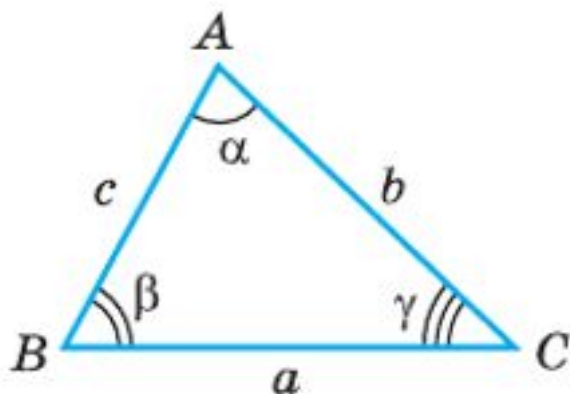


---

# НАХОЖДЕНИЕ ДЛИН СТОРОН И ВЕЛИЧИН УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

ПОДГОТОВИЛА:  
УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ  
МБОУ «ШКОЛА № 96 Г.  
ДОНЕЦКА»  
ЗОБОВА Ю.А.

# ВСПОМНИМ ТЕОРЕМУ СИНУСОВ



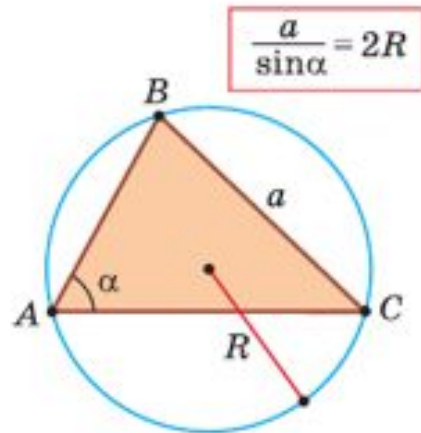
**Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу окружности, описанной около треугольника, т. е.**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

# ЗАПОМНИ!

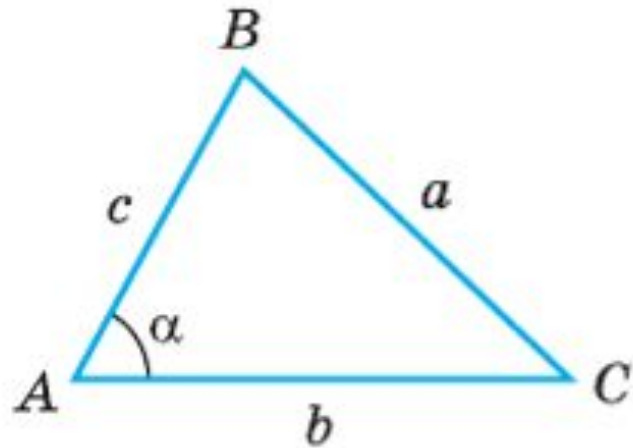


С помощью формулы  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$  можно решить еще три задачи



- зная сторону треугольника и противолежащий ей угол, найти радиус окружности, описанной около треугольника;
- зная угол треугольника и радиус описанной окружности, найти сторону треугольника, противолежащую данному углу;
- зная сторону треугольника и радиус его описанной окружности, найти синус угла, противолежащего данной стороне.

## ВСПОМНИМ ТЕОРЕМУ КОСИНУСОВ



Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

## ЗАПОМНИ!



### Следствие:

Теорема косинусов позволяет, зная три стороны треугольника, найти его углы (косинусы углов). Из равенства  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  следует формула

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для углов  $\beta$  и  $\gamma$  получим:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

# ЗАПОМНИ!



## Следствие:

С помощью теоремы косинусов можно по трем сторонам определить вид треугольника: *остроугольный, прямоугольный или тупоугольный*.

Так, из формулы  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  с учетом того, что  $2bc > 0$ , следует:

1. если  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ , то  $\cos \alpha > 0$  и угол  $\alpha$  острый;
2. если  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ , то  $\cos \alpha < 0$  и угол  $\alpha$  тупой;
3. если  $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ , то  $\cos \alpha = 0$  и угол  $\alpha$  прямой.

При определении вида треугольника достаточно найти знак косинуса угла, лежащего против большей стороны, поскольку только больший угол треугольника может быть прямым или тупым.

# ПОВТОРИМ!



**Применение формулы  
приведения**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Синус тупого угла равен синусу смежного с ним  
острого угла.** Вычислим быстро!

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

# ПОВТОРИМ!



**Применение формулы  
приведения**

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

**Косинус тупого угла равен «-» косинусу смежного с  
ним острого угла.** Вычислим быстро!

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



# ЗАДАЧА I

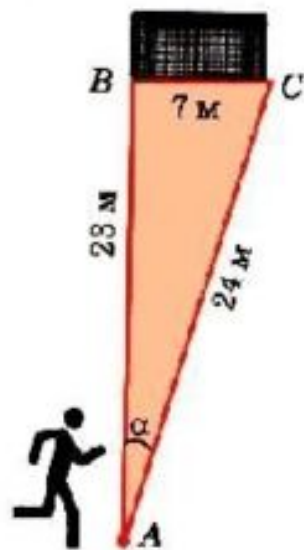


Рис. 1.

## Условие.

Футбольный мяч находится в точке А футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований В и С стоек ворот (рис.1). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол  $\alpha$  попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

## Решение.

Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка А расположения мяча и точки В и С в основаниях стоек ворот. По условию задачи  $c = AB = 23$  м,  $b = AC = 24$  м и  $a = BC = 7$  м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол  $\alpha$ , равный углу А.

С помощью теоремы косинусов определяем  $\cos A$ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}$$

Угол  $\alpha$  находим по таблице:  $\alpha \approx 16^\circ 57'$ .



## ЗАДАЧА 2 (ИЗМЕРЕНИЕ ВЫСОТЫ ПРЕДМЕТА)

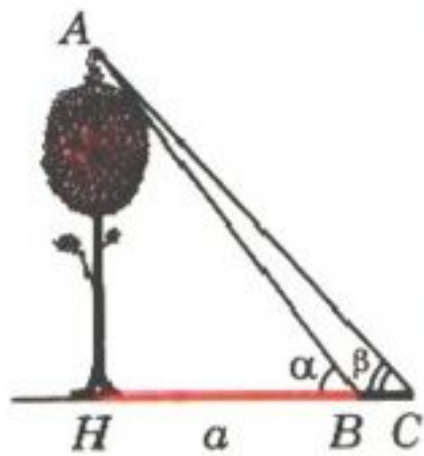


Рис. 2

Предположим, что требуется определить высоту  $AH$  какого-либо предмета (рис. 2). Для этого отметим точку  $B$  на определенном расстоянии  $a$  от основания  $H$  предмета и измерим угол  $ABH$ :  $\angle ABH = \alpha$ . По этим данным из прямоугольного треугольника  $ABH$  находим высоту предмета:  $AH = a \operatorname{tg} \alpha$ .

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание  $H$  предмета, отметим две точки  $B$  и  $C$  на определенном расстоянии  $a$  друг от друга и измерим углы  $ABH$  и  $ACB$ :  $\angle ABH = \alpha$  и  $\angle ACB = \beta$  (рис. 2). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника  $ABC$ , в частности  $AB$ . В самом деле,  $\angle ABH$  - внешний угол треугольника  $ABC$ , поэтому  $\angle A = \alpha - \beta$ .

Используя теорему синусов, находим  $AB$ :  $AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

Из прямоугольного треугольника  $ABH$  находим высоту  $AH$  предмета:

$$AH = AB \cdot \sin \alpha. \quad \text{Итак, } AH = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$



# ЗАДАЧА 3 (ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ДО НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ)

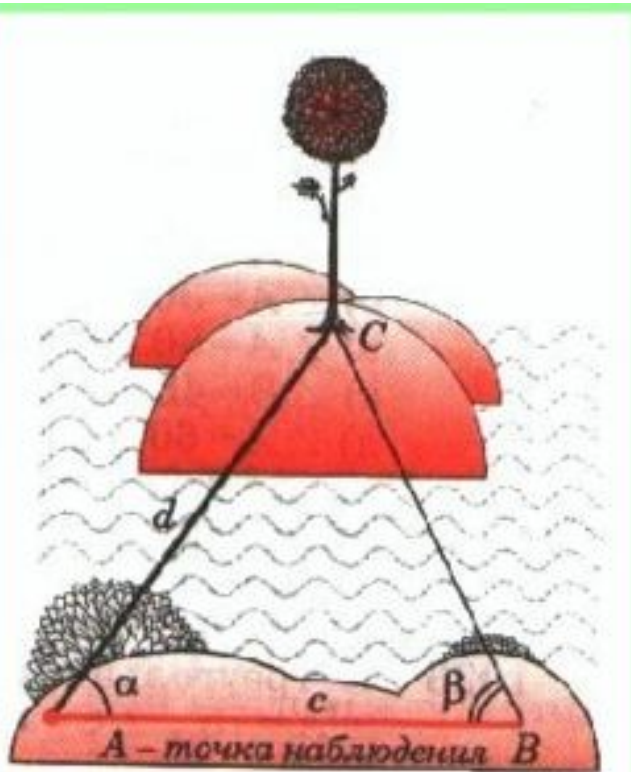


Рис. 3

Предположим, что нам надо найти расстояние  $d$  от пункта  $A$  до недоступного пункта  $C$  (рис. 3). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи – с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку  $B$  и измерим длину  $c$  отрезка  $AB$ . Затем измерим, например с помощью астролябии, углы  $A$  и  $B$ :  $\angle A = \alpha$  и  $\angle B = \beta$ . Эти данные, т. е.  $c$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , позволяют решить треугольник  $ABC$  и найти искомое расстояние  $d = AC$ .

Сначала находим  $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$ ,  
 $\sin C = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ .

Затем с помощью теоремы синусов находим  $d$ . Так

$$\text{как, } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$AC = d, AB = c, \angle B = \beta, \text{ то } d = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



## ЗАДАЧА 4 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $72^\circ$ , угол  $C$  равен  $63^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

**Решение.**

Угол  $A$  треугольника  $ABC$  равен  $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 45^\circ$ .

Радиус описанной окружности равен  $\frac{BC}{2 \sin A} = 2$ .

Ответ: 2.



## ЗАДАЧА 5 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

**Решение.**

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ} = \sqrt{16 + 16 + 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

(здесь  $a$  и  $b$  — боковые стороны равнобедренного треугольника,  $c$  — основание.

Диаметр описанной окружности найдем по обобщенной теореме синусов:

$$D = 2R = 2 \cdot \frac{c}{2 \sin 120^\circ} = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$$

Ответ: 8.



## ЗАДАЧА 6 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  равны соответственно  $65^\circ$  и  $85^\circ$ . Найдите  $BC$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 14.

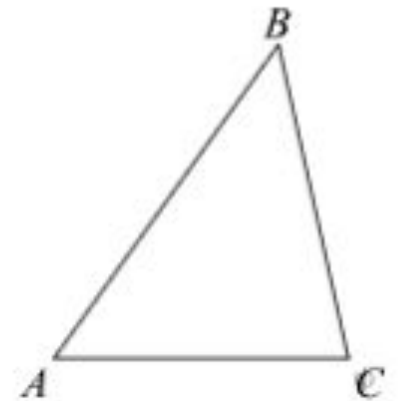
**Решение.**

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , поэтому  $\angle A = 180^\circ - 65^\circ - 85^\circ = 30^\circ$ . По теореме синусов:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Откуда получаем, что  $BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 14$ .

Ответ: 14.



## ЗАДАЧА 7 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$  делит высоту, проведённую из вершины  $B$ , в отношении  $5 : 4$ , считая от точки  $B$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $BC = 12$ .

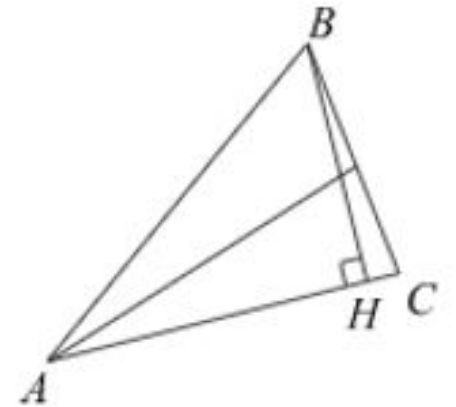
**Решение.**

Обозначим  $BH$  высоту, проведённую из вершины  $B$ . Биссектриса, проведённая из угла  $A$ , делит высоту в отношении, равному отношению  $AB$  и  $AH$ . Значит,  $\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$ , поэтому

$\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$ . По теореме синусов радиус описанной около треугольника  $ABC$  окружности

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{12}{2 \cdot \frac{3}{5}} \cdot 5 = 10.$$

Ответ: 10.



## ЗАДАЧА 8 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а тангенс одного из углов равен  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Найдите площадь параллелограмма.

**Решение.**

Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними. Найдем синус угла. В прямоугольном треугольнике тангенс определяется как отношение противолежащего катета к прилежащему. Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом,  $a = x\sqrt{2}, b = 4x$ , где  $x$  — число.

По теореме Пифагора гипотенуза этого прямоугольного треугольника равна:

$$c = \sqrt{2x^2 + 16x^2} = 3x\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике синус определяется как отношение противолежащего катета к гипотенузе. Имеем:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{x\sqrt{2}}{3x\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 20.$$

Ответ: 20.





## ЗАДАЧА 9 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  на расстояниях соответственно 18 и 22 от вершины  $A$ . Найдите радиус окружности, проходящей через точки  $M$  и  $N$  и касающейся луча  $AB$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$ .

**Решение.**

Пусть  $K$  — точка касания окружности с лучом  $AB$  (см. рис.). По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AM \cdot AN = 18 \cdot 22 = 396.$$

По теореме косинусов

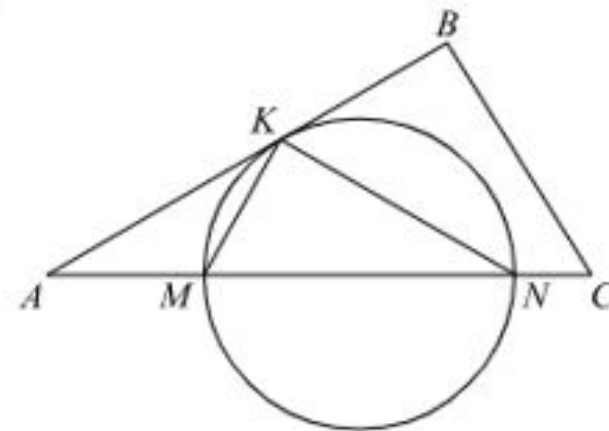
$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos \angle BAC = 324 + 396 - 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{396} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 324.$$

Значит,  $KM = 18$ . Треугольник  $AKM$  равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой  $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$ . Пусть  $R$  — радиус окружности, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ . По теореме синусов получаем:

$$R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM} = \frac{18}{2 \sqrt{1 - \frac{11}{36}}} = 10,8.$$



Ответ: 10,8.

## ЗАДАЧА 10 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Четырёхугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 40$  и  $CD = 10$  вписан в окружность. Диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ , причём  $\angle AKB = 60^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

**Решение.**

Проведём через точку  $D$  прямую, параллельную диагонали  $AC$ . Дуги  $AL$  и  $CD$  равны, следовательно, равны и стягивающие их хорды:  $AL = CD = 10$ .

Вертикальные углы  $AKB$  и  $CKD$  равны. Углы  $CKD$  и  $LDK$  равны как накрест лежащие:  $\angle CKD = \angle LDK = 60^\circ$ .

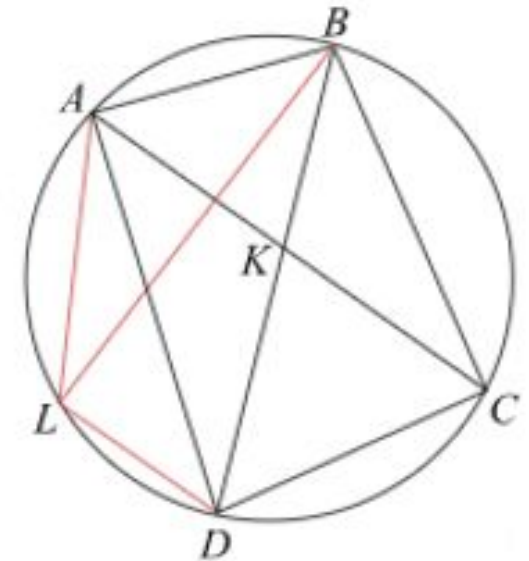
Четырёхугольник  $ABDL$  вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны  $180^\circ$ , откуда  $\angle LAB = 180^\circ - \angle LDK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Рассмотрим треугольник  $ABL$ . По теореме косинусов:

$$BL = \sqrt{AL^2 + AB^2 - 2AL \cdot AB \cos 120^\circ} = \sqrt{100 + 1600 - 2 \cdot 10 \cdot 40 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{2100}.$$

Найдём радиус описанной вокруг треугольника  $ABL$  окружности по теореме синусов:

$$R = \frac{BL}{2 \sin \angle BAL} = \frac{\sqrt{2100}}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{2100}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2100}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2100}{3}} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}.$$



Ответ:  $10\sqrt{7}$ .

## ЗАДАЧА 11 (БАНК ЗАДАНИЙ ОГЭ)

Середина  $M$  стороны  $AD$  выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите  $AD$ , если  $BC = 10$ , а углы  $B$  и  $C$  четырёхугольника равны соответственно  $112^\circ$  и  $113^\circ$ .

**Решение.**

Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны  $180^\circ$ :

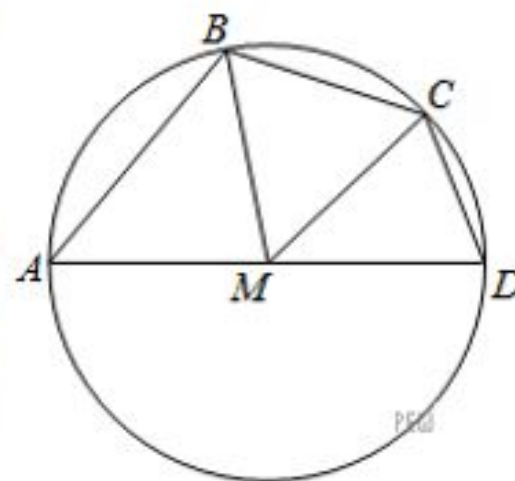
$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 67^\circ.$$

Отрезки  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  равны как радиусы окружности, поэтому треугольники  $ABM$  и  $BMC$  — равнобедренные, откуда  $\angle BAD = \angle ABM = 67^\circ$  и  $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 45^\circ$ . Рассмотрим треугольник  $BMC$ , сумма углов в треугольнике равна  $180^\circ$ , откуда  $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 90^\circ$ . По теореме синусов найдём сторону  $BM$  из треугольника  $BMC$ :

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow BM = 5\sqrt{2}.$$

Сторона  $AD$  — диаметр описанной окружности, поэтому  $AD = 2BM = 10\sqrt{2}$ .

Ответ:  $10\sqrt{2}$ .



# РЕФЛЕКСИЯ

## «Гора успеха»



## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Выполнить в тетради:
- **Задача 1.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5. Угол при вершине, противолежащий основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.
- **Задача 2.** Углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  равны соответственно  $62^\circ$  и  $88^\circ$ . Найдите  $BC$ , если радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равен 12.



## ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ:

- <https://urok.1sept.ru/articles/596417>
- <https://infourok.ru/zadachi-s-prakticheskim-soderzhaniem-na-primenenie-teorem-sinusoov-i-kosinusoov-2038389.html>
- [https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/primienieniie\\_tieoriemy\\_sinusoov\\_i\\_kosinusoov](https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/primienieniie_tieoriemy_sinusoov_i_kosinusoov)
- <https://oge.sdamgia.ru/search?search=теорема%20синусов&cb=1&body=3&solution=1&text=2&keywords=10&category=&page=1>
- <https://oge.sdamgia.ru/search?search=теорема%20косинусов&cb=1&body=3&solution=1&text=2&keywords=10&page=1>
- [https://math100.ru/geometria7-9\\_10\\_2/](https://math100.ru/geometria7-9_10_2/)
- [https://math100.ru/geometria7-9\\_10\\_3/](https://math100.ru/geometria7-9_10_3/)