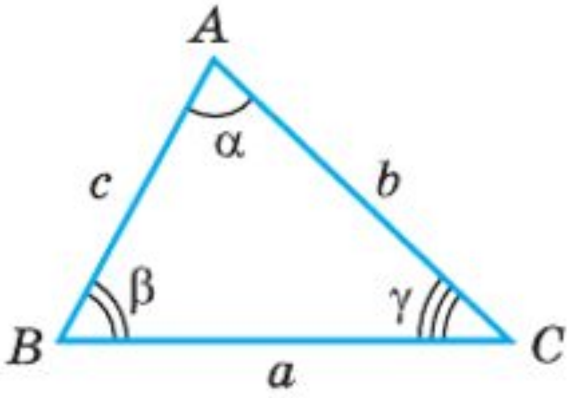
НАХОЖДЕНИЕ ДЛИН СТОРОН И ВЕЛИЧИН УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

ПОДГОТОВИЛА:
УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ
МБОУ «ШКОЛА № 96 Г. ДОНЕЦКА»
ЗОБОВА Ю.А.

ВСПОМНИМ ТЕОРЕМУ СИНУСОВ

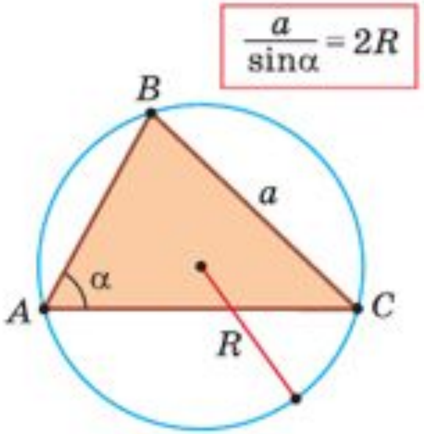


Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу окружности, описанной около треугольника, т. е.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

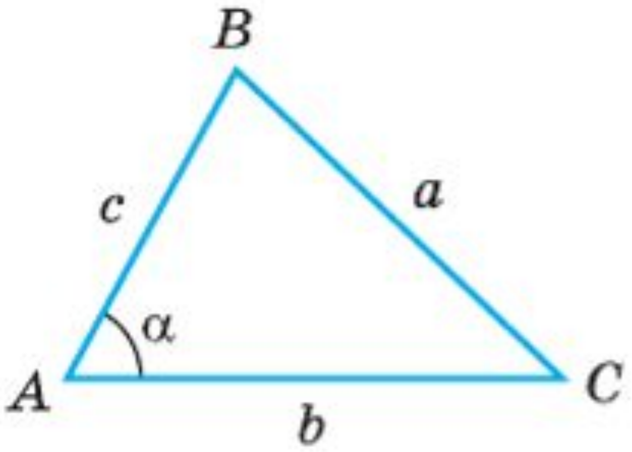
ЗАПОМНИ!

С помощью формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ можно решить еще *три* задачи



- зная сторону треугольника и противолежащий ей угол, найти радиус окружности, описанной около треугольника;
- зная угол треугольника и радиус описанной окружности, найти сторону треугольника, противолежащую данному углу;
- зная сторону треугольника и радиус его описанной окружности, найти синус угла, противолежащего данной стороне.

ВСПОМНИМ ТЕОРЕМУ КОСИНУСОВ



Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

ЗАПОМНИ!

Следствие:

Теорема косинусов позволяет, зная три стороны треугольника, найти его углы (косинусы углов). Из равенства $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ следует формула

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для углов β и γ получим:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

ЗАПОМНИ!

Следствие:

С помощью теоремы косинусов можно по трем сторонам определить вид треугольника: *остроугольный, прямоугольный или тупоугольный*.

Так, из формулы $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ с учетом того, что $2bc > 0$,

следует:

1. если $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos\alpha > 0$ и угол α острый;
2. если $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos\alpha < 0$ и угол α тупой;
3. если $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos\alpha = 0$ и угол α прямой.

При определении вида треугольника достаточно найти знак косинуса угла, лежащего против большей стороны, поскольку только больший угол треугольника может быть прямым или тупым.

ПОВТОРИМ!

Применение формулы приведения

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла.

Вычислим быстро!

$$\sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ПОВТОРИМ!

Применение формулы приведения

$$\boxed{\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha}$$

$$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

Косинус тупого угла равен «–» косинусу смежного с ним острого угла.

Вычислим быстро!

$$\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ЗАДАЧА 1

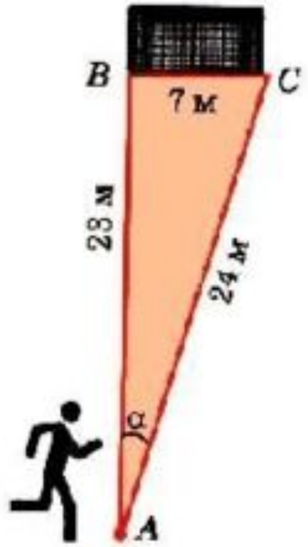


Рис. 1.

Условие.

Футбольный мяч находится в точке А футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований В и С стоек ворот (рис.1). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

Решение.

Рассмотрим треугольник АВС, вершинами которого являются точка А расположения мяча и точки В и С в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник АВС и найти угол α, равный углу А. С помощью теоремы косинусов определяем cosA:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}$$

Угол α находим по таблице: $\alpha \approx 16°57'$.

ЗАДАЧА 2 (ИЗМЕРЕНИЕ ВЫСОТЫ ПРЕДМЕТА)

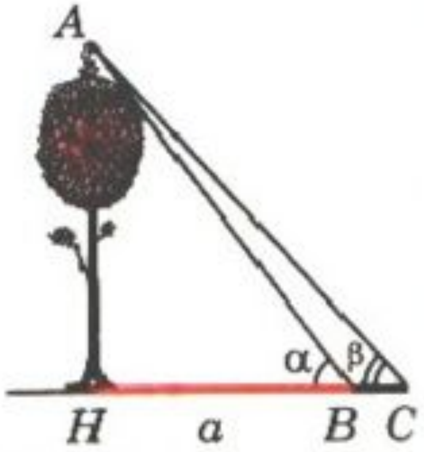


Рис. 2

Предположим, что требуется определить высоту AH какого-либо предмета (рис. 2). Для этого отметим точку B на определенном расстоянии α от основания H предмета и измерим угол ABH: ∠ABH=α. По этим данным из прямоугольного треугольника ABH находим высоту предмета: AH = a tgα.

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определенном расстоянии α друг от друга и измерим углы ABH и ACB: ∠ABH=α и ∠ACB=β(рис. 2). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, ∠ABH- внешний угол треугольника ABC, поэтому ∠A=α-β. Используя теорему синусов, находим AB: $AB = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета:

AH=AB·sin α. Итак, AH= $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

ЗАДАЧА 3 (ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ДО НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ)

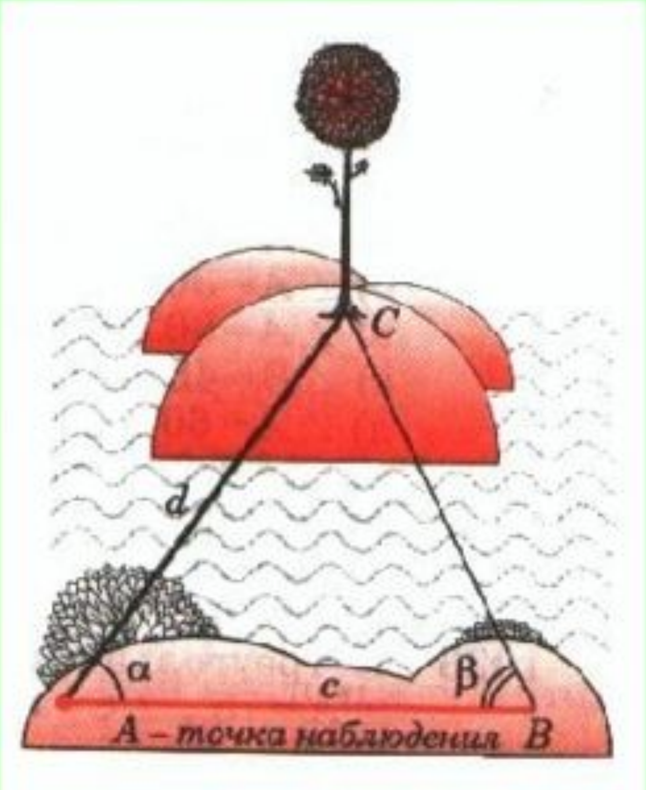


Рис. 3

Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 3). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи – с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние d=AC.

Сначала находим $\angle C=180°-\alpha-\beta$,

$\sin C = \sin(180°-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$.

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как , $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$

AC=d, AB=c, $\angle B=\beta$, то $d=\dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

ЗАДАЧА 4 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

В треугольнике ABC угол B равен $72°$, угол C равен $63°$, $BC = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение.

Угол A треугольника ABC равен $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 45°$.

Радиус описанной окружности равен $\dfrac{BC}{2\sin A} = 2$.

Ответ: 2.

ЗАДАЧА 5 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен 120°. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ}=\sqrt{16+16+2\cdot 16\cdot \frac{1}{2}}=4\sqrt{3}$$

(здесь a и b — боковые стороны равнобедренного треугольника, c — основание.

Диаметр описанной окружности найдем по обобщенной теореме синусов:

$$D=2R=2\cdot\frac{c}{2\sin 120^\circ}=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=8.$$

Ответ: 8.

ЗАДАЧА 6 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

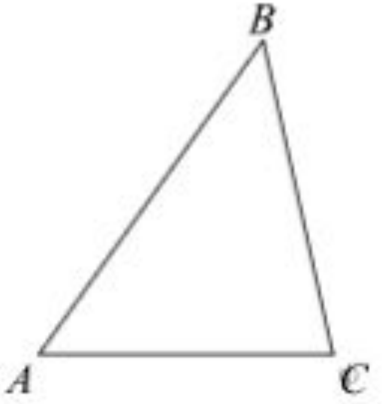
Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 65° и 85°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 14.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому $\angle A = 180^\circ - 65^\circ - 85^\circ = 30^\circ$. По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Откуда получаем, что $BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 14.$



Ответ: 14.

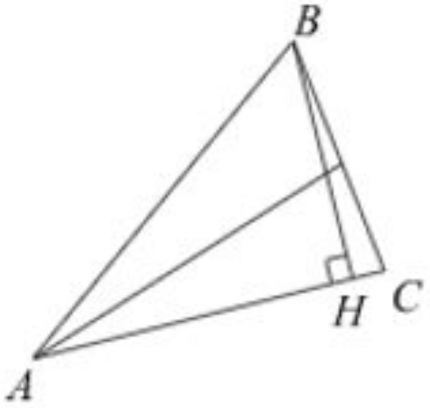
ЗАДАЧА 7 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 12$.

Решение.

Обозначим BH высоту, проведённую из вершины B. Биссектриса, проведённая из угла A, делит высоту в отношении, равному отношению AB и AH. Значит, $\cos\angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, поэтому $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{12}{2\cdot 3}\cdot 5 = 10.$$



Ответ: 10.

ЗАДАЧА 8 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а тангенс одного из углов равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними. Найдем синус угла. В прямоугольном треугольнике тангенс определяется как отношение противолежащего катета к прилежащему. Имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом, $a = x\sqrt{2}, b = 4x$, где x — число.

По теореме Пифагора гипотенуза этого прямоугольного треугольника равна:

$$c = \sqrt{2x^2 + 16x^2} = 3x\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике синус определяется как отношение противолежащего катета к гипотенузе. Имеем:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{x\sqrt{2}}{3x\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Ответ: 20.

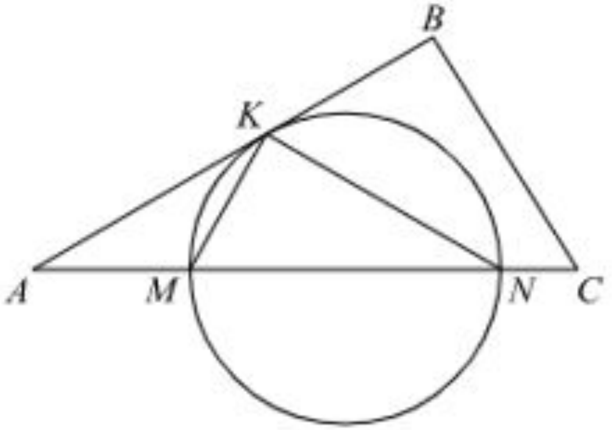
ЗАДАЧА 9 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 18 и 22 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AM \cdot AN = 18 \cdot 22 = 396.$$



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 324 + 396 - 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{396} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 324.$$

Значит, $KM = 18$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$. Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов получаем:

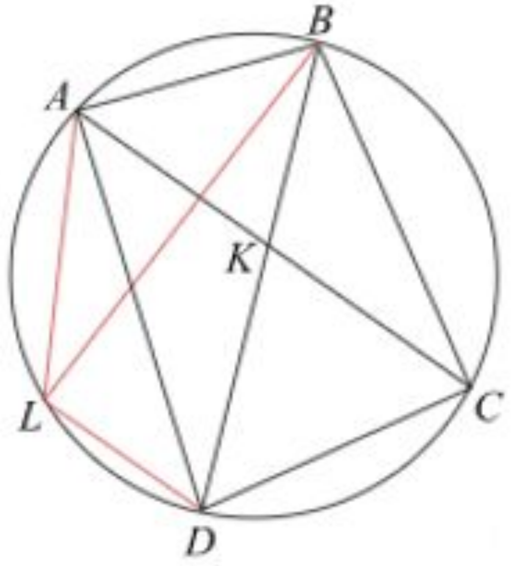
$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{18}{2\sqrt{1 - \frac{11}{36}}} = 10,8.$$

Ответ: 10,8.

ЗАДАЧА 10 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 40$ и $CD = 10$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Решение.



Проведём через точку D прямую, параллельную диагонали AC. Дуги AL и CD равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды: $AL = CD = 10$.

Вертикальные углы AKB и CKD равны. Углы CKD и LDK равны как накрест лежащие: $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$.

Четырёхугольник $ABDL$ вписан в окружность, следовательно, суммы противолежащих углов равны 180°, откуда $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Рассмотрим треугольник ABL. По теореме косинусов:

$$BL = \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB\cos 120^\circ} = \sqrt{100 + 1600 - 2 \cdot 10 \cdot 40 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{2100}.$$

Найдём радиус описанной вокруг треугольника ABL окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2\sin\angle BAL} = \frac{\sqrt{2100}}{2\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{2100}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2100}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2100}{3}} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}.$$

Ответ: $10\sqrt{7}$.

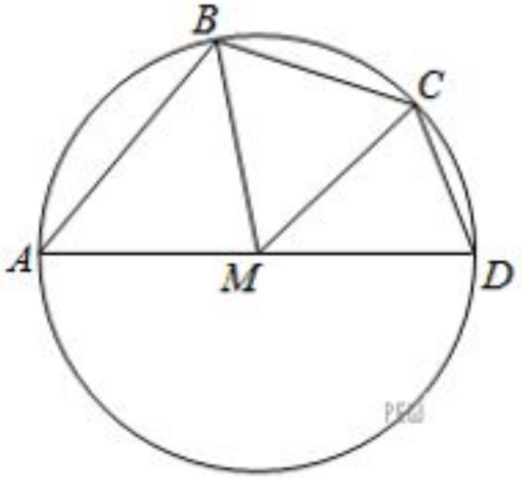
ЗАДАЧА 11 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и С четырёхугольника равны соответственно 112° и 113°.

Решение.

Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180°:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 67^\circ.$$



Отрезки AM, BM и CM равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 67^\circ$ и $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 45^\circ$. Рассмотрим треугольник BMC, сумма углов в треугольнике равна 180°, откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 90^\circ$. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC:

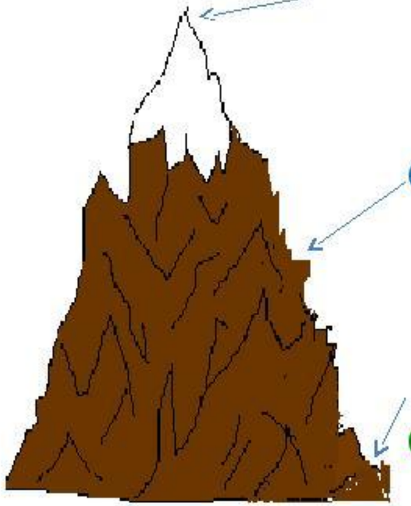
$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow BM = 5\sqrt{2}.$$

Сторона AD — диаметр описанной окружности, поэтому $AD = 2BM = 10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

РЕФЛЕКСИЯ

«Гора успеха»



Вершина, если всё поняли и можете объяснить другому.

Середина, если вы всё поняли, но затрудняетесь объяснить другому.

Основание, если пока трудно решать задачи, примеры.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Выполнить в тетради:
- **Задача 1.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен 120°. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.
- **Задача 2.** Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 62° и 88°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ:

- https://urok.1sept.ru/articles/596417
- https://infourok.ru/zadachi-s-prakticheskim-soderzhaniem-na-primenenie-teorem-sinusov-i-kosinusov-2038389.html
- https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/primienieniie_tieoriemy_sinusov_i_kosinusov
- https://oge.sdamgia.ru/search?search=теорема%20синусов&cb=1&body=3&solution=1&text=2&keywords=10&category=&page=1
- https://oge.sdamgia.ru/search?search=теорема%20косинусов&cb=1&body=3&solution=1&text=2&keywords=10&page=1
- https://math100.ru/geometria7-9_10_2/
- https://math100.ru/geometria7-9_10_3/