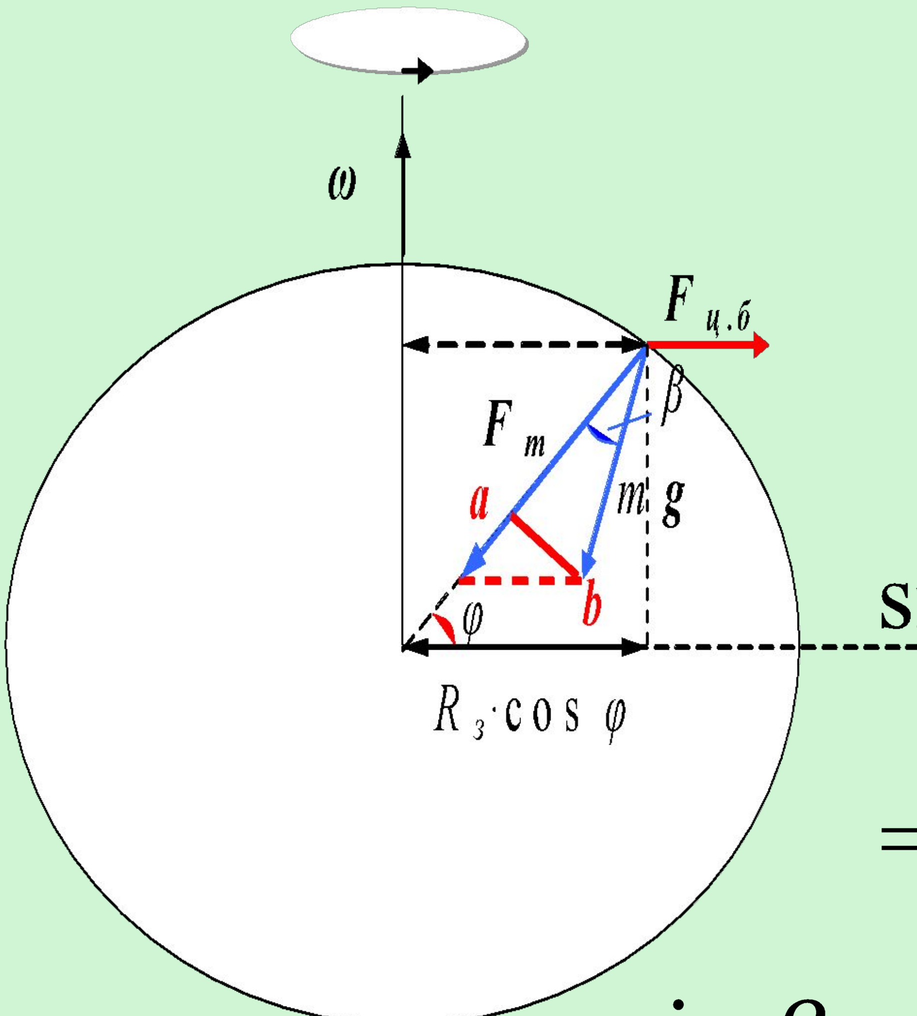
$$\vec{R} \cdot d\vec{R} = \frac{d\vec{R}^2}{2}, \quad \vec{R}^2 = \vec{R} \cdot \vec{R} \cos \angle \vec{R}, \vec{R} = R^2, \quad \frac{dR^2}{2} = R \cdot dR.$$

$$dA = m\omega^2 R \cdot dR.$$

$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} m\omega^2 R \cdot dR = \left.\frac{m\omega^2 R^2}{2}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{m\omega^2 \left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2},$$

т.е. не зависит от формы пути.

Из-за $F_{ц.б}$ направления $F_{тяжести}$ и $F_{тяготения}$ не совпадают.



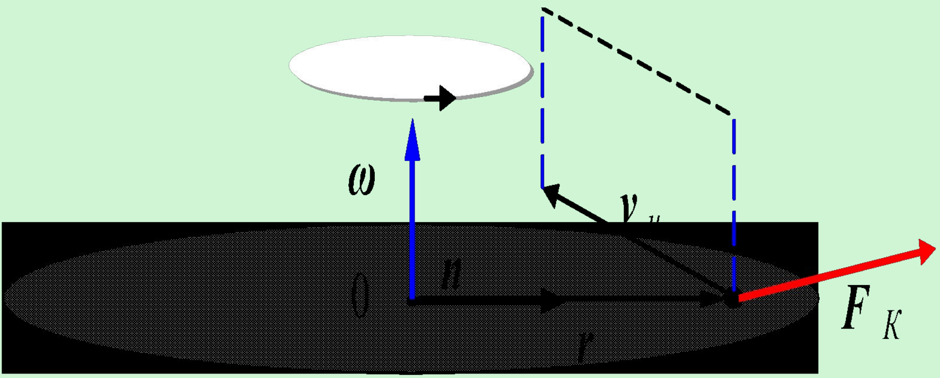
$$|ab| = mg\sin\beta,$$

$$|ab| = F_{ц.б}\sin\varphi = $$
$$= m\omega^2 R_з \cos\varphi\sin\varphi.$$

$$\sin\beta = \frac{\omega^2 R_з \cos\varphi\sin\varphi}{g} =$$
$$= \frac{\omega^2 R_з \sin 2\varphi}{2g}.$$

$$\sin\beta = 0{,}0018\sin 2\varphi.$$

Сила Кариолиса



v $_н$ – скорость движения материальной точки относительно вращающейся СО – НСО, направление ***v*** $_н$ произвольное.

На эту точку действует сила, обусловленная инерцией

$$\left|F_K\right| \sim v_н \cdot \omega \sin \underbrace{\angle(\vec{v}_н, \vec{\omega})}_{90^0} = v_н \cdot \omega.$$

Скорость точки относительно ИСО:

$$\vec{v}_и = \vec{v}_н + \vec{v} = \vec{v}_н + [\vec{\omega}, \vec{r}]. (1)$$

$$\vec{J} = -m(\vec{a}_и - \vec{a}_н). (2)$$

Пусть $\vec{v}_н \uparrow\uparrow \vec{v}$.

$$\vec{a}_и = -\frac{\vec{v}_и^{\,2}}{r}\vec{n} = -\frac{v_и^2}{r}\vec{n} = -\frac{(v_н + \omega r)_и^2}{r}\vec{n}. (3)$$

$$\vec{a}_н = -\frac{\vec{v}_н^{\,2}}{r}\vec{n} = -\frac{v_н^2}{r}\vec{n}. (4)$$

$$\vec{J} = m\left(\frac{v_н^2}{r} + 2\frac{v_н \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} - \frac{v_н^2}{r}\right)\vec{n} = m(2v_н\omega + \omega^2 r)\vec{n}.$$

$$\vec{J} = m\left(\frac{v_н^2}{r} + 2\frac{v_н \omega r}{r} + \frac{\omega^2 r^2}{r} - \frac{v_н^2}{r}\right)\vec{n} = m\left(2v_н\omega + \omega^2 r\right)\vec{n}.$$

$$\vec{F}_{ц.б} = m\omega^2 r\vec{n}.$$

$$\vec{F}_К = m2v_н\omega\vec{n}.$$

- В общем случае $\vec{F}_К = 2m[\vec{v}_н \cdot \vec{\omega}].$

  Если материальная точка движется во вращающейся СО со скоростью $\boldsymbol{v}_н$, то на материальную точку действует сила Кариолиса $\vec{F}_К = 2m[\vec{v}_н \cdot \vec{\omega}].$

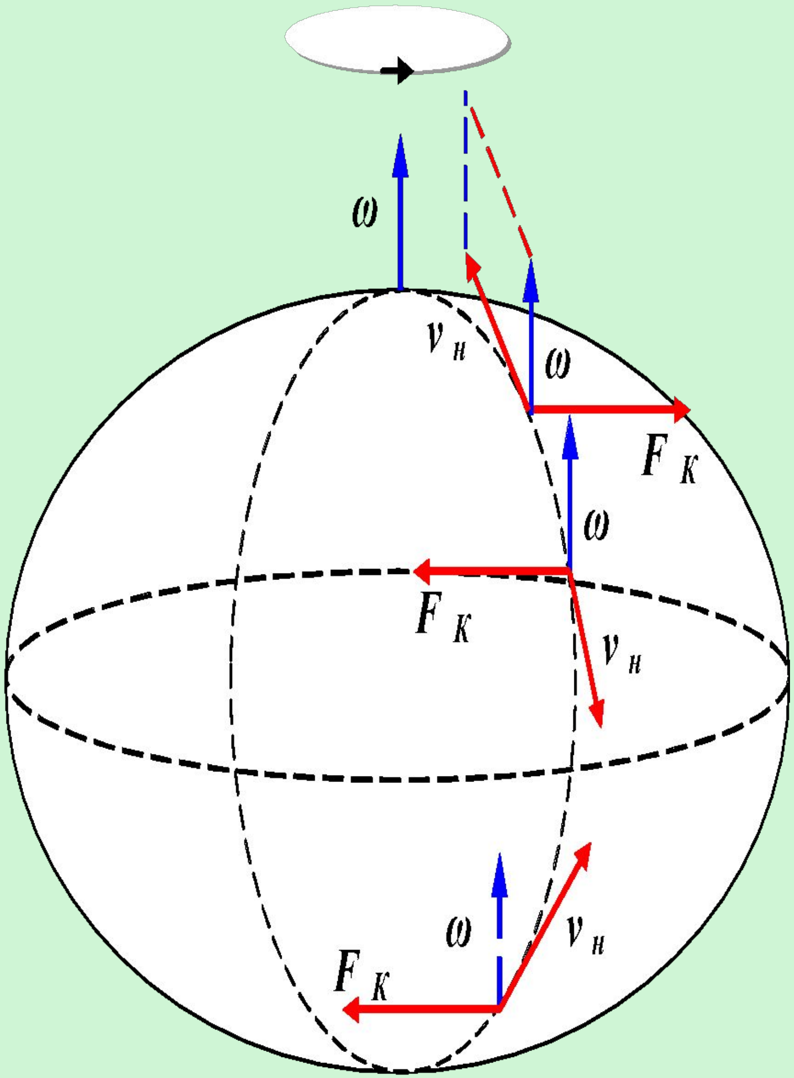
Свойства силы Кариолиса:

1) величина F_K не зависит от положения материальной точки во вращающейся СО,

2) величина F_K зависит от скорости ***v****н*,

3) $\vec{F}_K \perp \vec{v}_н \Rightarrow F_K$ работы не совершает. Эта сила называется *гироскопической*.

Закон Бэра



В северном полушарии

Если тело движется на север - F_K на восток,
если тело движется на юг - F_K на запад.

Следовательно, правый берег рек подмывается сильнее; правые рельсы железных дорог по движению изнашиваются сильнее.

В южном полушарии

F_K направлена влево по отношению к направлению движения $v_н$.

Гравитационное поле

Фундаментальные взаимодействия: электронное, гравитационное, сильное, слабое.

Гравитационное взаимодействие *универсальное*, т. е. возникает между любыми двумя материальными точками.

***Закон всемирного тяготения*:** между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \vec{r},$$

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2} - гравитац.\ \ пост.$$

Первая формулировка дана Ньютоном в 1687 г. в труде «Математические начала натуральной философии».

Гравитационная масса – мера способности тел притягивать и притягиваться к другим телам.

Величину γ оценил Ньютон. Более точно в 1797 г. определил Кавендиш с помощью крутильного маятника.

Напряженность поля тяготения

Это векторная величина, численно равная силе, действующей на единицу массы, помещенную в данную точку поля и направленная вдоль действия силы (или совпадает с силой тяготения).

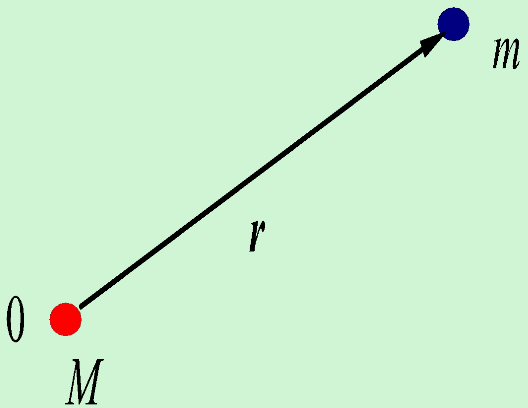
$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r}.$$

Принцип суперпозиции

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \ldots + \vec{G}_n .$$

Если гравитационное поле создано системой материальных точек (гравитационных масс), то результирующая напряженность поля равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждой материальной точкой.

Работа в гравитационном поле



$$dA = \vec{F}\,d\vec{r}; \quad dA = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^3}\,\vec{r}\,d\vec{r},$$

$$\vec{r}\,d\vec{r} = \frac{1}{2} d\left(\vec{r}^{\,2}\right) = \frac{1}{2} d\left(r^2\right) = r\,dr. \Rightarrow$$

$$dA = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^3}\,r\,dr = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2}\,dr.$$

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}\,dr = \gamma \frac{m \cdot M}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \gamma m M\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). (1) \Rightarrow$$

Гравитационные силы *консервативные*.

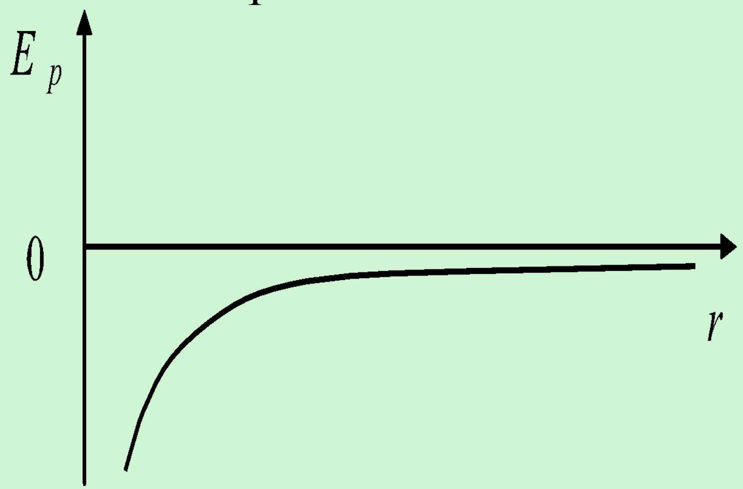
Потенциальная энергия в поле тяготения.

$$dA = -dE_p.$$

$$A_{12} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = E_{p1} - E_{p2}.(2)$$

Сравнивая уравнении (1) и (2), запишем

$$E_{p1} = -\gamma \frac{mM}{r_1}, \quad E_{p2} = -\gamma \frac{mM}{r_2}.$$



Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -\gamma \frac{M}{r}; \quad M - \text{точечная} \quad \text{масса}.$$

Потенциал поля тяготения в данной точке равен потенциальной энергии тела единичной массы, помещенного в данную точку поля.

Принцип суперпозиции: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n$.

Если гравитационное поле создано системой точечных масс, то потенциал результирующего поля в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждой из точечных масс по отдельности.

Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек, потенциал которых одинаков, называется *эквипотенциальной поверхностью* или *поверхностью равного потенциала*.

Для точечных масс – сфера.

Связь напряженности и потенциала поля тяготения: $\vec{G} = -grad\varphi.$

«Взвешивание» (определение массы) Солнца, Земли, планет

$$F_{тяготения} = F_{ц.б}.$$

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = ma_{ц.б}, \quad a_{ц.б} = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

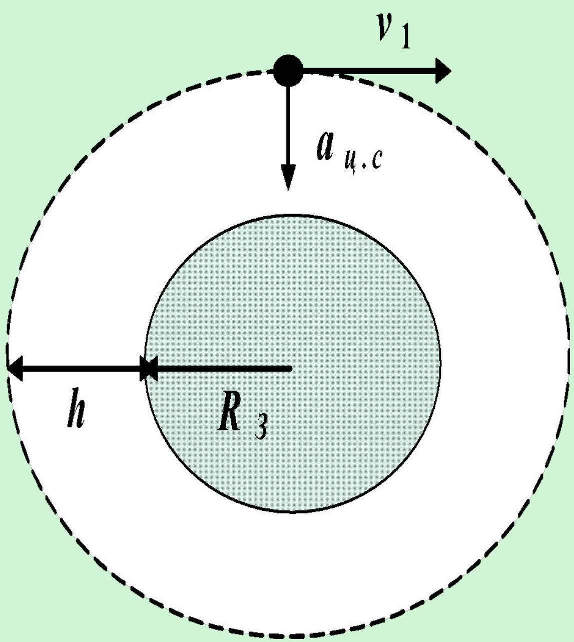
$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2},$$

M – масса Солнца,

R – расстояние между Землёй и Солнцем,

T – период обращения Земли вокруг Солнца.

Космические скорости



Первая космическая скорость (круговая) – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите. Становится искусственным спутником Земли.

Движение финитное.

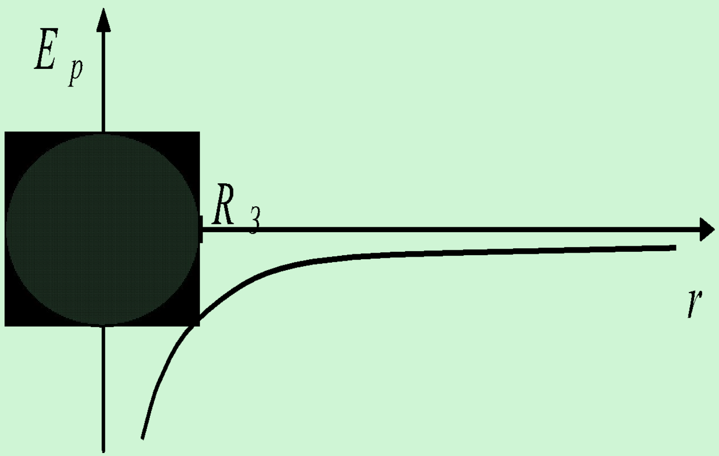
$$\vec{F}_m = m\vec{a}_{ц.с}. (1)$$

$$\gamma \frac{mM}{(R_з + h)^2} = \frac{mv_1^2}{R_з + h}; \quad h << R_з \Rightarrow \quad \gamma \frac{M}{R_з} = v_1^2, (2)$$

$$\vec{F}_m = gm = \gamma \frac{mM}{R_з^2}.$$

$$(2) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\underbrace{\gamma \frac{M}{R_{\text{З}}^2}}_{g} \cdot R_{\text{З}}} = \sqrt{gR_{\text{З}}} = 7{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

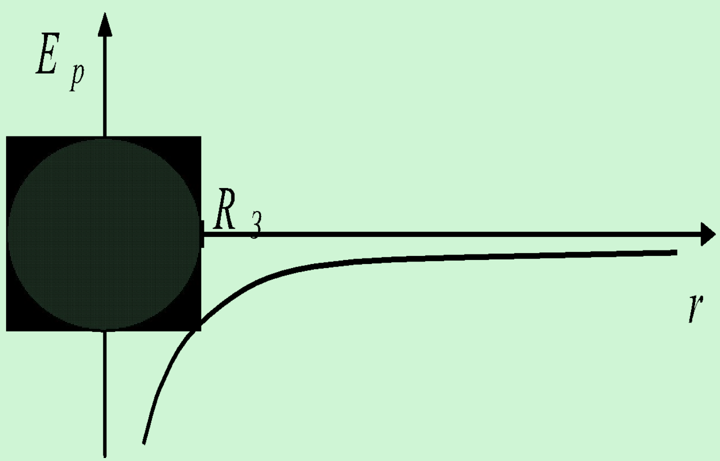
Вторая космическая скорость (параболическая) – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и стать искусственным спутником Солнца, т.е. его орбита в поле тяготения Солнца будет параболической.



Потенциальная энергия на большом расстоянии от Земли стремится к 0.

Кинетическая энергия должна быть равна работе (ΔEp), совершаемой против сил тяготения.

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{mM_з}{R_з} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\gamma \underbrace{\frac{M_з}{R_з^2}}_{g} \cdot R_з} = \sqrt{2gR_з} = 11{,}2\,\frac{км}{с}.$$



Третья космическая скорость – скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно преодолело притяжение Солнца и покинуло пределы Солнечной системы.

v_3 =16,7 км/с.

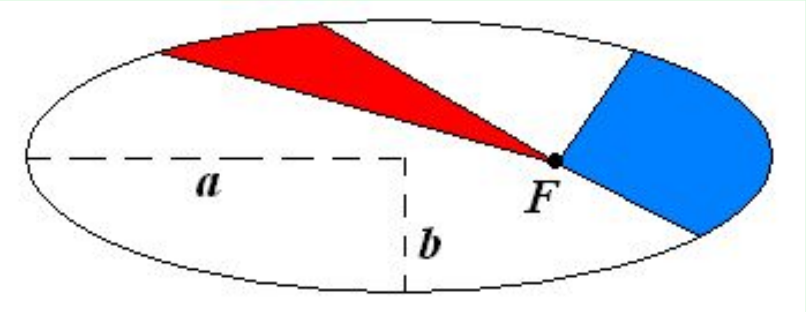
Законы Кеплера.
Законы движения планет

Описывают движение тел в центральном поле, каковым является поле тяготение.

Кеплер (1571 – 1630 гг.) уточнил результаты наблюдений датского астронома Браге (1546 – 1601 гг.)

1. Планеты Солнечной системы вращаются по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор планет за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Для круговых орбит $a = R$.

Законы Кеплера являются следствием законов Ньютона.

Например, третий закон Кеплера. Для частного случая движения планет по круговой орбите.

Для планеты 1: масса Солнца $M = \dfrac{4\pi^2 R_1^3}{\gamma T_1^2}.$

Для планеты 2: масса Солнца $M = \dfrac{4\pi^2 R_2^3}{\gamma T_2^2}.$

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Чёрные дыры

Чёрные дыры – космические объекты, поглощающие все частицы, в том числе фотоны, проходящие через их поверхность.

Если фотон поглощается, то его кинетическая энергия меньше (равна) его потенциальной энергии в поле чёрной дыры. Следовательно,

$$\underbrace{\frac{mc^2}{2}}_{E_{к\ фотона}} \le \gamma \frac{mM}{r},$$

M – масса чёрной дыры,

r – радиус чёрной дыры.

Если $$r \le \gamma \frac{2M}{c^2},$$

то свет не может покинуть данный классический объект.

Т.к. чёрные дыры поглощают всё и почти ничего не испускают, то о существовании чёрных дыр можно судить по косвенным данным – поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения.