Задание №15: отрезки

Время выполнения: 3 минуты

Функция для отрицания

В Питоне есть встроенное отрицание not, но с ним надо быть аккуратнее, т.к. при его использовании может нарушиться порядок выполнения операций.

Чтобы избежать ошибок, можно написать собственную функцию для отрицания:

```
def NOT(x):
  return not x
```

Эта функция позволит избежать проблемы с нарушенным порядком выполнения операций.

Логические операции в Питоне

Для отрицания ¬ будем использовать собственную функцию NOT с предыдущего слайда.

Конъюнкция $\wedge$ заменяется на **and**
Дизъюнкция $\vee$ в Питоне заменяется на **or**
Эквиваленция ≡ в Питоне пишется как **==**
Не равно ≠ в Питоне обозначается как **!=**
Импликацию → можно реализовать через сравнение: **<=**

Задача 1

Задача 1

На числовой прямой даны два отрезка: P = [8, 50] и Q = [27, 76].

Отрезок A таков, что формула

$$\neg (x \in A) \to \neg (\neg (x \in P) \to (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x. Какова наибольшая возможная длина отрезка A?

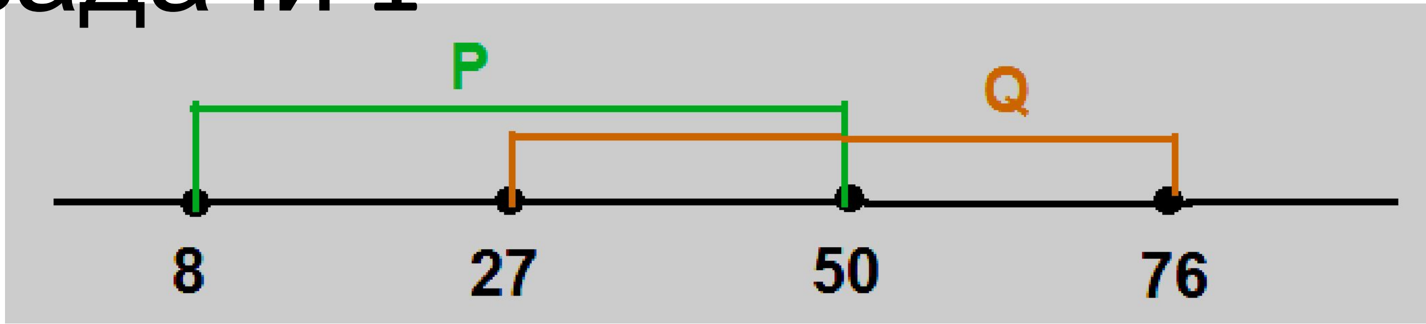
Алгоритм решения.

1. Избавиться в формуле от импликации, инверсии и знаков принадлежности (∈).
2. Изобразить отрезки на числовой оси.
3. Построить таблицу истинности для каждого отрезка на прямой.

Решение.

$$\overline{A} \to \overline{(\overline{P} \to Q)} = \overline{A} \to \overline{(\overline{P} \to Q)} = A \vee \overline{(P \vee Q)} = A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Решение задачи 1



Точки (8, 27, 50 и 76) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить значение логического выражения

	P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{P} * \overline{Q}$	A	$A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$
8< x<27	1	0	0	1	0	1	1
27<x<50	1	0	1	0	0	1	1
50<x<76	0	1	1	0	0	1	1

значения формул на концах отрезков не рассматриваются , так как это не влияет на решение.

Решение задачи 1

	P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{P} * \overline{Q}$	A	$A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$
8< x<27	1	0	0	1	0	1	1
27<x<50	1	0	1	0	0	1	1
50<x<76	0	1	1	0	0	1	1

По условию выражение $A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$ должно быть равно 1 при любых значениях

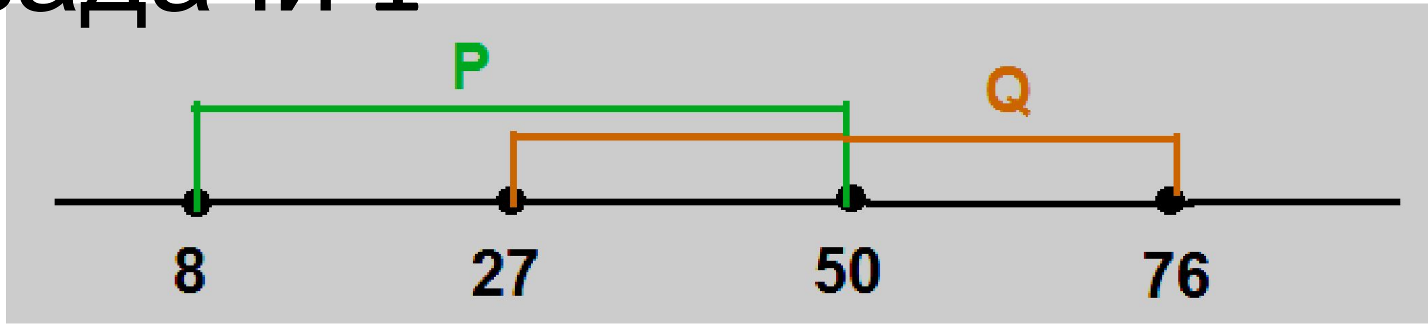
***x*,**

отсюда можно найти, каким должно быть значение А для каждого интервала.

Проанализировав таблицу видим, что наибольшая длина отрезка А → 76-8 =68

Ответ: 68

Решение задачи 1



Для того, чтобы решить задание, требуется упростить исходную формулу и построить таблицу истинности для каждого отрезка на прямой. Это можно сделать не только математически, но и с помощью ***программы на Питоне***.

P = [8, 50], Q = [27, 76], F = $\neg (x \in A) \rightarrow \neg(\neg(x \in P) \rightarrow (x \in Q))$

```python
def NOT(x):
    return not x

P = range(8, 50 + 1)
Q = range(27, 76 + 1)
for x in [10, 30, 60]:
    for ans in [True, False]:
        F = NOT(ans) <= NOT(NOT(x in P) <= (x in Q))
        if F == True:
            print(x, ans)
```

В программе нужно изменять только код, выделенный красным.

На следующем слайде объяснение того, как работает программа.

Решение задачи 1

С помощью следующих двух строчек кода:

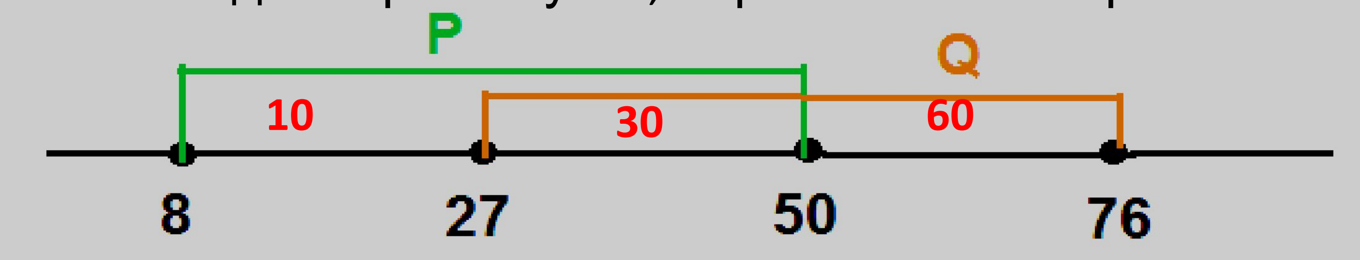
```
P = range(8, 50 + 1)
Q = range(27, 76 + 1)
```

генерируются отрезки [8; 50] и [27, 76]. +1 нужен потому, что range в Питоне работает немного "странно": range(A, B) возвращает все числа в промежуте [A; **B-1**]. Т.е. число B в список чисел не попадает! Поэтому мы всегда пишем range(A, B**+1**).

С помощью кода

```
for x in [10, 30, 60]:
```

перебираются числа из каждого промежутка, образованного отрезками P и Q:



Числа необязательно должны быть именно такими, например, вместо числа 10 можно было взять 9 или 26, т.е. любое другое число из интервала (8; 27).

Решение задачи 1

Исходное выражение:

$\neg (x \in A) \to \neg(\neg(x \in P) \to (x \in Q))$

Выражения F в коде:

F = NOT(**ans**) <= NOT(NOT(x in P) <= (x in Q))

Везде, где в исходном выражении написано $x \in A$, в коде надо написать просто ans. Эта часть позволяет определить, входит ли X из промежутка в A. Если ans = True и F = True, то X входит в A, а если F = True, а ans = False, то X не входит в A.

```
def NOT(x):
    return not x

P = range(8, 50 + 1)
Q = range(27, 76 + 1)
for x in [10, 30, 60]:
    for ans in [True, False]:
        F = NOT(ans) <= NOT(NOT(x in P) <= (x in Q))
        if F == True:
            print(x, ans)
```

Для того, чтобы построить таблицу истинности, требуется изменять только строчки, выделенные красным.

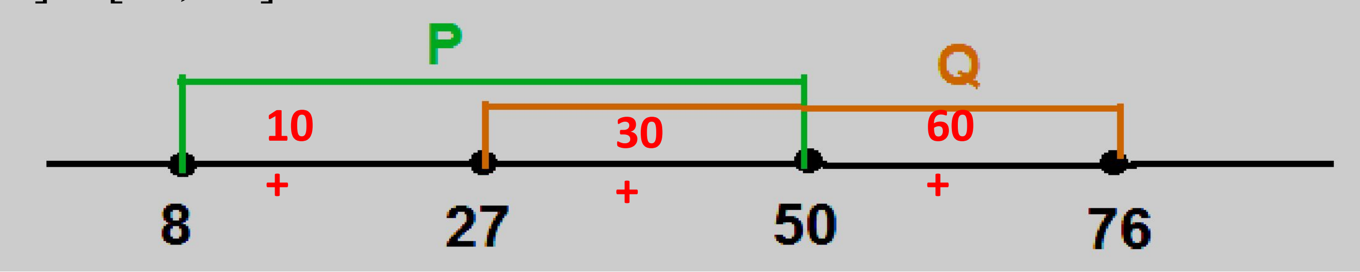
Решение задачи 1

Вывод программы полностью совпадает с таблицей, полученной математически:

```
10 True
30 True
60 True
```

	P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{P} * \overline{Q}$	A	$A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$
8< x<27	1	0	0	1	0	1	1
27<x<50	1	0	1	0	0	1	1
50<x<76	0	1	1	0	0	1	1

Для чисел 10, 30 и 60 выводится только True. Это значит, что нам подходят промежутки [8; 27], [27; 50] и [50; 76].



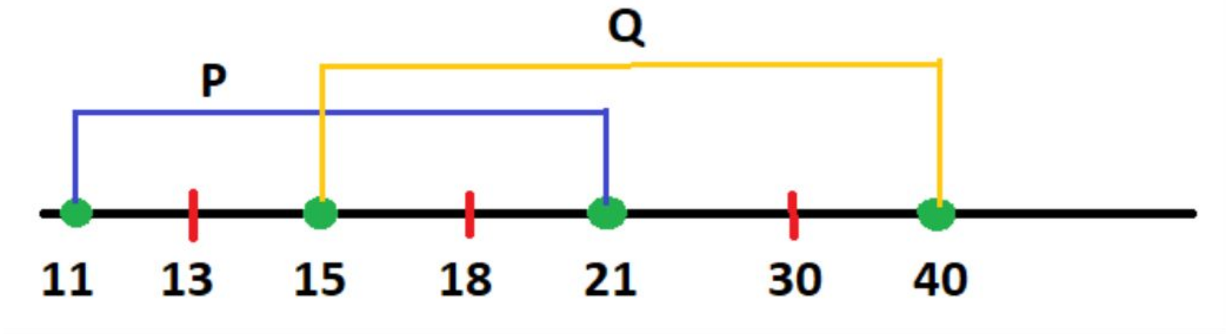
Поскольку требовалось найти наибольшую возможную длину A, объединяем подходящие промежутки (все промежутки со знаком +) и получаем отрезок [8; 76]. Его длина: 77 - 8 = 68. Это ответ.

Задача 2

На числовой прямой даны два отрезка: P = [11, 21] и Q = [15, 40].
Укажите наибольшую возможную длину промежутка A, для которого формула

$$(x \in A) \to \neg((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

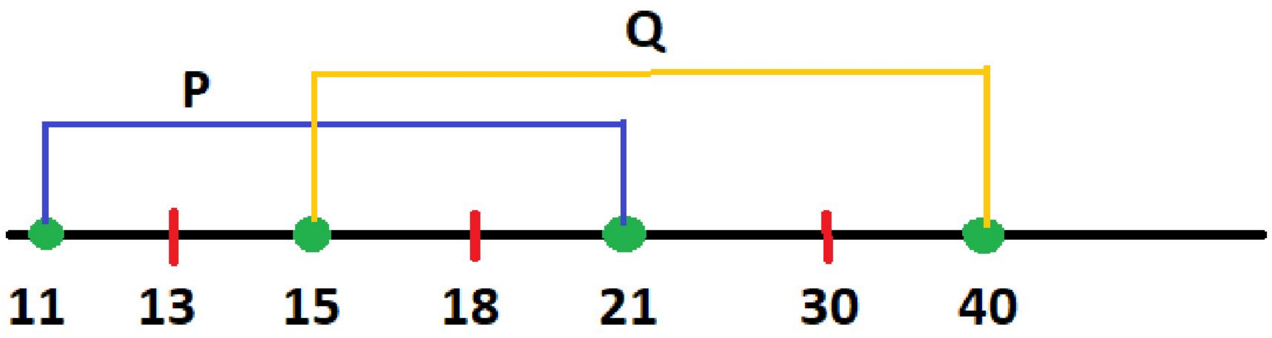


Преобразуем

E

$$\overline{(a \equiv b)} = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

$$\overline{A} + P * \overline{Q} + \overline{P} * Q = 1$$



$$\overline{A} + P * \overline{Q} + \overline{P} * Q = 1$$

	P	¬P	Q	¬Q	P *¬Q	¬P*Q	+	¬A	A
11< x < 15	1	0	0	1	1	0	1	0/1	0/1
15< x < 21	1	0	1	0	0	0	0	1	0
21< x < 40	0	1	1	0	0	1	1	0/1	0/1

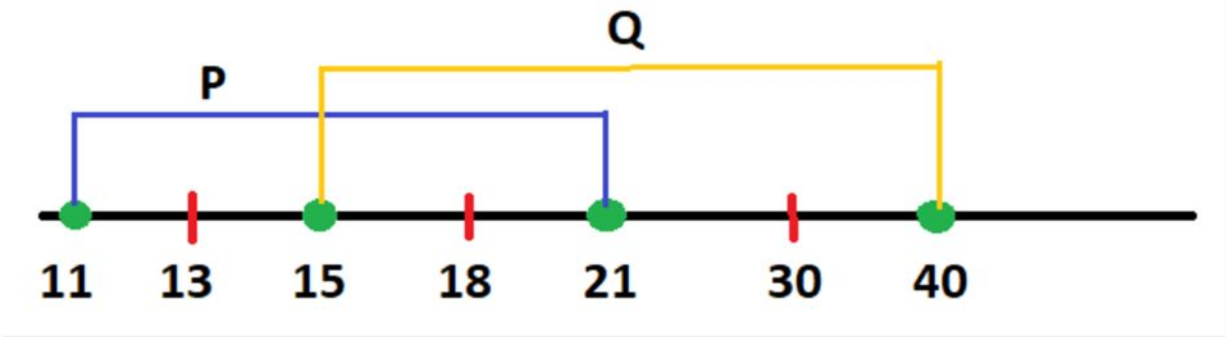
	P	¬P	Q	¬Q	P *¬Q	¬P*Q	+	¬A	A
11< x < 15	1	0	0	1	1	0	1	0/1	0/1
15< x < 21	1	0	1	0	0	0	0	1	0
21< x < 40	0	1	1	0	0	1	1	0/1	0/1

Программа

```
def NOT(x):
    return not x
P=range(11,21+1)
Q=range(15,40+1)
for x in (13,18,30):
    for ans in [True, False]:
        F=  (ans) <= NOT((x in P) == (x in Q))
        if (F)==True:
            print(x, ans)
```

Вывод

```
13 True
13 False
18 False
30 True
30 False
```




```
13 True
13 False
18 False
30 True
30 False
```

Удовлетворяют два отрезка , на которых А=1.
Это [11,15] и   [21,40].
На отрезке [15,21] – А=0!!!
Длины отрезков - 4 и 19
Нужен наибольший- это 19.

Ответ: 19

Про вывод программы

Про вывод программы

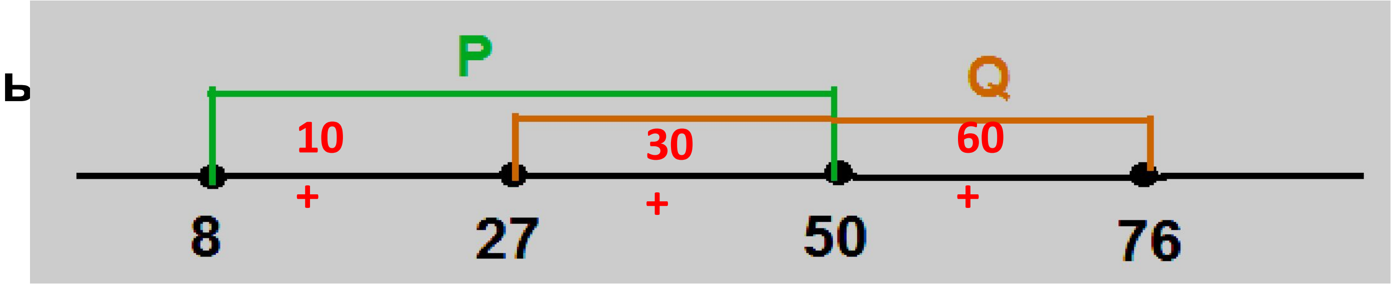
Что означает вывод программы:

- если для конкретного числа выводится только True: отрезок с данным числом ***обязательно*** должен быть включён в ответ
- если для конкретного числа выводится только False: отрезок с данным числом ***нельзя*** включать в ответ
- если для конкретного числа выводится и True, и False: отрезок с данным числом можно включить в ответ, а можно и не включить, всё зависит от вопроса: если просят наибольшее А, отрезок в ответ попадает, если просят наименьшее А, то отрезок попадёт в ответ только в случае, если вокруг него числа с "True". Пример вывода, когда для наименьшего А отрезок с выводом True/False должен попасть в ответ:

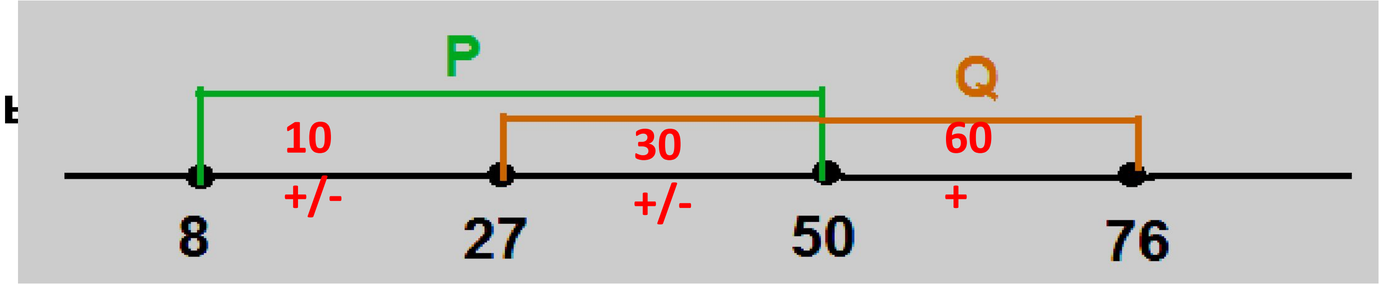
```
20 True
30 True
30 False
40 True
```

ло 30 (и промежуток, к которому 30 относится) ***нельзя***
из ответа, хотя требуется найти наименьшее А. Дело в том, что
40 обязательно должны попасть в ответ. Т.е. и 20, и 40 должны
жать одному отрезку, тогда число 30 тоже попадёт в этот отрезок.

Примеры вывода программы

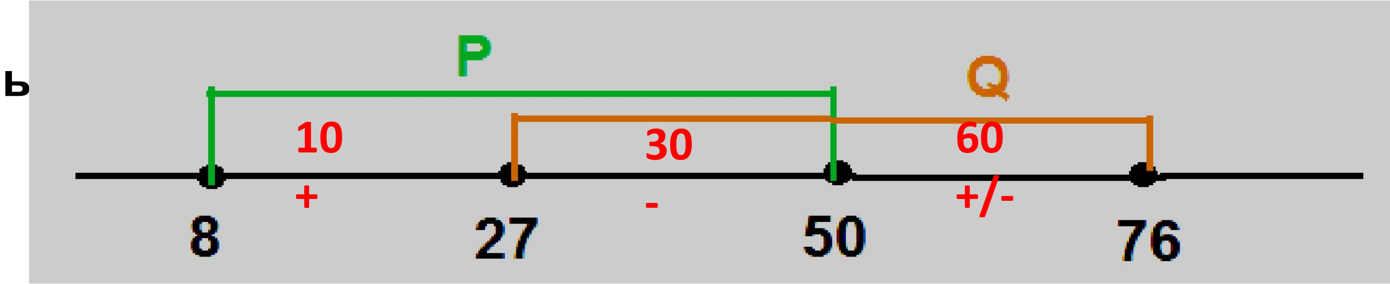


Пример 1. Вывод программы
10 True
30 True
60 True
Наибольший отрезок: [8; 76]
Наименьший отрезок: [8; 76]



Пример 2. Вывод программы
10 True
10 False
30 True
30 False
60 True
Наибольший отрезок: [8; 76]
Наименьший отрезок: [50; 76]

Примеры вывода программы



Пример 3. Вывод программы

10 True

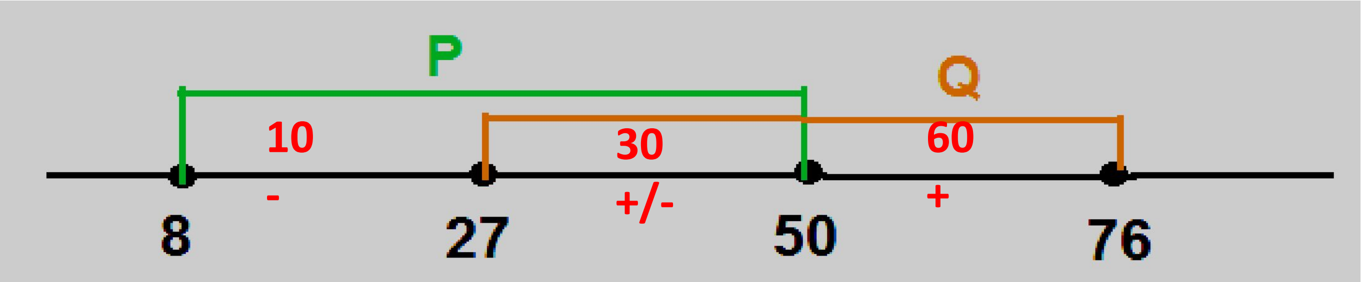
30 False

60 True

60 False

Наибольший отрезок: [8; 27] (мы не можем добавить в него [50; 76], т.к. тогда придётся включить и [37; 50])

Наименьший отрезок: [8; 27]



Пример 4. Вывод программы

10 False

30 True

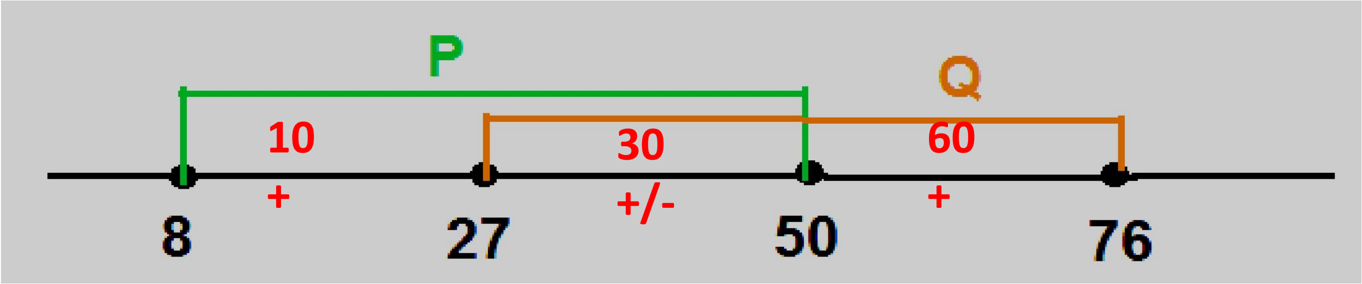
30 False

60 True

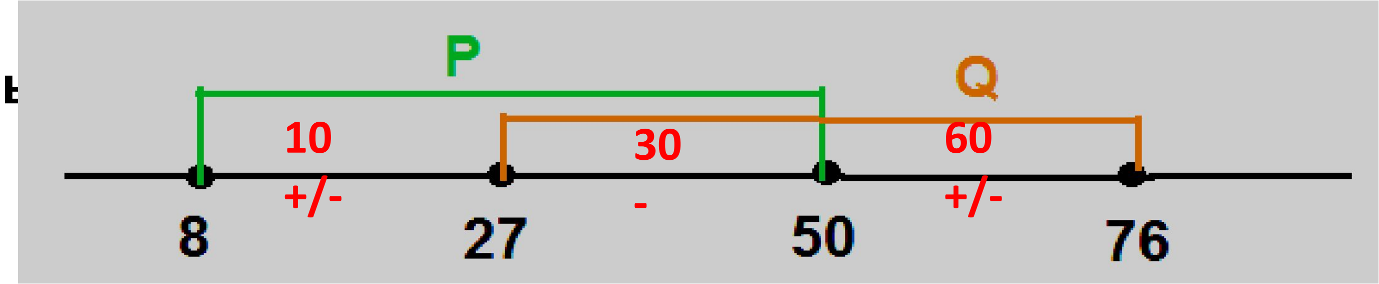
Наибольший отрезок: [27; 76]

Наименьший отрезок: [50; 76]

Примеры вывода программы



Пример 5. Вывод программы:
10 True
30 True
30 False
60 True
Наибольший отрезок: [8; 76]
Наименьший отрезок: [8; 76] (кусок [27; 50] нельзя выкинуть, потому что отрезки слева и справа должны обязательно попасть в ответ).



Пример 6. Вывод программы
10 True
10 False
30 False
60 True
60 False
Наибольший отрезок: [50; 76] (у него длина больше, чем у отрезка [8; 27])
Наименьший отрезок: можно ни один отрезок не включать в ответ

Задача 3

Задача 3

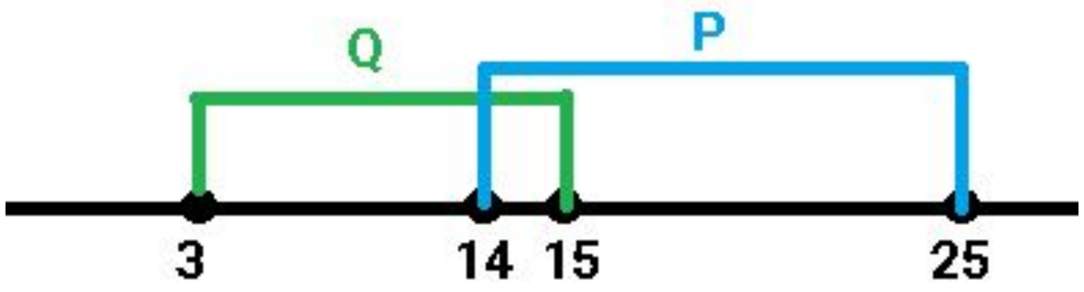
На числовой прямой даны два отрезка: P = [3; 15] и Q = [14;25]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \to (x \in A)$$

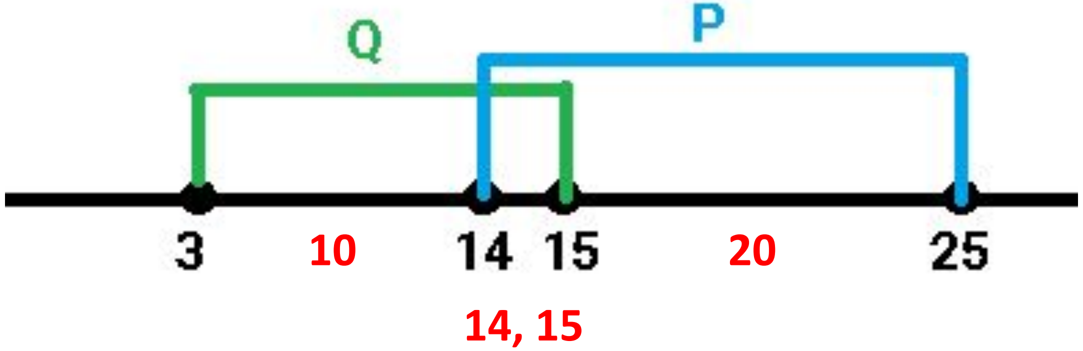
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение задачи 3

Отметим границы отрезков на прямой:



Видно, что отрезок посередине выродился в две точки, т.е. внутри отрезка нет точки, которую можно для проверки. В таком случае можно взять обе точки, 14 и 15:



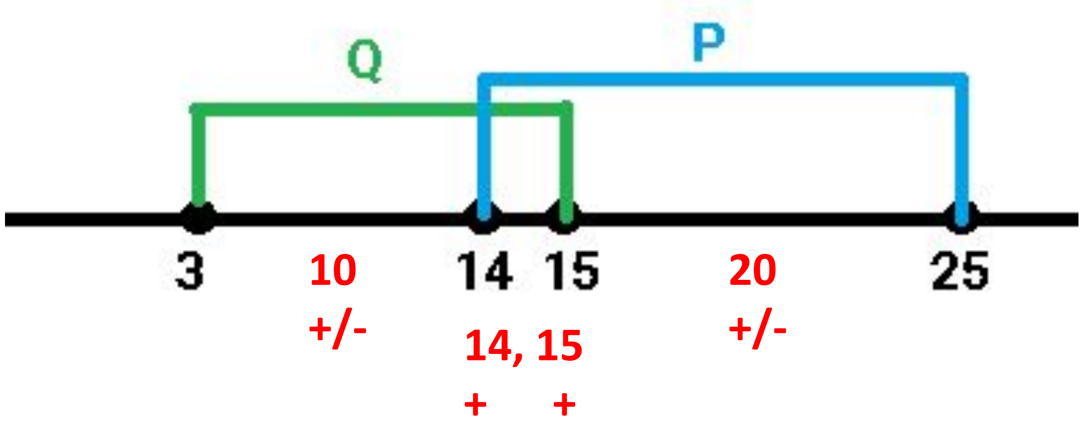

```
P = range(3, 15 + 1)
Q = range(14, 25 + 1)

for x in [10, 14, 15, 20]:
    for ans in [True, False]:
        F = ((x in P) == (x in Q)) <= (ans)
        if F == True:
            print(x, ans)
```

Решение задачи 3

Вывод программы:

```
10 True
10 False
14 True
15 True
20 True
20 False
```



Наибольшая возможная длина A в данном случае будет равна 25 – 3 = 22. Это ответ.

Если бы спрашивали ***наименьшую*** возможную длину, надо было бы взять отрезок [14; 15], т. к. только для него выводится True (для остальных отрезков – True/False). В таком случае ответ был бы 15 – 14 = 1.

Самостоятельно

Самостоятельно

1) На числовой прямой даны два отрезка: P = [8; 12] и Q = [4;30]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \to \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

2) На числовой прямой даны два отрезка: P = [25, 37] и Q = [32, 47]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in \mathrm{A}) \wedge \neg(x \in \mathrm{P})) \to (\neg(x \in \mathrm{P}) \wedge (x \in \mathrm{Q}))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x. Какова наибольшая возможная длина отрезка A?

Самостоятельно

3) На числовой прямой даны два отрезка: P = [12, 28] и Q = [15, 30]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \notin Q) \vee (x \in A))$$

истинна при любом значении переменной x. Определите наименьшую возможную длину отрезка A.

4) На числовой прямой даны два отрезка: P = [8, 16] и Q = [25, 40]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной x. Определите наименьшую возможную длину отрезка A.

Самостоятельно

5) На числовой прямой даны два отрезка: P = [21, 25] и Q = [8, 35]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

истинна при любом значении переменной x. Какое наибольшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок A?

6) На числовой прямой даны два отрезка: P = [12, 28] и Q = [8, 16]. Отрезок A таков, что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной x. Какое наибольшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок A?

Самостоятельно

7) На числовой прямой даны два отрезка: P = [10, 18] и Q = [8 ,30]. Отрезок A таков, что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной x. Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок A?

8) На числовой прямой даны два отрезка: P = [12, 23] и Q = [8, 30]. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной x. Какое наименьшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок A?

Самостоятельно

1) 18
2) 22
3) 18
4) 32
5) 7
6) 6
7) 4
8) 6