

# § Теория упругости. Влияние электрических и магнитных полей

Вид тензора диамагнитной восприимчивости в случае ЖК с симметрией  $\infty$  в случае, когда ось  $Z$  направлена вдоль оси симметрии (т.е. и вдоль директора  $\vec{n}$ ):

$$\chi_{ij} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{vmatrix}$$

Обозначим  $\chi_{33} = \chi_{||}$ ,  $\chi_{11} = \chi_{\perp}$  (по ориентации к директору)

Запишем тензор диамагнитной восприимчивости как сумму симметричной и антисимметричной части:

$$\chi_{ij} = \chi_{\perp} \delta_{ij} + \Delta\chi n_i n_j \quad (6-1)$$

Где  $\Delta\chi = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$  - диамагнитная анизотропия, а  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j \end{cases}$$

Член уравнение для плотности упругой энергии , учитывающий деформацию ЖК под действием магнитного поля:

$$\Phi_M = -\frac{1}{2}\chi_{\perp}H^2 - \frac{1}{2}\Delta\chi(\vec{n}\vec{H})^2 \quad \text{СИ} \quad (6-2)$$

Раскроем в (6-2) скалярное произведение:

$$-\frac{1}{2}\Delta\chi(\vec{n}\vec{H})^2 = -\frac{1}{2}\Delta\chi(nH)^2 \cos^2(\vec{n}\wedge\vec{H}) \quad (6-3)$$

При  $\Delta\chi > 0$  минимум уравнения (6-3) будет при  $\cos(\vec{n}\wedge\vec{H}) = 1$  (оси молекул || полю).

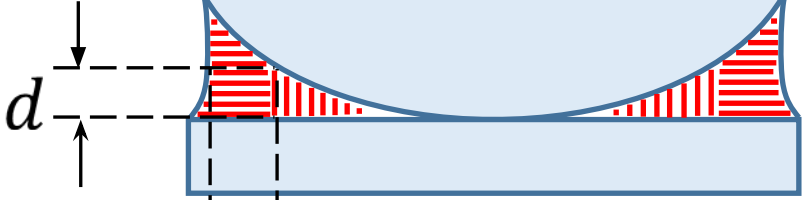
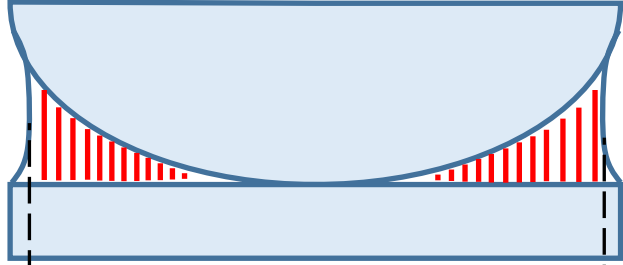
При отрицательной диамагнитной восприимчивости ( $\Delta\chi < 0$ ) устойчивое состояние будет при  $\cos(\vec{n}\wedge\vec{H}) = 0$ .

Дополнительная плотность свободной энергии ЖК под действием электрического поля:

$$\Phi_{\text{э}} = - \left( \frac{1}{8\pi} \right) \varepsilon_{\perp} E^2 - \left( \frac{1}{8\pi} \right) \Delta\varepsilon (\vec{n}\vec{E})^2 \quad \text{Гаусс} \quad (6-4)$$

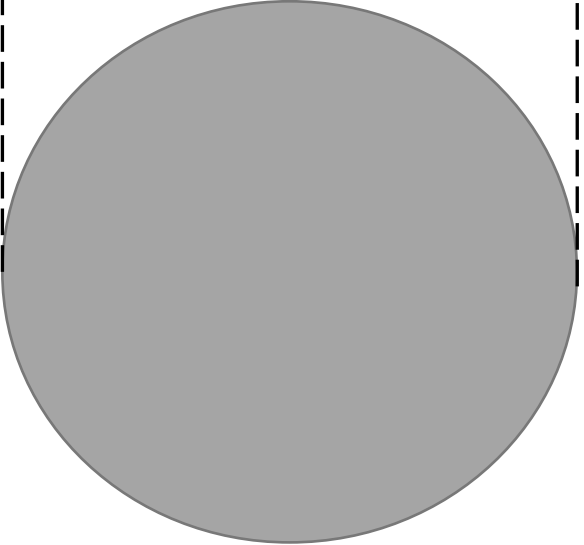
где  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  - нормальная и тангенциальная компоненты диэлектрической проницаемости соответственно,  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  - диэлектрическая анизотропия.

Вид на ячейку  
сбоку

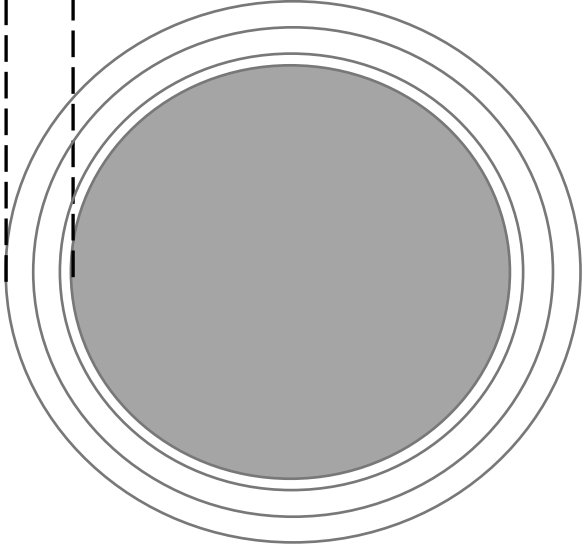


Картина,  
наблюдаемая в  
поляризационный  
микроскоп

а)



б)

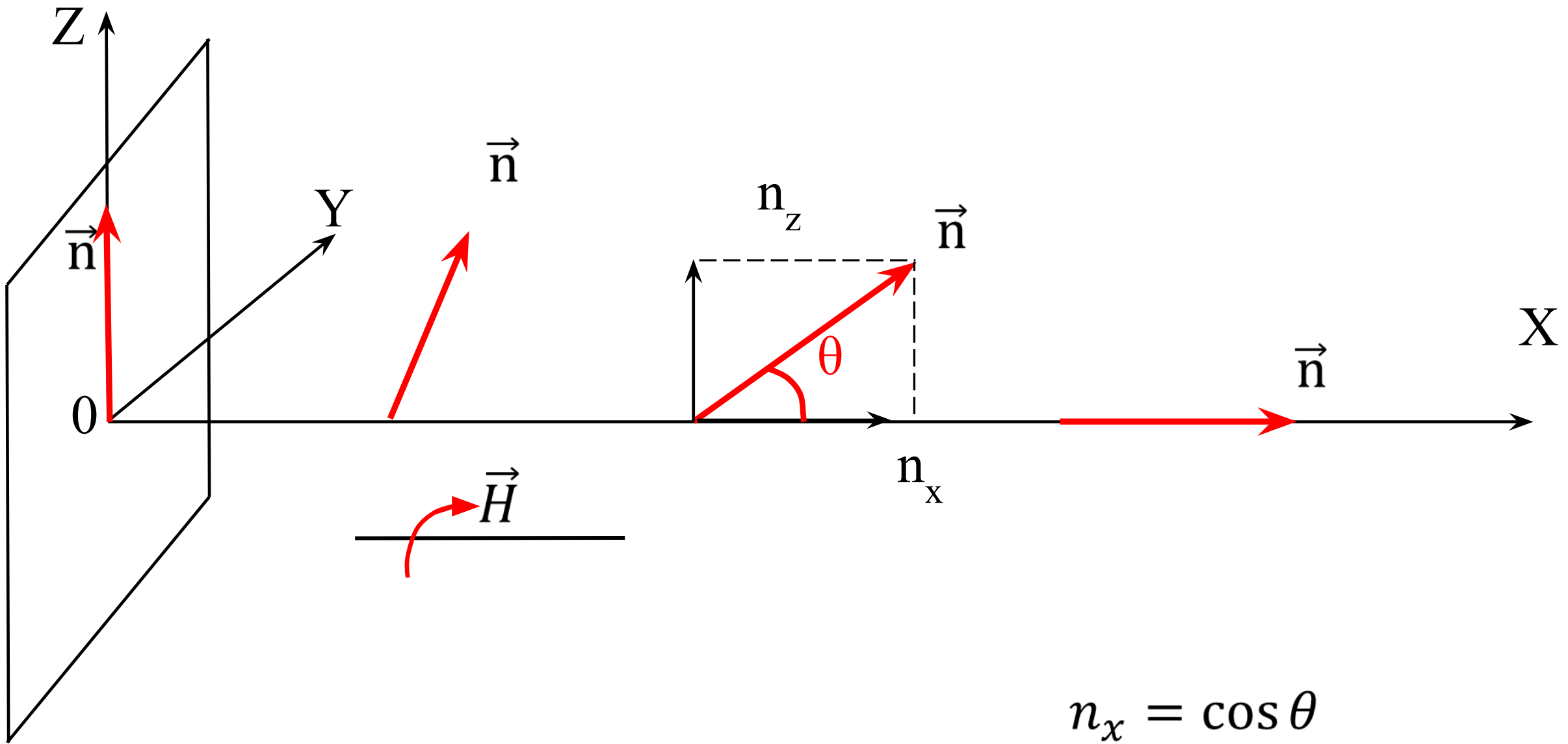


Эксперимент Фредерикса: а) Препарат с гомеотропной ориентацией без приложения магнитного поля; б) Препарат под действием поля с частично переориентированной областью. **H паралл. стеклам**

Следствие из эксперимента Фредерикса:

$$d_0 H_c = \text{const} \quad (6-5)$$

где  $d_0, H_c$  — соответственно предельные толщина слоя и напряженность магнитного поля, при которой возможен переход.



$$n_x = \cos \theta$$

$$n_z = \sin \theta$$



Выражение для упругой энергии в случае сильного сцепления в одноконстантном приближении:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{+d/2} \left[ k \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \Delta\chi H^2 \sin^2 \theta \right] dx \quad (6-6)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в нашем случае будет иметь вид:

$$\frac{K}{H^2 \Delta\chi} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \sin \theta \cdot \cos \theta = 0 \quad (6-7)$$

Выражение для магнитной когерентной длины:

$$\frac{1}{H} \cdot \left( \frac{K}{\Delta\chi} \right)^{1/2} = \xi_m \quad (6-8)$$

Подставим (6-8) в (6-7) и преобразуем его. Получим:

$$\frac{1}{\xi_m^2} \cdot \frac{d(\sin^2 \theta)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \quad (6-9)$$

Проинтегрируем (6-9):

$$\frac{1}{\xi_m^2} \cdot \int \frac{d(\sin^2 \theta)}{dx} + C = \int \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2$$

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \left( \frac{\sin \theta}{\xi_m} \right)^2 + C \quad (6-10)$$

При  $x \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$  и  $\frac{d\theta}{dx} \rightarrow 0$ , следовательно  $C=0$ . Извлечем из (6-10)

корень:

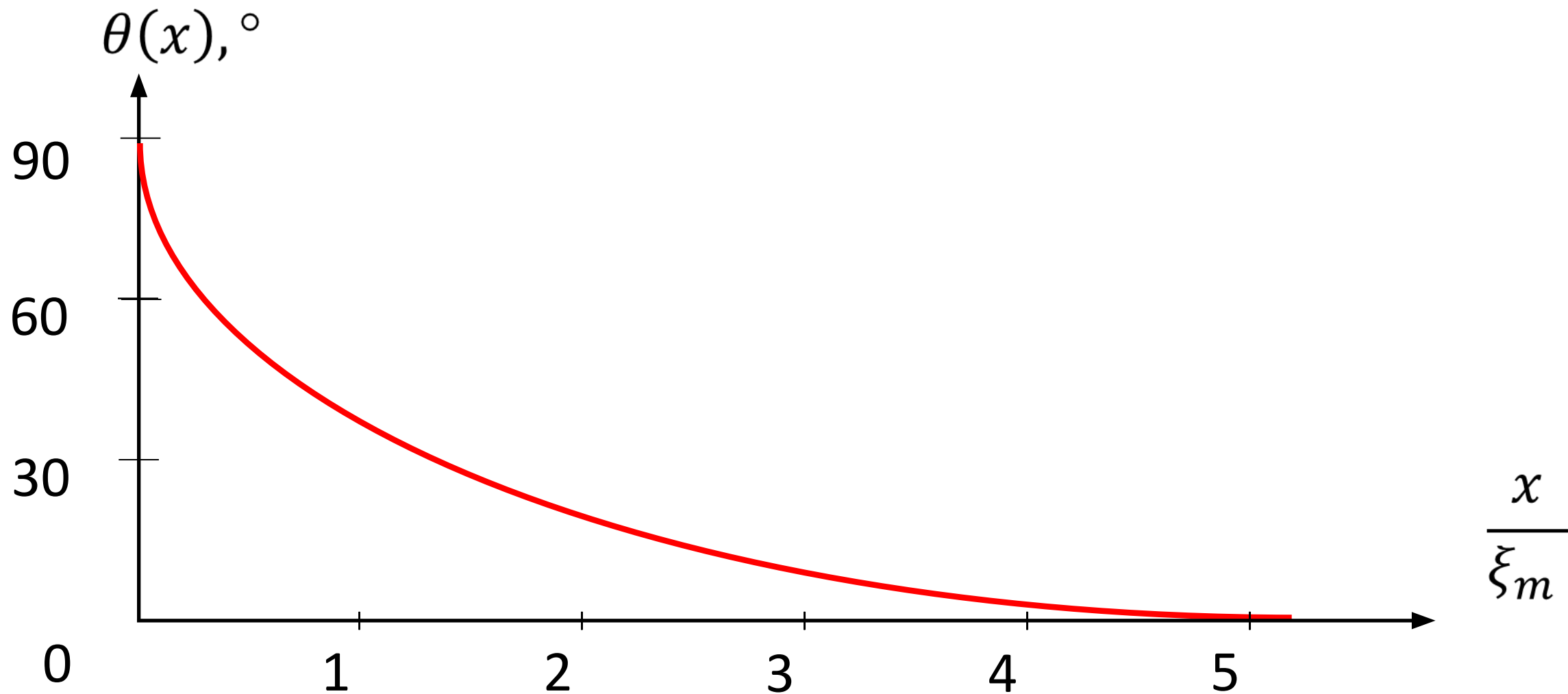
$$\frac{d\theta}{dx} = \pm \frac{\sin \theta}{\xi_m} \quad (6-11)$$

Проинтегрируем полученное выражение еще раз:

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\frac{x}{\xi_m} \quad (6-12)$$

Решая (6-12) имеем:

$$\theta(x) = 2 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( -\frac{x}{\xi_m} \right) \right] \quad (6-13)$$



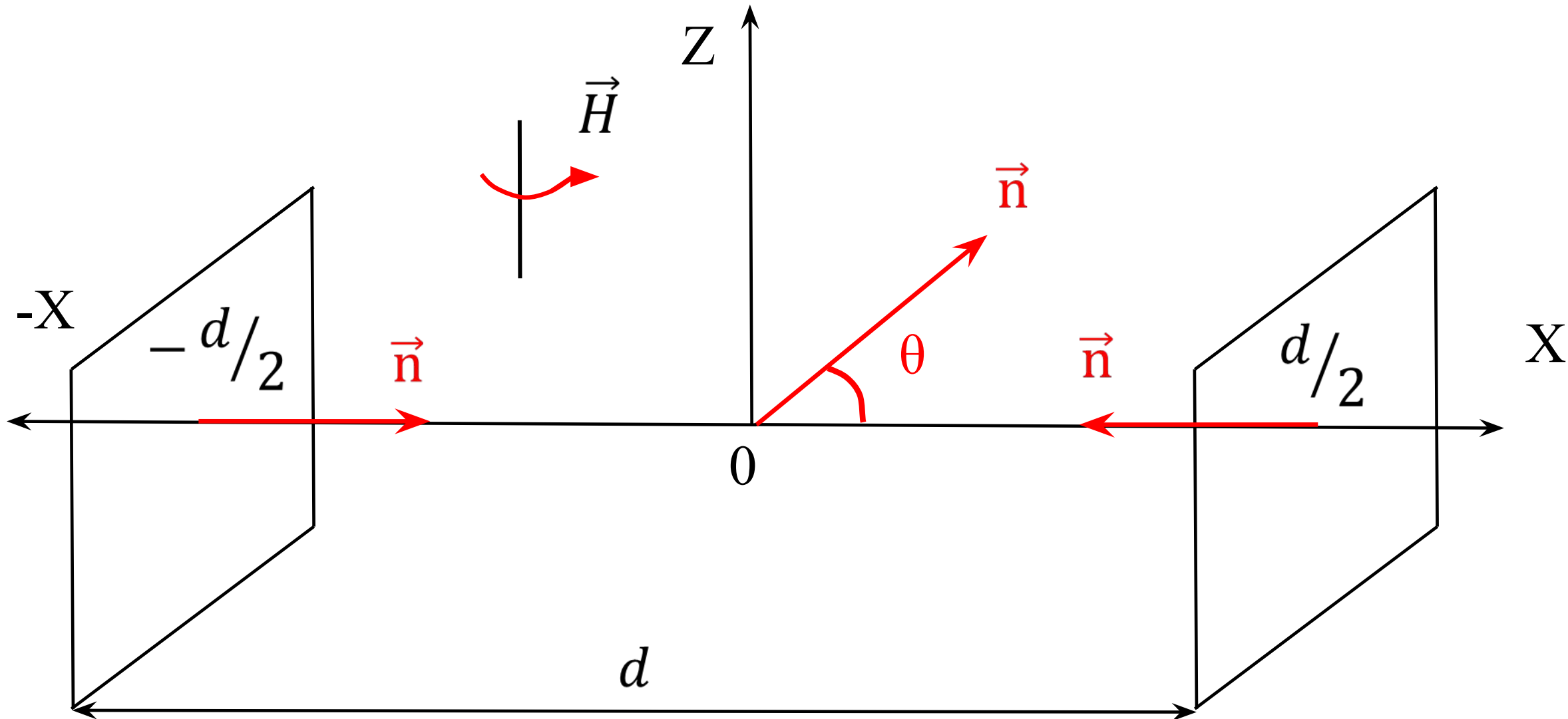
Зависимость угла поворота директора  $\theta(x)$  под действием магнитного поля от расстояния от опорной поверхности, (в ед. магнитной когерентной длины)

Электрическая когерентная длина  $\xi_E$  определяется аналогично магнитной:

$$\xi_E = \frac{1}{E} \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (6-14)$$

Полагая  $\xi_m = \xi_E$ , сравним ориентирующее действие магнитного и эл. полей. Из (6-8) и (6-14) находим:

$$E = H \left( \frac{4\pi\Delta\chi}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (6-15)$$



$$n_x = \cos \theta$$

$$n_z = \sin \theta$$

Выражение для упругой энергии в случае сильного сцепления в одноконстантном приближении:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{+d/2} \left[ k \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \Delta\chi H^2 \sin^2(\theta) \right] dx$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\zeta_m \frac{d^2\theta}{dx^2} + \sin\theta \cdot \cos\theta = 0 \quad (6-16)$$



Проинтегрировав его, получим:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = C - \left(\frac{\sin \theta}{\xi_m}\right)^2 \quad (6-17)$$

Считая, что при  $x=0$   $\theta=\theta_m$ , то для константы интегрирования  $C$  будем иметь:

$$C = \left(\frac{\sin \theta_m}{\xi_m}\right)^2 \quad (6-18)$$

Подставим уравнение (6-18) в (6-17) :

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\sin \theta_m}{\xi_m}\right)^2 - \left(\frac{\sin \theta}{\xi_m}\right)^2 = \frac{1}{\xi_m^2} (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta)$$

Извлечем корень:

$$\frac{d\theta}{dx} = \mp \frac{1}{\xi_m} \sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta} \quad (6-19)$$

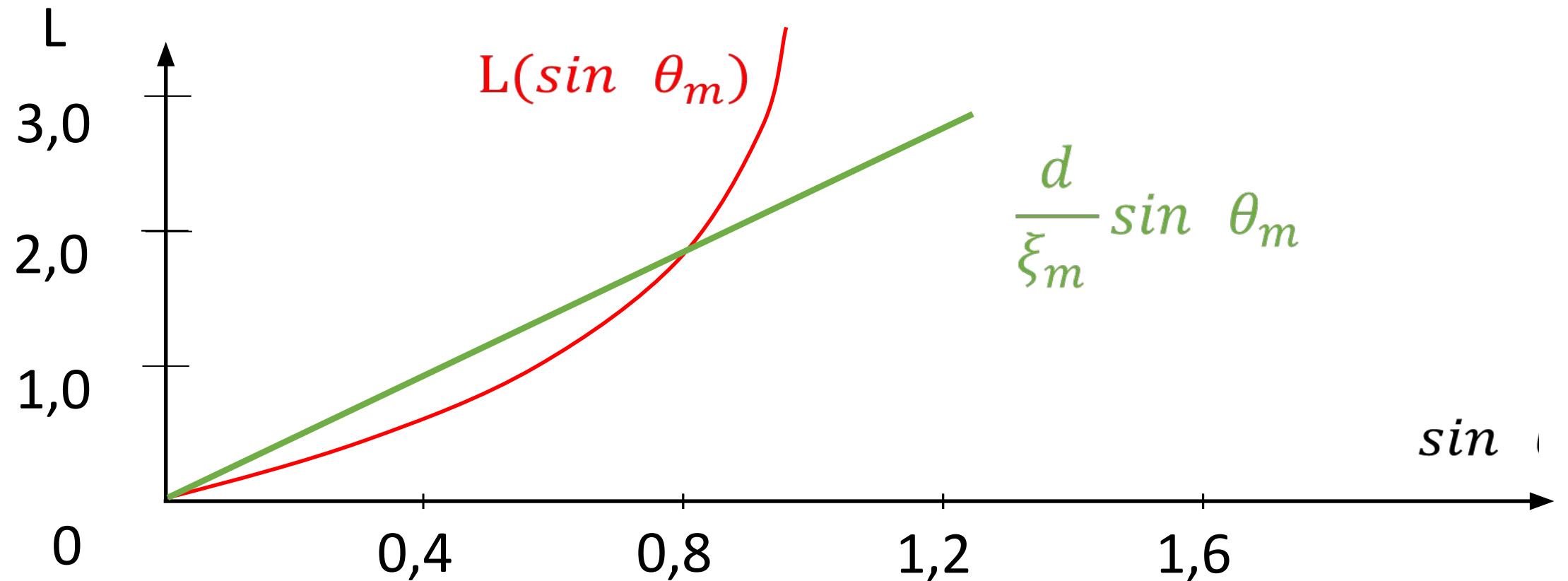
Проинтегрируем (6-19):

$$\int_{-d/2}^x \frac{dx}{\xi_m} = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta'}} = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \theta_m [1 - \frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta_m}]}}$$
$$\frac{1}{\xi_m} (d/2 + x) \sin \theta = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta'}{\sqrt{[1 - \frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta_m}]}} \quad (6-20)$$

Так как при  $x=0$ ,  $\theta=\theta_m$ , можно записать:

$$\frac{d}{2\xi_m} \sin \theta_m = \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - [\frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta_m}]}} \quad (6-21)$$

Обозначим правую часть (6-21) как  $L(\sin \theta_m)$ . Решим уравнение (6-21) графически:



Наклон кривой  $L(\sin \theta_m)$  при малых углах равен  $\pi/2$ .

Если  $\frac{d}{2\xi_m} < \pi/2$ , то (6-21) имеет одно решение:  $\theta_m = 0$ .

Если  $\frac{d}{2\xi_m} > \pi/2$ , то появляется второй решение:  $\theta_m \neq 0$ .

Критическое магнитное поле, соответствующее переходу Фредерикса ( $\theta_m = 0 \rightarrow \theta_m \neq 0$ ) соответствует условию:

$$\frac{d}{2\xi_m} = \frac{\pi}{2} \tag{6-22}$$

Подставляя в (6-22) уравнение для когерентной длины волны (6-8) получим:

$$H_c = \left(\frac{\pi}{d}\right) \left(\frac{K}{\Delta\chi}\right)^{1/2} \quad (6-23)$$

Или:

$$H_c d = \pi \left(\frac{K}{\Delta\chi}\right)^{1/2} = \text{const} \quad (6-24)$$

Магнитное поле не будет влиять на ориентацию нематика, если:

$$\xi_m < \frac{d}{2}$$

Тогда можно приближенно положить:

$$\xi_m \sim \frac{d}{2} \tag{6-25}$$

Подставим его в (6-8):

$$H_c \sim \left(\frac{2}{d}\right) \left(\frac{K}{\Delta\chi}\right)^{1/2} \tag{6-26}$$

Сравнивая полученное уравнение с (6-8) имеем:

$$\frac{H}{H_c} \sim \frac{d}{2\xi_m} \quad (6-27)$$

Подставим результат в (6-21):

$$\frac{H}{H_c} \sin \theta_m = \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sin \theta'}{\sin \theta_m}\right]^2}} \quad (6-28)$$

Для вычисления интеграла положим приближенно  $\theta_m \rightarrow 0$ :

$$\frac{H}{H_c} \approx 1 + 0,25 \cdot \theta_m^2 \quad (6-29)$$

Откуда выражаем  $\theta_m$ :

$$\theta_m \approx \left[4 \cdot \left(\frac{H}{H_c} - 1\right)\right]^{1/2} \quad (6-30)$$



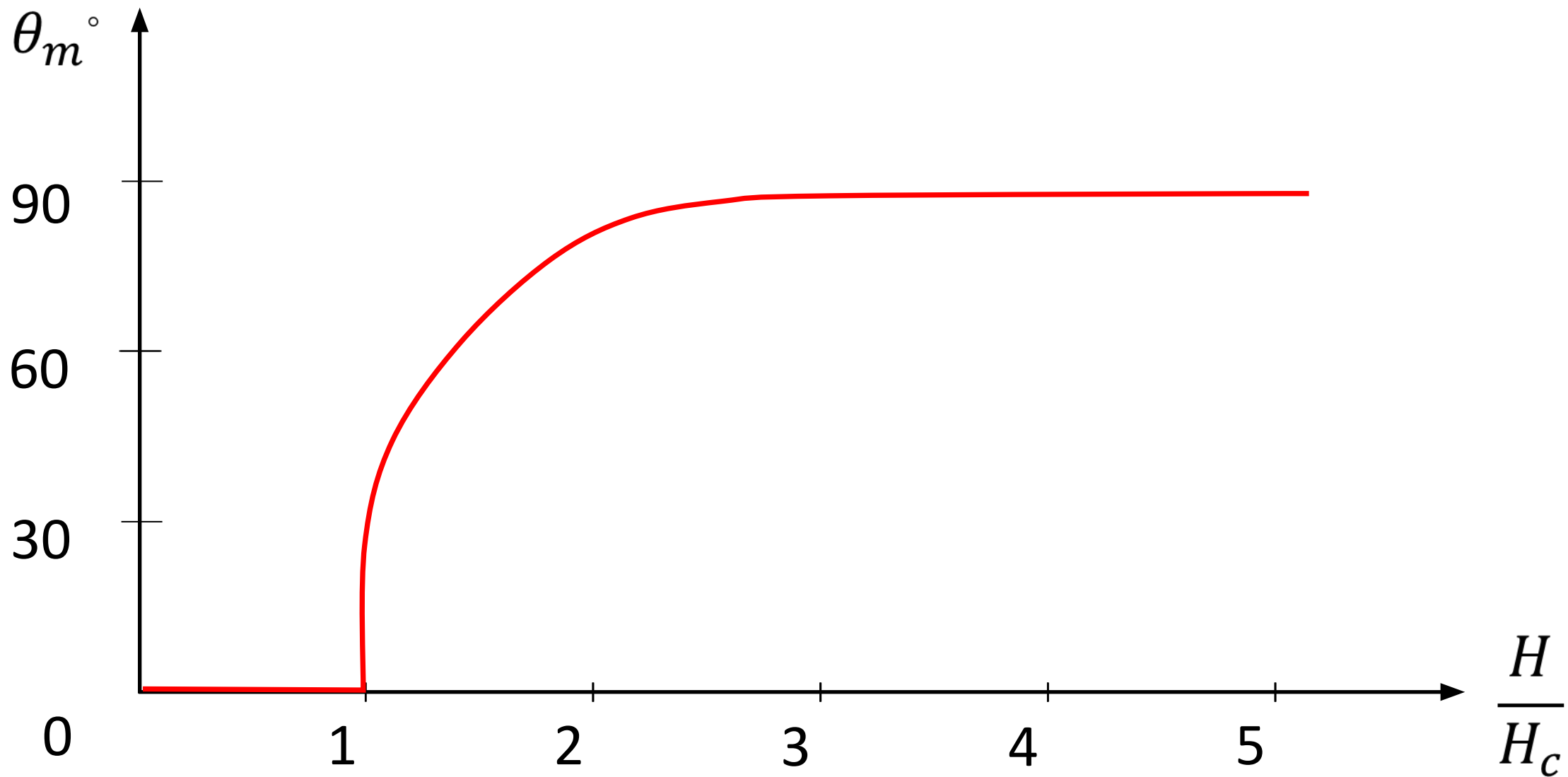


График зависимости (6-30)

Подставим в уравнение (6-20) строгие выражения (6-8) и (6-23):

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{H}{H_c} \left( \frac{2x}{d} + 1 \right) \sin \theta_m = \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \left[ \frac{\sin \theta'}{\sin \theta_m} \right]^2}} \quad (6-31)$$

Заменим интеграл справа приближенным значением, получим:

$$\theta_m^2 \approx 2\pi \cdot \frac{H}{H_c} \left( \frac{2x}{d} + 1 \right) - 1 \quad (6-32)$$

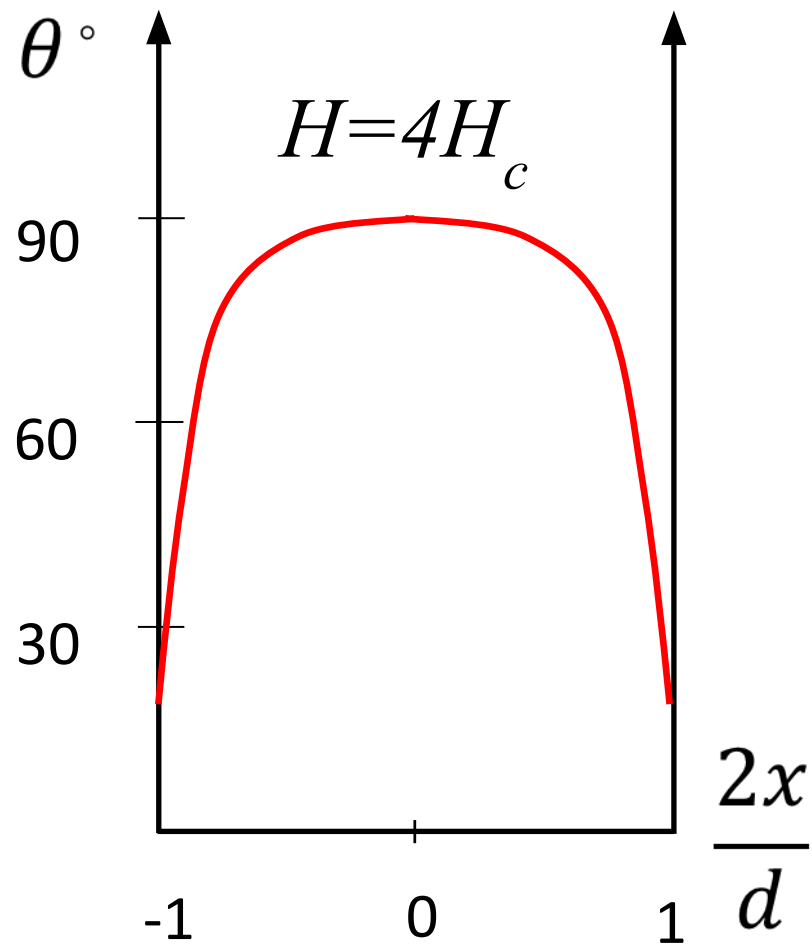
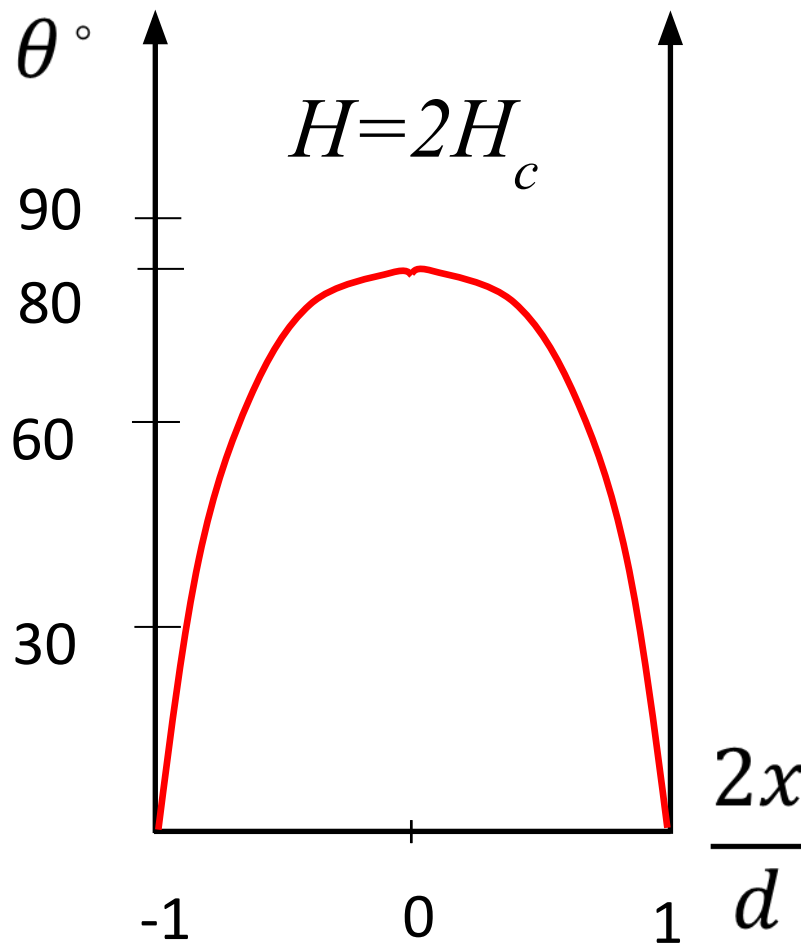
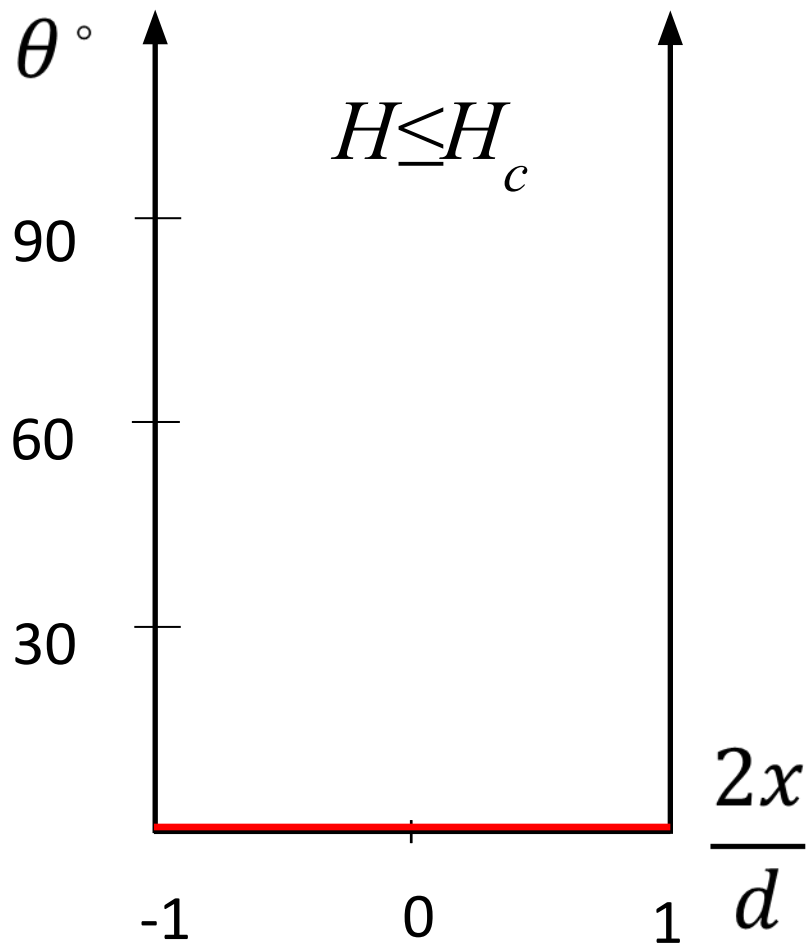


График зависимости угла поворота директора от толщины образца при разных значениях напряженности внешнего магнитного

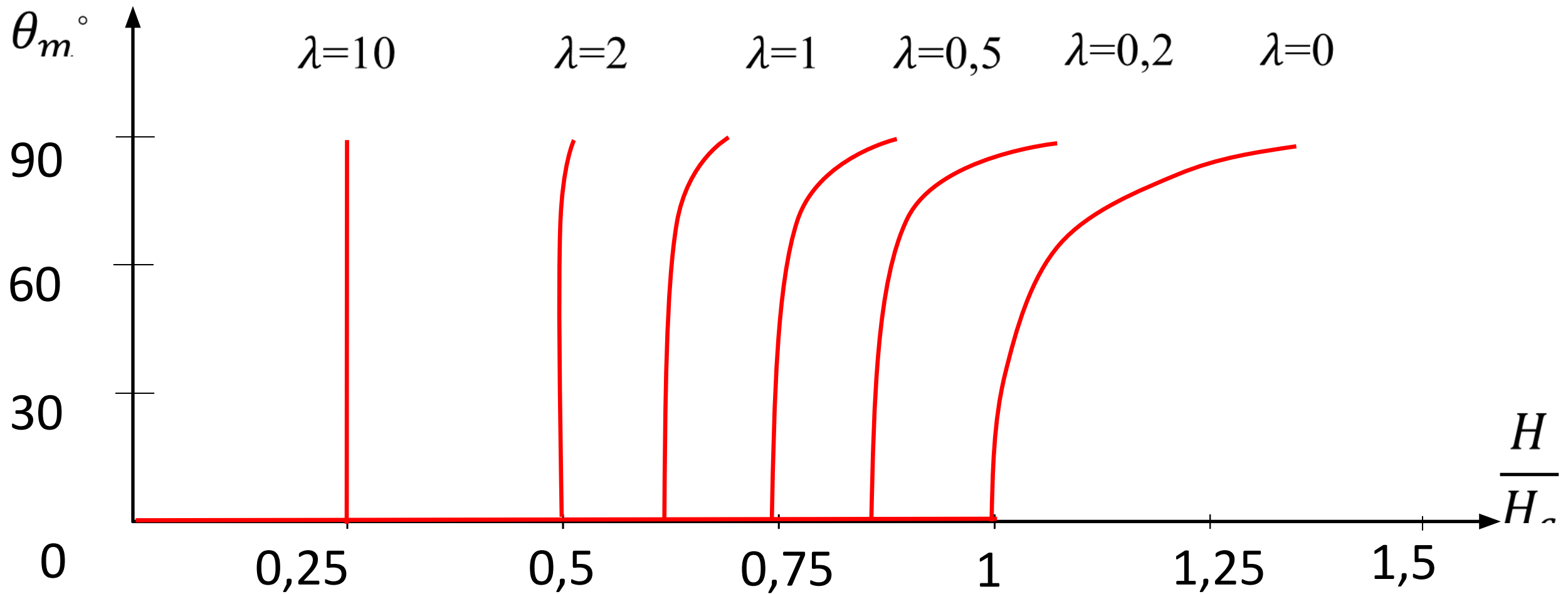
Критическое поле для электрического перехода Фредерикса определяется аналогично с магнитным:

$$E_c = \left(\frac{\pi}{d}\right) \left(\frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (6-33)$$

Тогда критическое напряжение для такого перехода:

$$U_c = \pi \left(\frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (6-34)$$

Оно не зависит от толщины и для типичного нематика имеет порядок  $U_c \sim 1\text{В}$ .



$$\lambda = \frac{\pi K}{Ad} \quad (6-35)$$

где  $A$  – описывающая силу связи нематика,  $d$  – толщина ячейки,  $K$  – соответствующая упругая постоянная.



$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^p [K_{22} (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{n} + \frac{\pi}{P_0})^2 - \Delta \chi H^2 \sin^2 \theta] dx \quad (6-37)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^p [K_{22} (\frac{d\theta}{dx} + \frac{\pi}{P_0})^2 - \Delta \chi H^2 \sin^2 \theta] dx \quad (6-38)$$

$$\xi_m^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \sin \theta \cdot \cos \theta = 0 \quad (6-39)$$