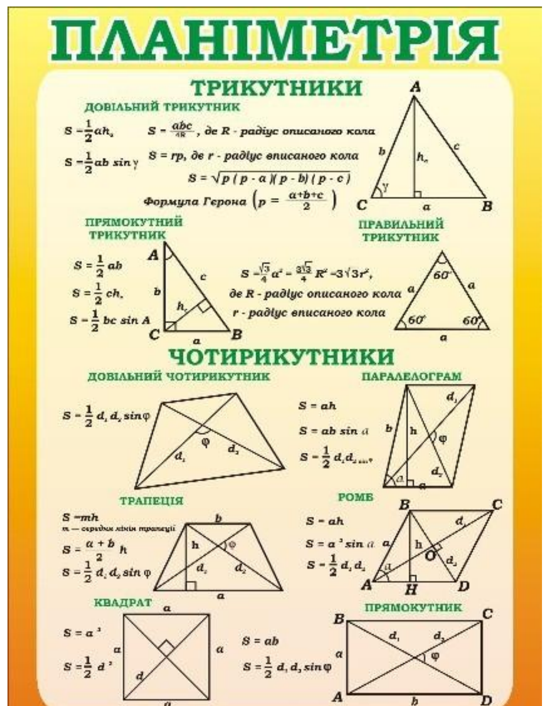
Геометрія

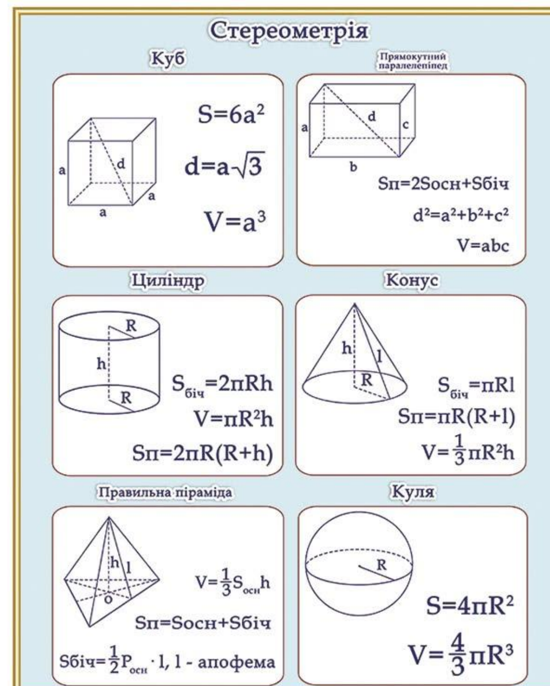
Викладач: *Люль Максим Петрович*

Telegram: Max_Liul

E-mail: maximliul@gmail.com

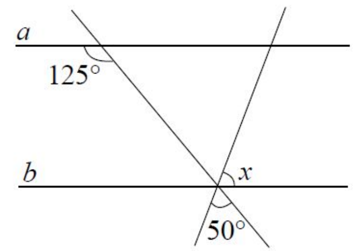
Курс: математика





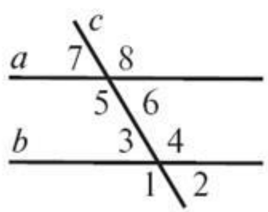
Паралельні прямі та січна

Прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x, зображеного на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
50°	60°	65°	75°	85°

Властивості кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною

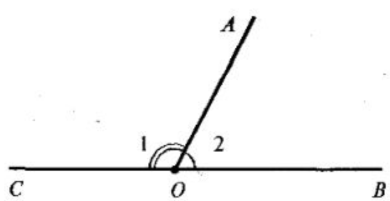
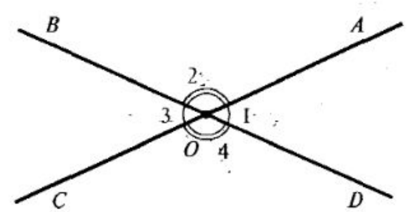


Якщо $a \| b$, c — січна, то:

1) $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні);

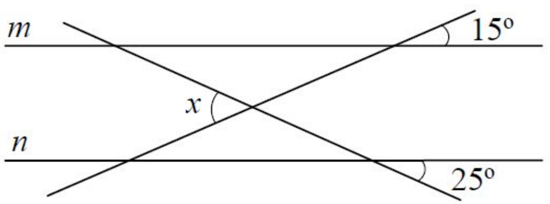
2) $\angle 4 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ (як внутрішні односторонні);

3) $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$ (як відповідні)

Суміжні кути	**Вертикальні кути**
	
$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні	$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні
$\boxed{\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ}$	$\boxed{\angle 1 = \angle 3}$ $\boxed{\angle 2 = \angle 4}$

Паралельні прямі та січна. Приклади

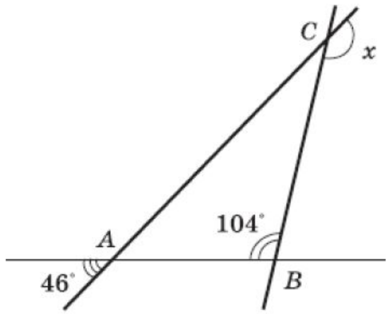
Прямі m і n паралельні.
Обчисліть величину кута x, зображеного на рисунку.



А 40º	Б 45º	В 50º	Г 80º	Д 140º

Сума кутів трикутника

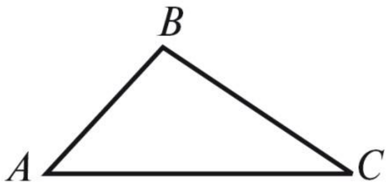
Знайдіть градусну міру кута x, зображеного на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
95°	120°	140°	150°	160°

Сума кутів трикутника

1. Теорема. Якщо дано ΔABC, то $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



2. Наслідки

1) У будь-якому трикутнику хоча б два кути гострі.

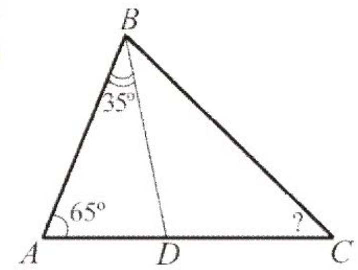
2) Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60°.

3) Якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник є рівностороннім

Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: а) 65° і 45°; б) 120° і 18°; в) 90° і 64°.

Сума кутів трикутника. Приклад

У трикутнику ABC: $\angle A=65^o$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA, якщо $\angle ABD=35^o$.

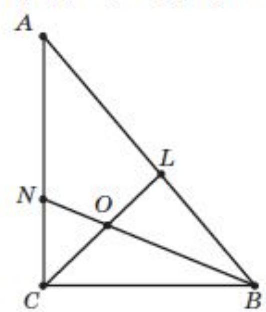


А	Б	В	Г	Д
35º	45º	50º	55º	65º

У трикутнику ABC: $\angle A = 42^o$, $\angle B = 64^o$. Із вершин кутів A і C проведені бісектриси трикутника, що перетинаються в точці O. Знайдіть градусну міру кута AOC.

А	Б	В	Г	Д
76º	106º	111º	122º	127º

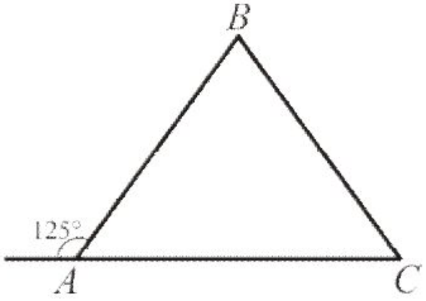
У прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C бісектриси кутів B і C перетинаються в точці O, $\angle BAC = 40°$ (*див. рисунок*). Знайдіть градусну міру кута BOC.



А	Б	В	Г	Д
70°	135°	155°	110°	100°

Рівнобедрений трикутник

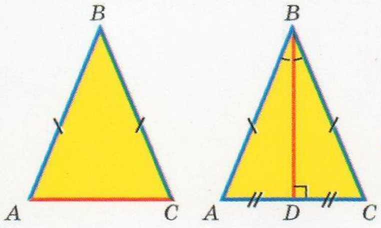
Градусна міра зовнішнього кута A рівнобедреного трикутника ABC ($AB=BC$) дорівнює 125° (див. рисунок). Знайдіть градусну міру внутрішнього кута B.



А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	70°

Таблиця 4

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК



Трикутник називається рівнобедреним, якщо у нього дві сторони рівні

$\triangle ABC$ – рівнобедрений $(AB = BC)$

AC – основа, AB і BC – бічні сторони

ВЛАСТИВОСТІ	ОЗНАКИ
1. Якщо в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (кути при основі рівні)	1. Якщо в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$
2. Якщо $\triangle ABC$ – рівнобедрений і BD – медіана, то BD – висота й бісектриса	2. Якщо в трикутнику збігаються: а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, то трикутник рівнобедрений
У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються	

Знайдіть невідомі кути рівнобедреного трикутника, якщо:

а) кут при його основі дорівнює 40°;

б) кут, протилежний його основі, дорівнює 40°.

Рівень Б

Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть решту кутів. Скільки розв’язків має задача?

Рівнобедрений трикутник

Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині. Знайти кут при вершині.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	15°	140°	10°

Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайти кут при основі трикутника.

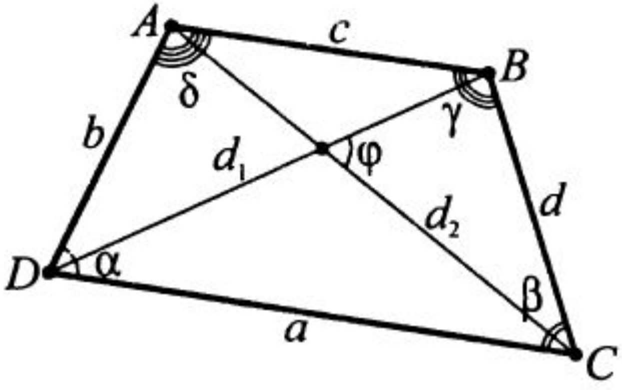
А	Б	В	Г	Д
82°	90°	49°	51°	98°

Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

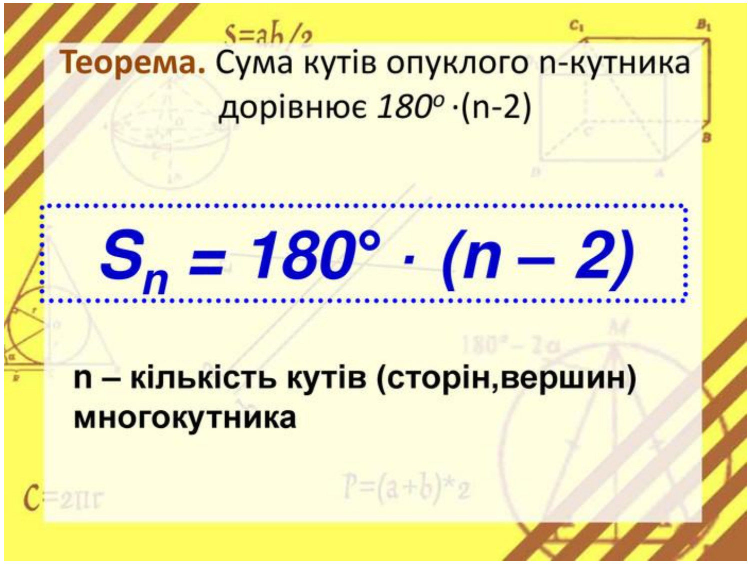
А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

Сума кутів n-кутника

Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 7, 8, 9 і 12.



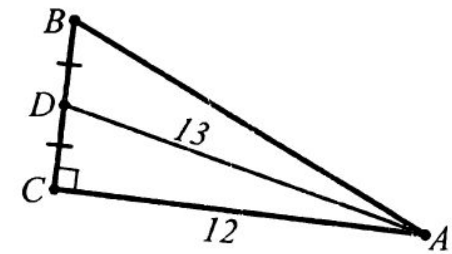
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$



Прямокутний трикутник

Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
5 см	$2\sqrt{61}$ см	25 см	22 см	26 см



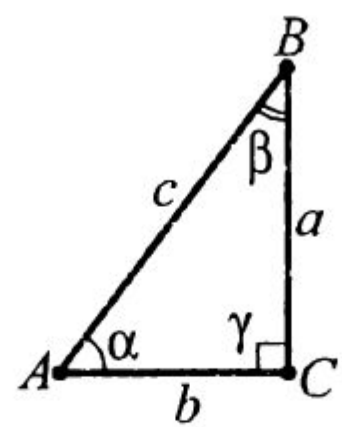
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = \frac{1}{2}ab,\ \ S = \frac{1}{2}ch_c,\ \ S = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{tg}\,\beta,\ \ S = \frac{1}{2}b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Радіус описаного кола: $R = \frac{1}{2}c,\ \ R = m_c.$

Радіус вписаного кола: $r = \frac{a+b-c}{2},\ \ r = \frac{ab}{a+b+c}.$

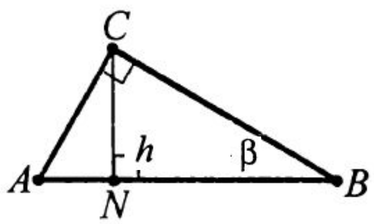
$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$



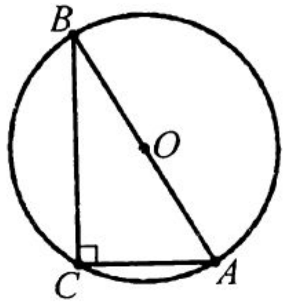
Прямокутний трикутник. Приклад

Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h, а гострий кут — β. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{h}{\sin\beta}$	$h\mathrm{ctg}\beta$	$h\mathrm{tg}\beta$	$\dfrac{h}{\sin\beta\cos\beta}$	$\dfrac{h}{\cos\beta}$



Навколо прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C описано коло (див. рис.). Знайти радіус кола, якщо $AC = 12$ см, $\angle B = 30°$.



Підвищеної складності

Знайти площу прямокутного трикутника у квадратних метрах, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

Прямокутний трикутник. Додаткові задачі

Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
66°	68°	36°	54°	48°

Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b ($a > b$). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

А	Б	В	Г	Д
8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{5}$ см	12 см	$8\sqrt{5}$ см

Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

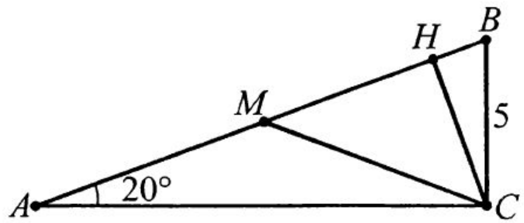
А	Б	В	Г	Д
65 см^2	32,5 см^2	30 см^2	60 см^2	130 см^2

Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А	Б	В	Г	Д
4 см	2 см	8 см	8,5 см	6 см

Прямокутний трикутник. Додаткові задачі

На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), його висоту CH, медіану CM і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 $\angle MCH$
2 $\angle CMH$
3 CM
4 CH

А $\dfrac{5}{2\sin 20°}$
Б $5\sin 20°$
В $50°$
Г $5\sin 70°$
Д $40°$

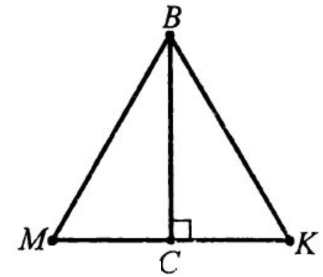
Установити відповідність між катетами a й b (1–4) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета a (А–Д).

1 2 см, 2 см
2 1 см, $\sqrt{3}$ см
3 $\sqrt{3}$ см, 1 см
4 $2-\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см

А 22,5°
Б 45°
В 60°
Г 90°
Д 30°

Рівнобедрений трикутник

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайти периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 8 см.



Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

У рівнобедреному трикутнику *ABC* кут *C* дорівнює 104°. Знайти кут *B*.

А	Б	В	Г	Д
66°	76°	38°	28°	48°

Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між бічними сторонами дорівнює 30°.

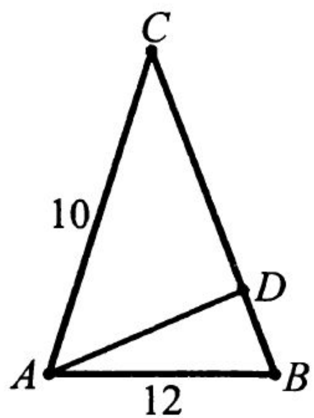
А	Б	В	Г	Д
$8\sqrt{2}$ см^2	$16\sqrt{3}$ см^2	$8\sqrt{3}$ см^2	16 см^2	8 см^2

У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
48 см^2	24 см^2	96 см^2	30 см^2	60 см^2

Рівнобедрений трикутник

На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$), його висоту AD і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 AD

2 $S_{\Delta ABC}$

3 Радіус вписаного кола

4 Радіус описаного кола

А 9,6

Б 6,25

В 3

Г 48

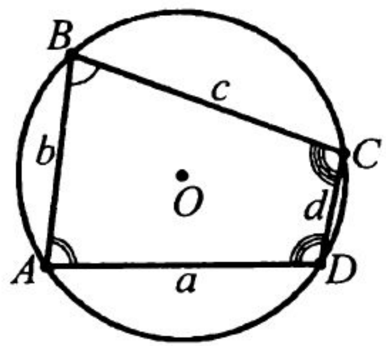
Д 32

Чотирикутники

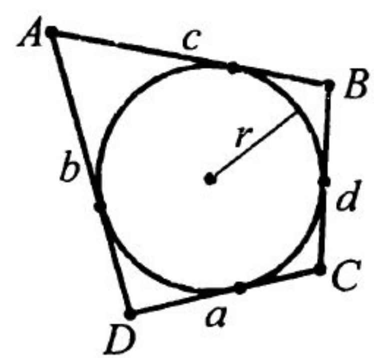
Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

А	Б	В	Г	Д
120°, 80°, 60°, 100°	80°, 20°, 130°, 130°	100°, 60°, 80°, 120°	80°, 120°, 110°, 50°	110°, 90°, 80°, 80°

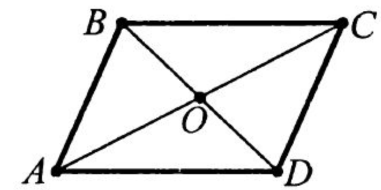
Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.



У чотирикутник можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$.



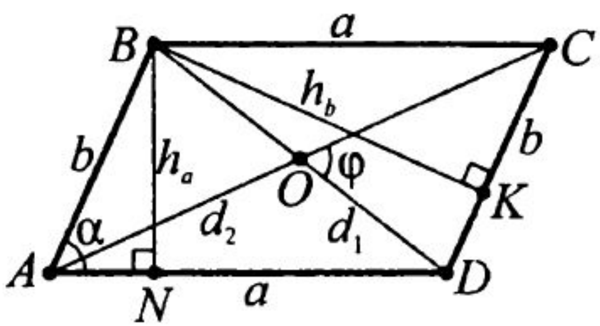
Паралелограм (важливо!)



O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти сторону AB, якщо периметр трикутника COD дорівнює 15 см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	10 см	8 см	6 см	4 см

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. $AB \| CD$, $AD \| BC$, $ABCD$ — паралелограм.



Площа

$S = ah_a$; $S = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

Властивості паралелограма:

1) у паралелограма протилежні сторони рівні: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$;
2) у паралелограма протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
3) діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$;
4) кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники;

Ромб

Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
36°	26°	72°	62°	27°

Ромб

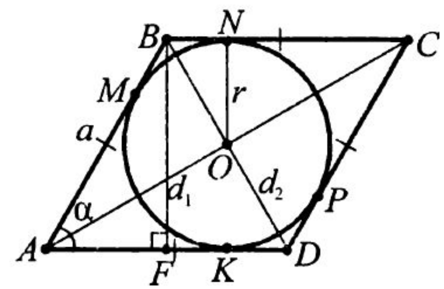
Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні. $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — ромб.

Оскільки ромб — це паралелограм, то він має всі властивості паралелограма, а також властивості, характерні лише для нього.

Властивості:

1) діагоналі ромба перпендикулярні;

2) діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.



Площа ромба

$S = a^2\sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; $S = ar$.

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей. $r = \frac{1}{2}h_a$.

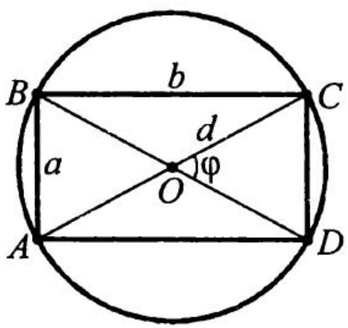
Прямокутник

У прямокутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 108°$. Знайти $\angle ABD$.

А	Б	В	Г	Д
72°	45°	30°	54°	18°

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником*. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $ABCD$ — прямокутник.



Оскільки прямокутник — це окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма.

Крім цих властивостей, прямокутник має особливу властивість: *Діагоналі прямокутника рівні*.

Наприклад, у прямокутнику $ABCD$ (див. рис.) AC і BD — діагоналі. Тоді $AC = BD$.

Площа прямокутника

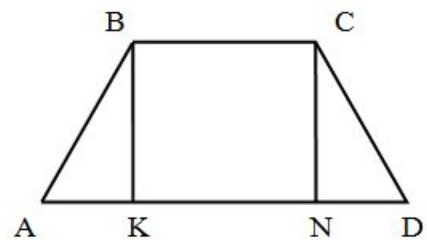
$S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$.

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей. $R = \frac{1}{2}d$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

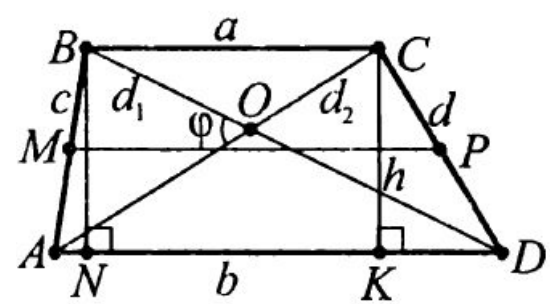
Трапеція

Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А	Б	В	Г	Д
50 см	43 см	48 см	47 см	53 см



$BC \| AD$, AB і CD — не паралельні.



Площа трапеції

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Властивості рівнобічної трапеції:

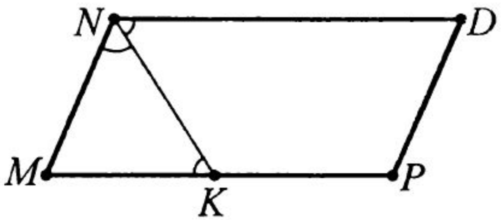
1. Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 1).

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні: $AC = BD$ (рис. 2).

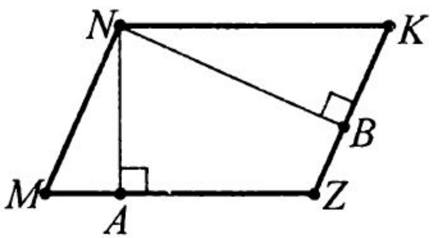
Чотирикутники

Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайти кути паралелограма.

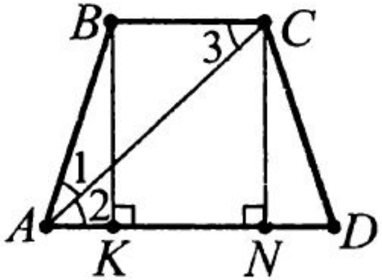
Бісектриса тупого кута паралелограма *MNDP* поділяє сторону *MP* на відрізки 8 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.



Знайти площу паралелограма, периметр якого дорівнює 24 см, а висоти — 10 см і 14 см.



Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см.



Чотирикутники

Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює 25π см^2.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	48 см^2	40 см^2	24 см^2	200 см^2

Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	24 см	30 см	16 см	19 см

Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см^2. Знайти найбільший кут ромба.

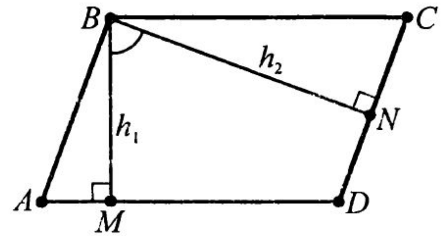
А	Б	В	Г	Д
105°	120°	130°	135°	150°

Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
10 см	20 см	15 см	3,6 см	18 см

Чотирикутники

Висоти паралелограма дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними — α. Визначити площу паралелограма.

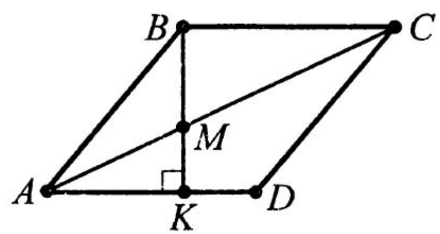


А	Б	В	Г	Д
$\frac{h_1 h_2}{\cos\alpha}$	$\frac{h_1 h_2}{\sin\alpha}$	$h_1 h_2 \sin\alpha$	$h_1 h_2 \cos\alpha$	$\frac{h_1 h_2}{\sin^2\alpha}$

Точка O, яка є перетином діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \| BC$), ділить діагональ AC на відрізки $AO = 8$ см і $OC = 4$ см. Знайти основу BC, якщо $AD = 14$ см.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	4 см

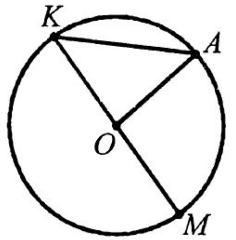
У ромбі $ABCD$ більша діагональ AC поділяє висоту BK на відрізки $BM = 5$ см і $MK = 3$ см. Знайти площу ромба.



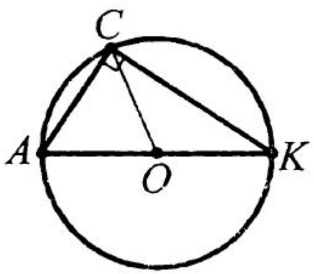
А	Б	В	Г	Д
40 см^2	80 см^2	120 см^2	140 см^2	20 см^2

Коло та круг

У колі з центром O проведено діаметр KM і хорду KA (див. рис.). Знайти кут AOM, якщо $\angle OAK = 48°$.



А	Б	В	Г	Д
48°	86°	96°	90°	24°



Приклад 8. Трикутник AKC вписаний у коло, центр якого належить стороні AK. Знайти: **1)** кут K, якщо $\angle A = 46°$; **2)** медіану, проведену з вершини C, якщо $AK = 14$ см.

Довжина кола

Довжину кола обчислюють за формулами: $C = \pi d$, $C = 2\pi r$, де $\pi \approx 3{,}1415\ldots$.

Площа круга

Площу круга обчислюють за формулами: $S = \pi r^2$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Довільний трикутник:

$$r = \frac{S}{p},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

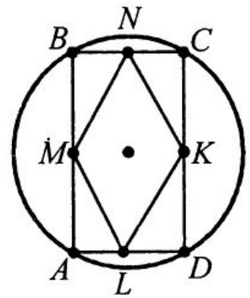
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Правильний n-трикутник:

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180°}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\dfrac{180°}{n}$	$r = \dfrac{R}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

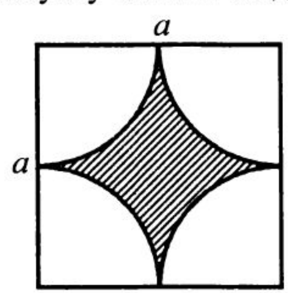
Коло та круг

У коло, довжина якого дорівнює 6π см, вписано прямокутник *ABCD*. *M*, *N*, *K* і *L* — середини сторін прямокутника. Чому дорівнює периметр чотирикутника *MNKL*?



А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	12 см	14 см	18 см

Знайти площу заштрихованої на рисунку частини квадрата зі стороною *a*.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi-2}{2}a^2$	$\frac{\pi-3}{3}a^2$	$\frac{3-\pi}{3}a^2$	$\frac{4-\pi}{4}a^2$	$\frac{8-\pi}{8}a^2$

У рівнобедрену трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25, а бічна сторона — 17. Знайти довжину l вписаного кола. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

Пряма і площина

Прямі в просторі

Прямі в просторі можуть:

— перетинатися (рис. 1);

— лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 2). Такі прямі називають *паралельними*;

— не лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 3). Такі прямі називають *мимобіжними*.

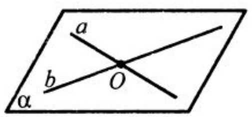


Рис. 1

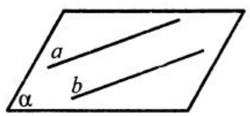


Рис. 2

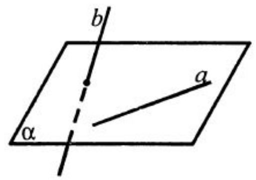


Рис. 3

Через одну точку простору можна провести безліч прямих (рис. 4).

Через будь-які дві точки простору можна провести одну пряму (рис. 5).

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

Оскільки пряму визначають дві точки, то через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

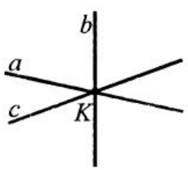


Рис. 4

Рис. 5

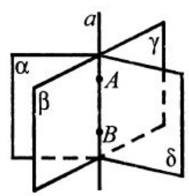


Рис. 6

Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма може:

— перетинати площину (рис. 11), A — єдина спільна точка;

— лежати в площині (рис. 12);

— не мати з площиною спільних точок (рис. 13). Такі пряму і площину називають *паралельними*.

На рис. 13 пряма a паралельна до площини α.

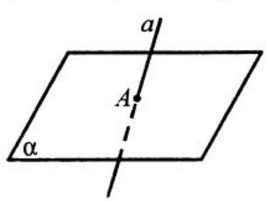


Рис. 11

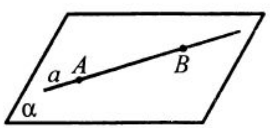


Рис. 12

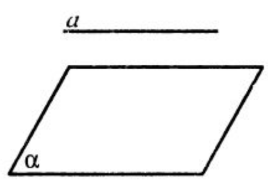


Рис. 13

Перпендикулярність та паралельність прямої та площини

Паралельність прямих і площин

Ознака паралельності прямої та площини.

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна до якої-небудь прямої у цій площині, то вона паралельна і до самої площини (рис. 14). Коротко: якщо $a \| b$, $b \subset \alpha$, то $a \| \alpha$.

Ознака паралельності площин.

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то такі площини паралельні (рис. 15). Коротко: якщо a, $b \subset \alpha$, $a \cap b$, $a \| a_1$, $b \| b_1$, a_1, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \| \beta$.

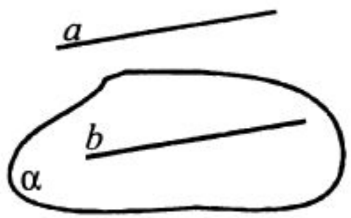


Рис. 14

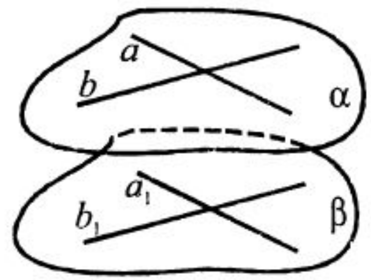


Рис. 15

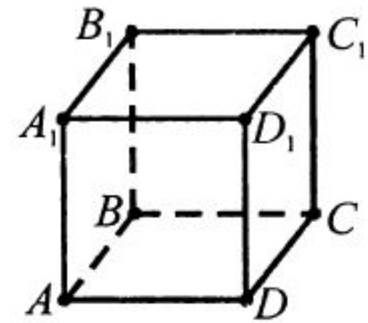
Перпендикулярність прямих і площин

Ознака перпендикулярності прямої та площини.

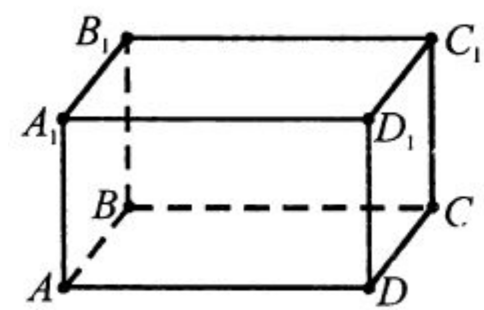
Пряму *a* називають *перпендикулярною* до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Пряма *a* буде перпендикулярною до площини α, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині α і перетинаються (рис. 16). Коротко: $a \perp b \in \alpha$, $a \perp c \in \alpha$, $b \nparallel c$, то $a \perp \alpha$.

Пряма та площина



Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **а)** Чи перетинаються прямі BB_1 і CC_1, AB і CD? Як називають ці прямі? **б)** Чи перетинаються прямі BC і AA_1, CD і BB_1? Як називають ці прямі?



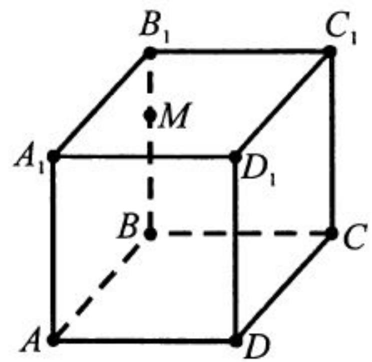
Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначити взаємне розміщення площини ABC і прямих: **а)** A_1B_1; **б)** BB_1; **в)** DB_1; **г)** CD.

Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
дві	три	чотири	п'ять	шість

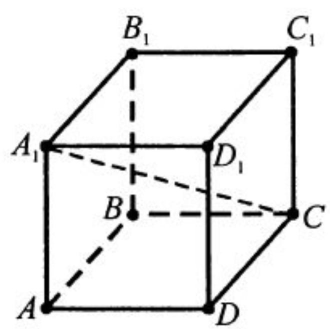
Пряма та площина

На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точку M на ребрі BB_1. Якій із прямих належить точка перетину прямої MC із площиною $A_1B_1C_1$?



А	Б	В	Г	Д
A_1B_1	B_1C_1	C_1D_1	A_1C_1	B_1D_1

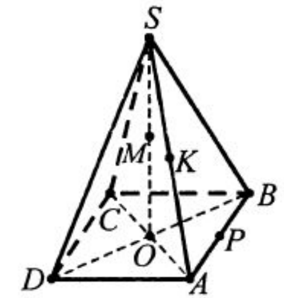
Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати кут між прямою A_1C і площиною DCC_1.



А	Б	В	Г	Д
$\angle A_1CC_1$	$\angle A_1CD$	$\angle A_1CD_1$	$\angle ACB_1$	$\angle A_1CA$

Пряма та площина

На рисунку зображено піраміду $SABCD$, де SO — висота піраміди, M — середина висоти, K — середина ребра SA, P — середина ребра AB. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MK і площина ABC

2 Прямі OP і MK

3 Пряма MP і площина SDC

4 Площини BMK і SDC

А Площини перетинаються

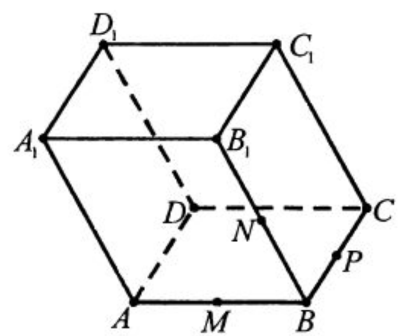
Б Пряма і площина перетинаються

В Пряма паралельна площині

Г Прямі паралельні

Д Прямі мимобіжні

На рисунку зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N і P — середини ребер AB, BB_1 і BC відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Прямі MN і DD_1

2 Прямі MN і DC_1

3 Площини MNP і AB_1C

4 Прямі NP і CC_1

А Площини паралельні

Б Площини перетинаються

В Прямі паралельні

Г Прямі мимобіжні

Д Прямі перетинаються

Призма

Пряма призма — призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основи, *похила призма* — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основи.

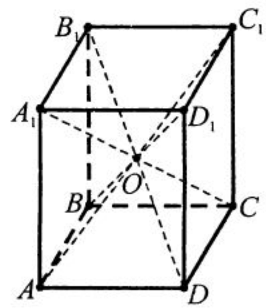
Правильна призма — пряма призма, основи якої — правильні многокутники.

Паралелепіпед — призма, в основі якої паралелограм.

Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

Прямокутний паралелепіпед — паралелепіпед, в основі якої — прямокутник.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.



Площа поверхні й об'єм

Пряма призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$,

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Похила призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{пер.} \cdot AA_1$,

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Прямокутний паралелепіпед.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 2(a + b)c$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = abc$.

Куб.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 4a^2$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 6a^2$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = a^3$.

Призма. Приклади

Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°. Висота призми — 15 см. Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.

Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	800 см^2	400 см^2	360 см^2	600 см^2

Діагональ грані куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти об'єм куба.

А	Б	В	Г	Д
4 см^3	16 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3	64 см^3	48 см^3

Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	90 см^2	60 см^2	180 см^2	240 см^2

Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	195 см^2	360 см^2	180 см^2	468 см^2

Призма. Складніші приклади

Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{313}$ см^2	25 см^2	50 см^2	144 см^2	169 см^2

Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює Q, а її об'єм — V. Визначити сторону основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2V}{Q}$	$\frac{V}{2Q}$	$\frac{V}{4Q}$	$\frac{V}{Q}$	$\frac{4V}{Q}$

Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Визначити об'єм паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{S_1S_2S_3}$	$2\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$	$8\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{8}$

Піраміда

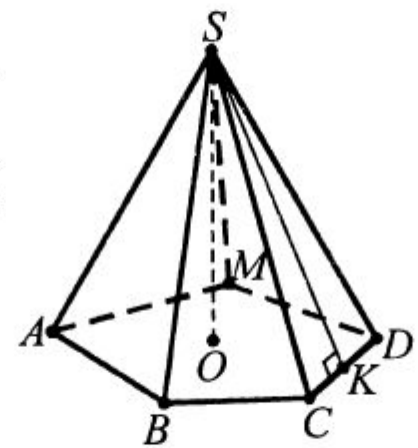
Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $b\sqrt{3}$, а висота піраміди — H. Визначити бічне ребро піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3b^2 - H^2}$	$\sqrt{b^2 + H^2}$	$\sqrt{3b^2 + H^2}$	$\frac{\sqrt{b^2 + 4H^2}}{2}$	$\sqrt{b^2 - H^2}$

Властивості

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні й вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одинаком кутом α, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута α: $S_{осн.} = S_{б.} \cdot \cos\alpha$.



Правильна піраміда

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. У правильній піраміді висота SK бічної грані, проведена з її вершини, — апофема.

Площа поверхні й об'єм

Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S_{б.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$, де l — апофема. Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_{осн}$.

Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

Піраміда. Приклади

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Визначити апофему піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a}{2\sin\beta}$	$\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\frac{a\cos\beta}{2}$	$\frac{a\sin\beta}{2}$	$\frac{a}{2\cos\beta}$

Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

А	Б	В	Г	Д
1 см	4 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см

Координати

Точки $A(2; -4; -8)$ і $B(10; -20; 6)$ симетричні відносно точки C. Знайти координати точки C.

А	Б	В	Г	Д
$(-10; 20; -6)$	$(3; -4; -0,5)$	$(12; -24; -1)$	$(6; -12; -1)$	$(-2; 4; -8)$

Скласти рівняння кола, в якого відрізок MN — діаметр і $M(7; 6)$, $N(11; 9)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-7)^2+(y-6)^2 = 6,25$	$(x+9)^2+(y+7,5)^2 = 6,25$	$(x-9)^2+(y-7,5)^2 = 6,25$	$(x-9)^2+(y-7,5)^2 = 25$	$(x+9)^2+(y+7,5)^2 = 9$

Координати точки $C(x; y; z)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $A(x_2; y_2; z_2)$, обчислюють за формулами: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Відстань d між точками A та B обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Рівняння сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, де $(a; b; c)$ — координати центра, R — радіус сфери; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

Координати. Приклади

Дано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(-2; 6)$, $B(-2; -2)$ і $C(4; -2)$. Знайти довжину медіани BM.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини xy.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; -2; -3)$	$(-1; -2; 3)$	$(1; -2; 3)$	$(-1; 2; 3)$	$(1; 2; -3)$

Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(10; 20; 30)$ відносно осі аплікат.

А	Б	В	Г	Д
$(-10; -20; 30)$	$(10; 20; 30)$	$(10; 20; 0)$	$(-10; -20; -30)$	$(10; 20; -30)$

Знайти відстань від точки $M(5; 4; 12)$ до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
5	4	12	13	21

Вказати рівняння кола, яке на площині симетричне до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі y.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+$ $+(y-4)^2=9$	$(x-5)^2+$ $+(y+4)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x-4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y+5)^2=9$

Дано трикутник ABC з вершинами $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$. Знайти зовнішній кут при вершині B.

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	135°	інша відповідь

Координати. Додаткові задачі

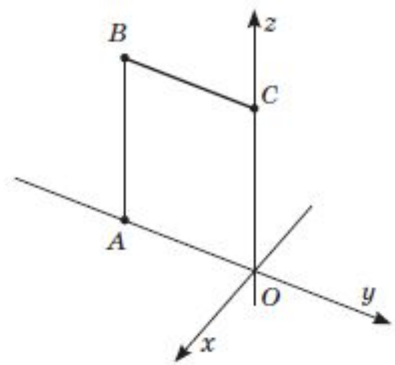
Точки $A(2;\ 4)$ і $C(5;\ 8)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Знайти площу цього квадрата.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
2,5	5	12,5	25	20

Точка Р симетрична точці $A(-2;-3;4)$ відносно координатної площини xz. Знайдіть координати точки Р.

А	Б	В	Г	Д
(2;–3; 4)	(– 2; 3; 4)	(– 2; 3;–4)	(– 2;– 3;–4)	(2;–3;–4)

На *рисунку* зображено квадрат $OABC$, сторона якого дорівнює 8. Установіть відповідність між вершинами квадрата (1–4) та їхніми координатами (А–Д).



1	Вершина O	А	$(0;0;0)$
2	Вершина A	Б	$(0;8;0)$
3	Вершина B	В	$(0;-8;8)$
4	Вершина C	Г	$(0;0;8)$
		Д	$(0;-8;0)$

Вектори

Координати вектора

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = \overrightarrow{AB}(a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = $ $= z_2 - z_1$.

Рівність векторів

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Колінеарність векторів.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$.

Сума векторів

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, такий що $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

Різниця векторів

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$.

Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Множення вектора на число

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

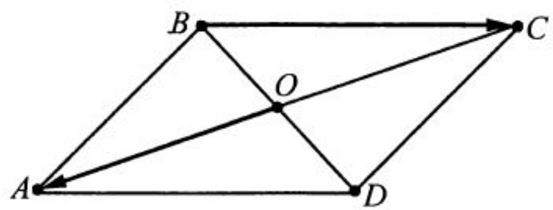
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між векторами.

Вектори. Приклади

За якого значення m вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(m; 2m-1,5)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
1	–1	2	1,5	–6

Дано паралелограм $ABCD$. O — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$?



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AD}$

Серед векторів $\vec{a}$ (4; 14; 2), $\vec{b}$ (2; 7; –1), $\vec{c}$ (0; 0; 3), $\vec{d}$ (–6; –21; 3) знайти колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

Дано вектори $\vec{a}$ (3; –6; 2) і $\vec{b}$ (8; 4; 5). Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

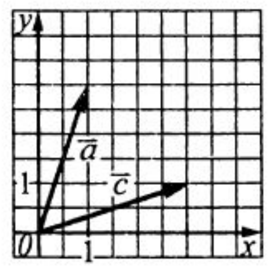
А	Б	В	Г	Д
–17	0	–5760	10	–3

Вектори. Приклади

Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 4. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

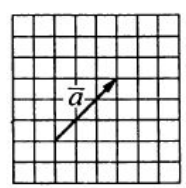
А	Б	В	Г	Д
8	–8	4	–4	2

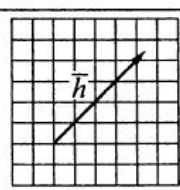
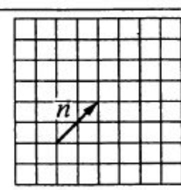
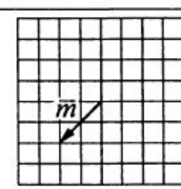
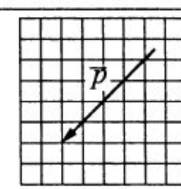
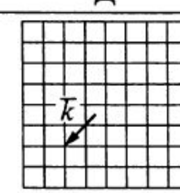
Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

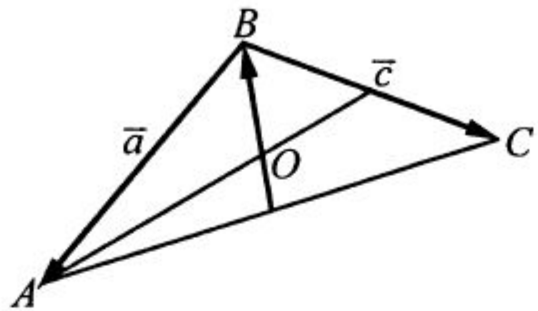
Дано вектор $\vec{a}$. Який з наведених векторів дорівнює $-\frac{2}{3}\vec{a}$?



А	Б	В	Г	Д
				

Вектори. Складніші приклади

O — точка перетину медіан трикутника ABC. $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$

Обчислити квадрат довжини вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{c}(2;-2;3)$ і їх скалярний добуток дорівнює 34.

А	Б	В	Г	Д
17	$\sqrt{17}$	2	4,5	68