

Задание №15: отрезки

Время выполнения: 3 минуты

Функция для отрицания

В Питоне есть встроенное отрицание `not`, но с ним надо быть аккуратнее, т.к. при его использовании может нарушиться порядок выполнения операций.

Чтобы избежать ошибок, можно написать собственную функцию для отрицания:

```
def NOT(x):  
    return not x
```

Эта функция позволит избежать проблемы с нарушенным порядком выполнения операций.

Логические операции в Питоне

Для отрицания \neg будем использовать собственную функцию NOT с предыдущего слайда.

Конъюнкция \wedge заменяется на **and**

Дизъюнкция \vee в Питоне заменяется на **or**

Эквиваленция \equiv в Питоне пишется как **==**

Не равно \neq в Питоне обозначается как **!=**

Импликацию \rightarrow можно реализовать через сравнение: **<=**

Задача 1

Задача 1

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8, 50]$ и $Q = [27, 76]$.

Отрезок A таков, что формула

$$\neg (x \in A) \rightarrow \neg (\neg (x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

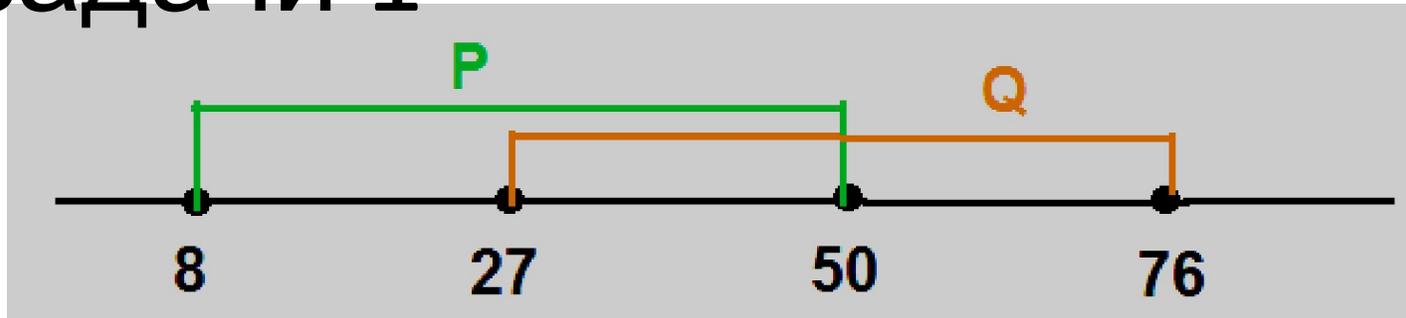
Алгоритм решения.

1. Избавиться в формуле от импликации, инверсии и знаков принадлежности (\in).
2. Изобразить отрезки на числовой оси.
3. Построить таблицу истинности для каждого отрезка на прямой.

Решение.

$$\overline{A} \rightarrow \overline{(\overline{P} \rightarrow Q)} = \overline{A} \rightarrow \overline{(\overline{P} \rightarrow Q)} = A \vee \overline{(\overline{P} \rightarrow Q)} = A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Решение задачи 1



Точки (8, 27, 50 и 76) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить значение логического выражения

| | P | \overline{P} | Q | \overline{Q} | $\overline{P} * \overline{Q}$ | A | $A \vee \overline{P} \wedge \overline{Q}$ |
|---------------|-----|----------------|-----|----------------|-------------------------------|-----|---|
| $8 < x < 27$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $27 < x < 50$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $50 < x < 76$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

значения формул на концах отрезков не рассматриваются, так как это не влияет на решение.

Решение задачи 1

| | P | \bar{P} | Q | \bar{Q} | $\bar{P} * \bar{Q}$ | A | $A \vee \bar{P} \wedge \bar{Q}$ |
|---------------|-----|-----------|-----|-----------|---------------------|-----|---------------------------------|
| $8 < x < 27$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $27 < x < 50$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $50 < x < 76$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

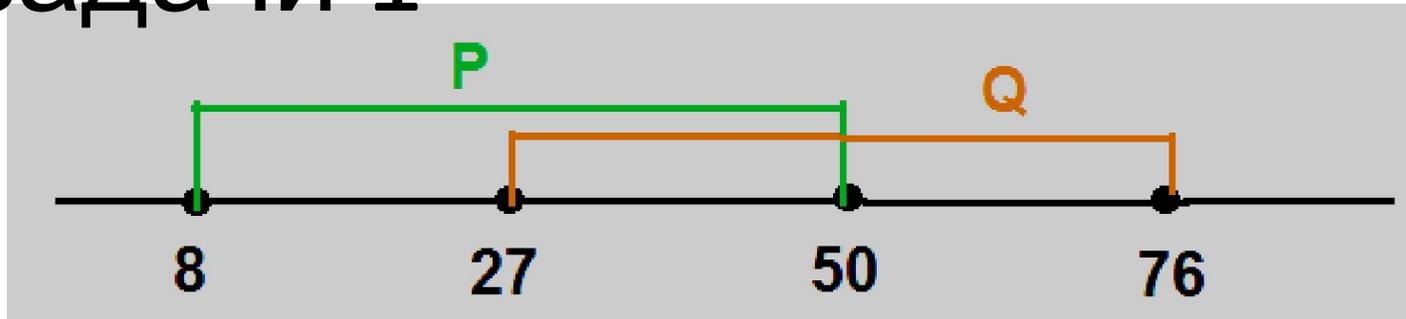
По условию выражение $A \vee \bar{P} \wedge \bar{Q}$ должно быть равно 1 при любых значениях x ,

отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала.

Проанализировав таблицу видим, что наибольшая длина отрезка $A \rightarrow 76 - 8 = 68$

Ответ: 68

Решение задачи 1



Для того, чтобы решить задание, требуется упростить исходную формулу и построить таблицу истинности для каждого отрезка на прямой. Это можно сделать не только математически, но и с помощью **программы на Питоне**.

$P = [8, 50]$, $Q = [27, 76]$, $F = \neg (x \in A) \rightarrow \neg (\neg (x \in P) \rightarrow (x \in Q))$

```
def NOT(x):  
    return not x  
  
P = range(8, 50 + 1)  
Q = range(27, 76 + 1)  
for x in [10, 30, 60]:  
    for ans in [True, False]:  
        F = NOT(ans) <= NOT(NOT(x in P) <= (x in Q))  
        if F == True:  
            print(x, ans)
```

В программе нужно изменять только код, выделенный красным.

На следующем слайде объяснение того, как работает программа.

Решение задачи 1

С помощью следующих двух строчек кода:

```
P = range(8, 50 + 1)
```

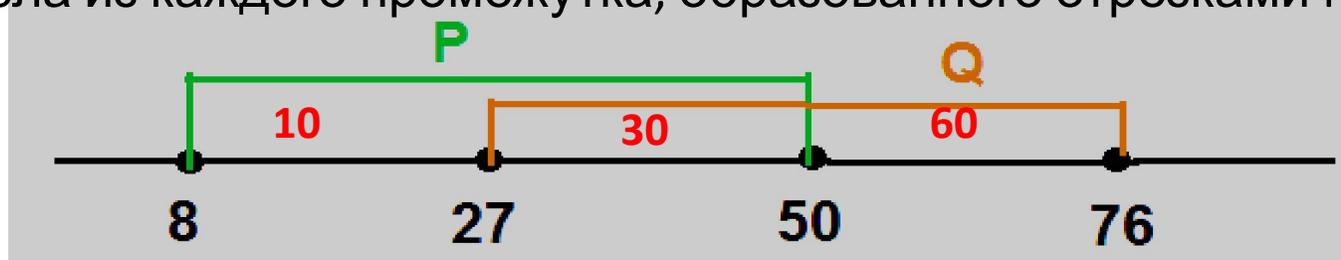
```
Q = range(27, 76 + 1)
```

генерируются отрезки [8; 50] и [27, 76]. +1 нужен потому, что range в Питоне работает немного "странно": range(A, B) возвращает все числа в промежутке [A; B-1]. Т.е. число B в список чисел не попадает! Поэтому мы всегда пишем range(A, B+1).

С помощью кода

```
for x in [10, 30, 60]:
```

перебираются числа из каждого промежутка, образованного отрезками P и Q:



Числа необязательно должны быть именно такими, например, вместо числа 10 можно было взять 9 или 26, т.е. любое другое число из интервала (8; 27).

Решение задачи 1

Исходное выражение:

$$\neg (x \in A) \rightarrow \neg (\neg (x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

Выражения F в коде:

$$F = \text{NOT}(\text{ans}) \leq \text{NOT}(\text{NOT}(x \text{ in } P) \leq (x \text{ in } Q))$$

Везде, где в исходном выражении написано $x \in A$, в коде надо написать просто ans. Эта часть позволяет определить, входит ли X из промежутка в A. Если ans = True и F = True, то X входит в A, а если F = True, а ans = False, то X не входит в A.

```
def NOT(x):
    return not x

P = range(8, 50 + 1)
Q = range(27, 76 + 1)
for x in [10, 30, 60]:
    for ans in [True, False]:
        F = NOT(ans) <= NOT(NOT(x in P) <= (x in Q))
        if F == True:
            print(x, ans)
```

Для того, чтобы построить таблицу истинности, требуется изменять только строки, выделенные красным.

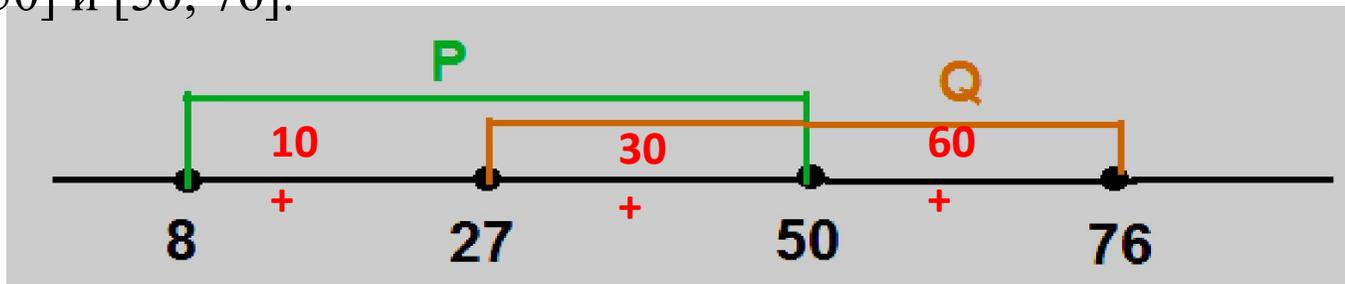
Решение задачи 1

Вывод программы полностью совпадает с таблицей, полученной математически:

```
10 True
30 True
60 True
```

| | P | \bar{P} | Q | \bar{Q} | $\bar{P} * \bar{Q}$ | A | $A \vee \bar{P} \wedge \bar{Q}$ |
|---------------|-----|-----------|-----|-----------|---------------------|-----|---------------------------------|
| $8 < x < 27$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $27 < x < 50$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $50 < x < 76$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Для чисел 10, 30 и 60 выводится только True. Это значит, что нам подходят промежутки $[8; 27]$, $[27; 50]$ и $[50; 76]$.



Поскольку требовалось найти наибольшую возможную длину A , объединяем подходящие промежутки (все промежутки со знаком +) и получаем отрезок $[8; 76]$. Его длина: $77 - 8 = 68$. Это ответ.

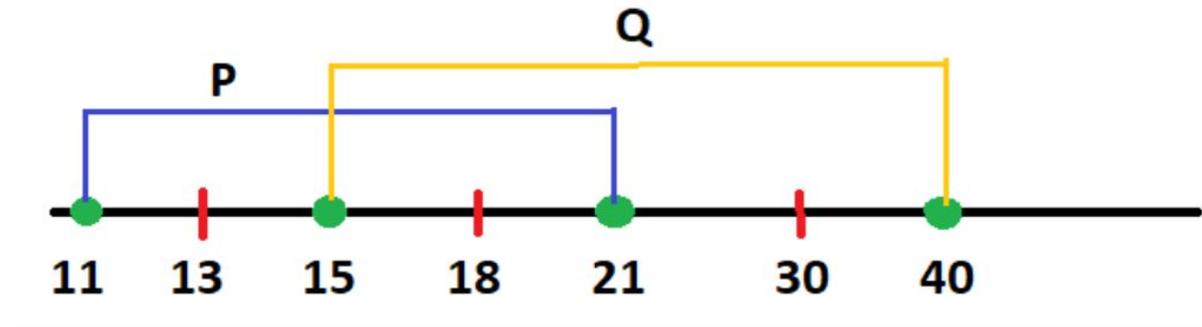
Задача 2

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [11, 21]$ и $Q = [15, 40]$.

Укажите наибольшую возможную длину промежутка A , для которого формула

$$(x \in A) \rightarrow \neg((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

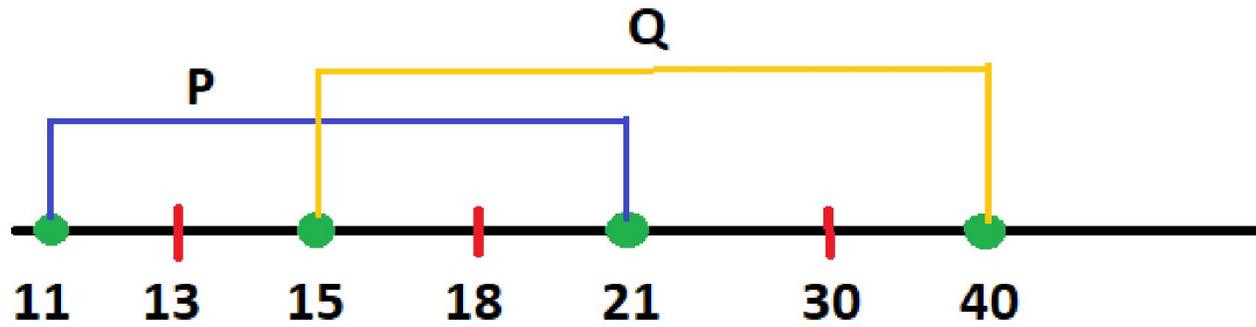
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .



Преобразуем

$$\overline{(a \equiv b)} = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$\bar{A} + P * \bar{Q} + \bar{P} * Q = 1$$



$$\bar{A} + P * \bar{Q} + \bar{P} * Q = 1$$

| | P | $\neg P$ | Q | $\neg Q$ | $P * \neg Q$ | $\neg P * Q$ | + | $\neg A$ | A |
|---------------|---|----------|---|----------|--------------|--------------|---|----------|------------|
| $11 < x < 15$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0/1 | 0/1 |
| $15 < x < 21$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $21 < x < 40$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0/1 | 0/1 |

| | P | $\neg P$ | Q | $\neg Q$ | $P * \neg Q$ | $\neg P * Q$ | + | $\neg A$ | A |
|---------------|---|----------|---|----------|--------------|--------------|---|----------|-----|
| $11 < x < 15$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0/1 | 0/1 |
| $15 < x < 21$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $21 < x < 40$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0/1 | 0/1 |

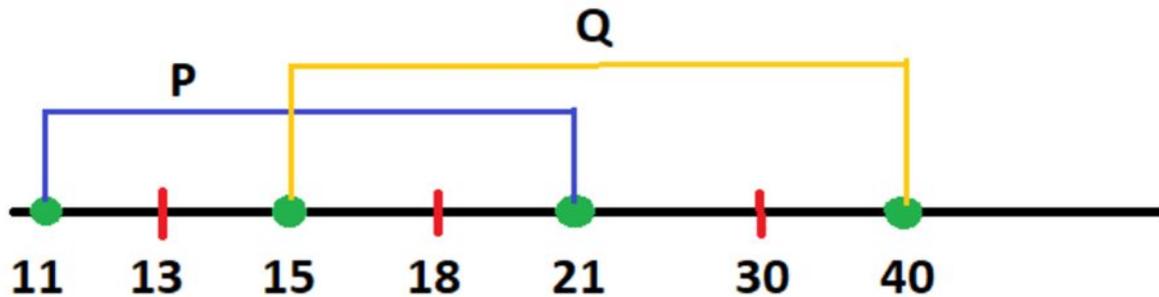
Программ

```
def NOT(x):
    return not x
P=range(11,21+1)
Q=range(15,40+1)
for x in (13,18,30):
    for ans in [True, False]:
        F= (ans) <= NOT((x in P) == (x in Q))
        if (F)==True:
            print(x, ans)
```

ВЫВО

Д

```
13 True
13 False
18 False
30 True
30 False
```



```

13 True
13 False
18 False
30 True
30 False

```

Удовлетворяют два отрезка , на которых $A=1$.

Это $[11,15]$ и $[21,40]$.

На отрезке $[15,21]$ – $A=0!!!$

Длины отрезков - 4 и 19

Нужен наибольший- это 19.

Ответ: 19

Про вывод программы

Про вывод программы

Что означает вывод программы:

- если для конкретного числа выводится только True: отрезок с данным числом **обязательно** должен быть включён в ответ
- если для конкретного числа выводится только False: отрезок с данным числом **нельзя** включать в ответ
- если для конкретного числа выводится и True, и False: отрезок с данным числом можно включить в ответ, а можно и не включить, всё зависит от вопроса: если просят наибольшее A, отрезок в ответ попадает, если просят наименьшее A, то отрезок попадёт в ответ только в случае, если вокруг него числа с "True". Пример вывода, когда для наименьшего A отрезок с выводом True/False должен попасть в ответ:

```
20 True
30 True
30 False
40 True
```

ло 30 (и промежуток, к которому 30 относится) **нельзя**

из ответа, хотя требуется найти наименьшее A. Дело в том, что

и 40 обязательно должны попасть в ответ. Т.е. и 20, и 40 должны

падать одному отрезку, тогда число 30 тоже попадёт в этот отрезок.

Примеры вывода программы

Пример 1. Вывод программы

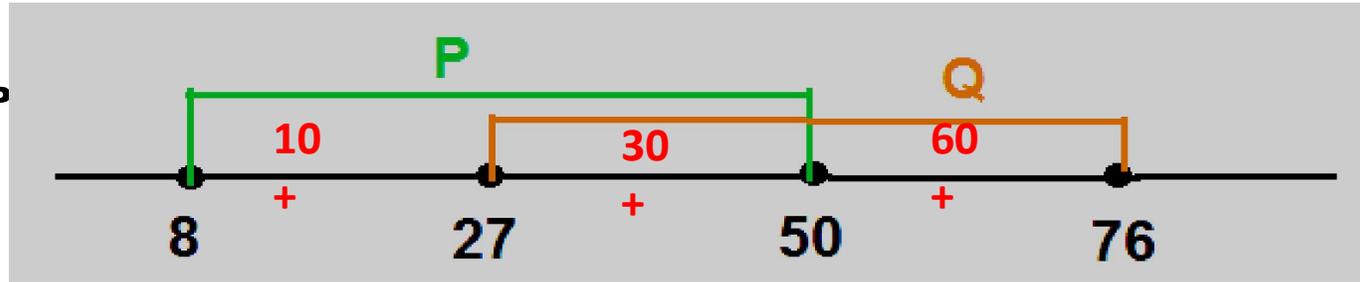
10 True

30 True

60 True

Наибольший отрезок: [8; 76]

Наименьший отрезок: [8; 76]



Пример 2. Вывод программы

10 True

10 False

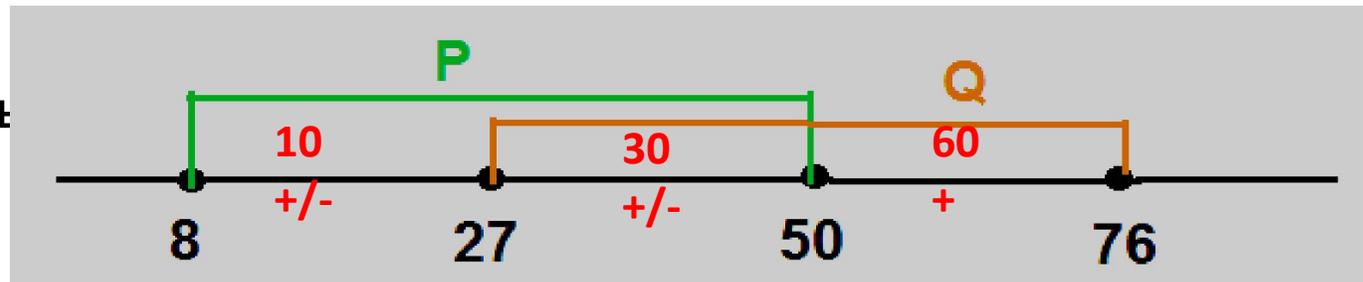
30 True

30 False

60 True

Наибольший отрезок: [8; 76]

Наименьший отрезок: [50; 76]



Примеры вывода программы

Пример 3. Вывод программы

10 True

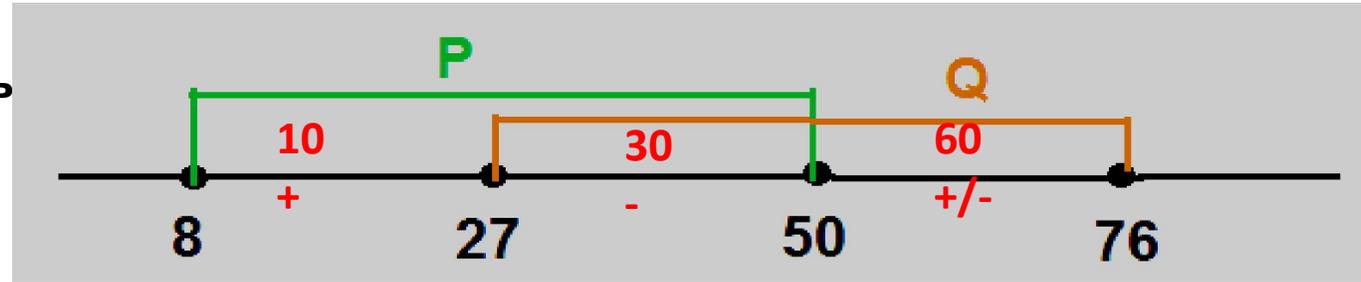
30 False

60 True

60 False

Наибольший отрезок: [8; 27] (мы не можем добавить в него [50; 76], т.к. тогда придётся включить и [37; 50])

Наименьший отрезок: [8; 27]



Пример 4. Вывод программы

10 False

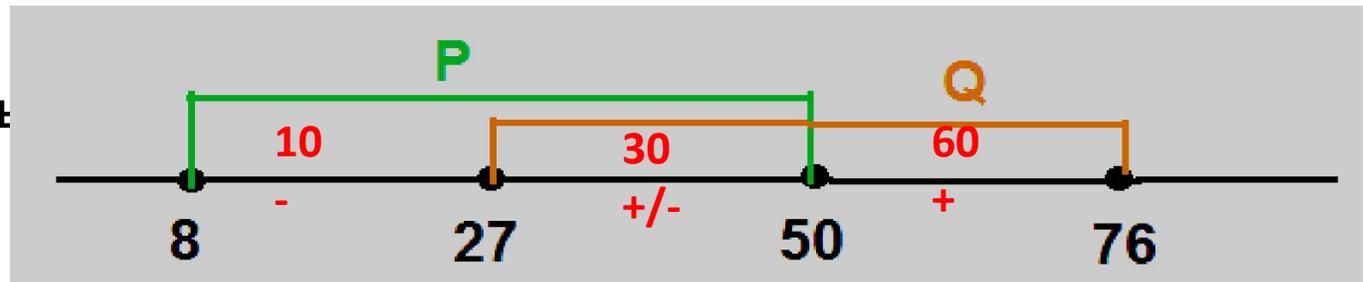
30 True

30 False

60 True

Наибольший отрезок: [27; 76]

Наименьший отрезок: [50; 76]



Примеры вывода программы

Пример 5. Вывод программы:

10 True

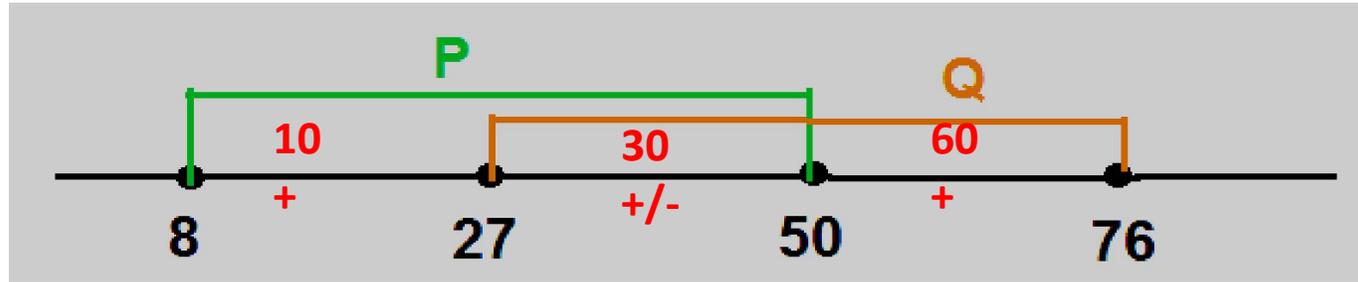
30 True

30 False

60 True

Наибольший отрезок: [8; 76]

Наименьший отрезок: [8; 76] (кусок [27; 50] нельзя выкинуть, потому что отрезки слева и справа должны обязательно попасть в ответ).



Пример 6. Вывод программы

10 True

10 False

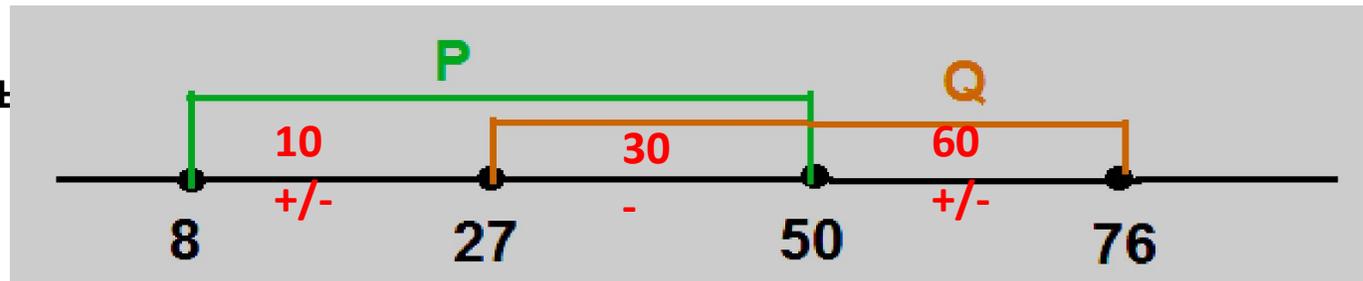
30 False

60 True

60 False

Наибольший отрезок: [50; 76] (у него длина больше, чем у отрезка [8; 27])

Наименьший отрезок: можно ни один отрезок не включать в ответ



Задача 3

Задача 3

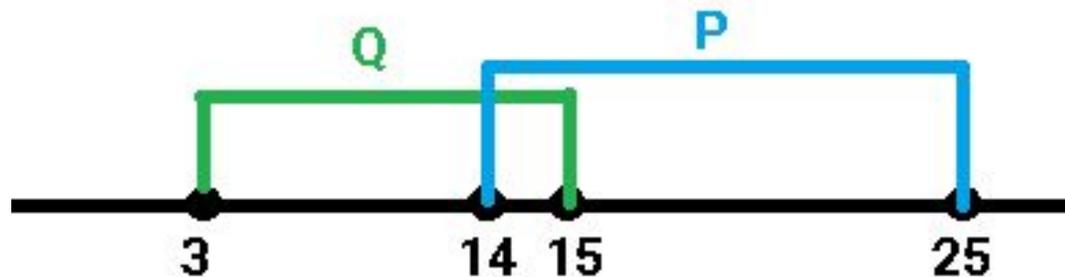
На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3; 15]$ и $Q = [14; 25]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

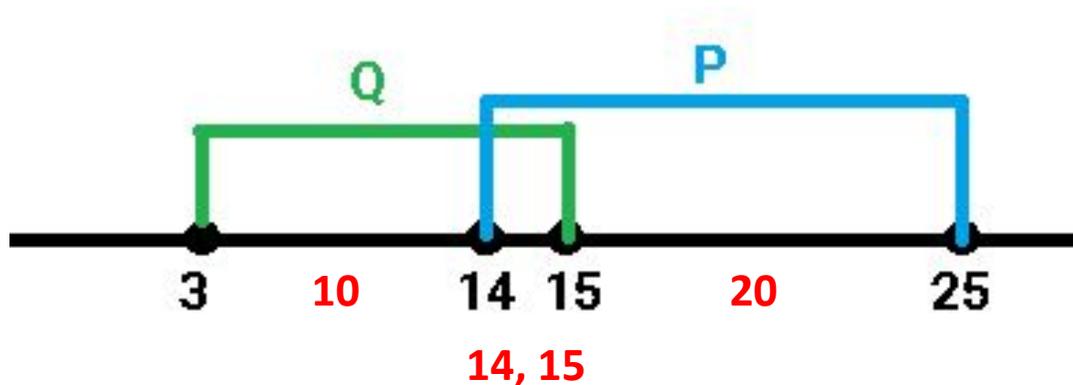
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Решение задачи 3

Отметим границы отрезков на прямой:



Видно, что отрезок посередине выродился в две точки, т.е. внутри отрезка нет точки, которую можно для проверки. В таком случае можно взять обе точки, 14 и 15:



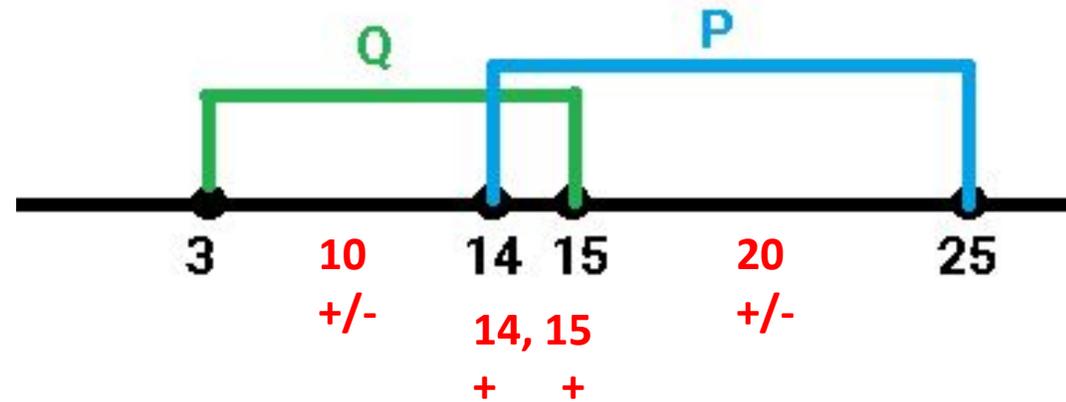
```
P = range(3, 15 + 1)
Q = range(14, 25 + 1)

for x in [10, 14, 15, 20]:
    for ans in [True, False]:
        F = ((x in P) == (x in Q)) <= (ans)
        if F == True:
            print(x, ans)
```

Решение задачи 3

Вывод программы:

```
10 True
10 False
14 True
15 True
20 True
20 False
```



Наибольшая возможная длина A в данном случае будет равна $25 - 3 = 22$. Это ответ.

Если бы спрашивали **наименьшую** возможную длину, надо было бы взять отрезок $[14; 15]$, т. к. только для него выводится True (для остальных отрезков – True/False). В таком случае ответ был бы $15 - 14 = 1$.

Самостоятельно

Самостоятельно

1) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8; 12]$ и $Q = [4; 30]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

2) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [25, 37]$ и $Q = [32, 47]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

Самостоятельно

3) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12, 28]$ и $Q = [15, 30]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \notin Q) \vee (x \in A))$$

истинна при любом значении переменной x . Определите наименьшую возможную длину отрезка A .

4) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8, 16]$ и $Q = [25, 40]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной x . Определите наименьшую возможную длину отрезка A .

Самостоятельно

5) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [21, 25]$ и $Q = [8, 35]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \vee (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

истинна при любом значении переменной x . Какое наибольшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок A ?

6) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12, 28]$ и $Q = [8, 16]$. Отрезок A таков, что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной x . Какое наибольшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок A ?

Самостоятельно

7.) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 18]$ и $Q = [8, 30]$. Отрезок A таков, что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

истинна при любом значении переменной x . Какое наименьшее количество точек, соответствующих нечётным целым числам, может содержать отрезок A ?

8 !) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12, 23]$ и $Q = [8, 30]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in P) \wedge (x \in Q)) \rightarrow (x \in A)$$

истинна при любом значении переменной x . Какое наименьшее количество точек, соответствующих чётным целым числам, может содержать отрезок A ?

Самостоятельно

- 1) 18
- 2) 22
- 3) 18
- 4) 32
- 5) 7
- 6) 6
- 7) 4
- 8) 6