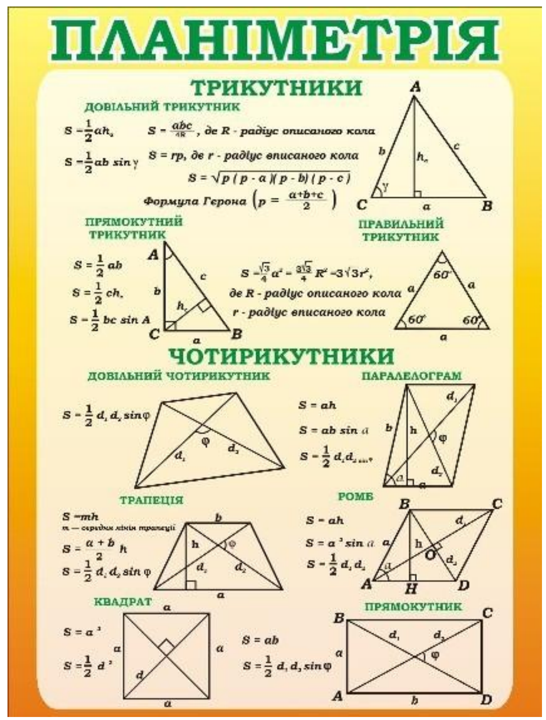
# Геометрія

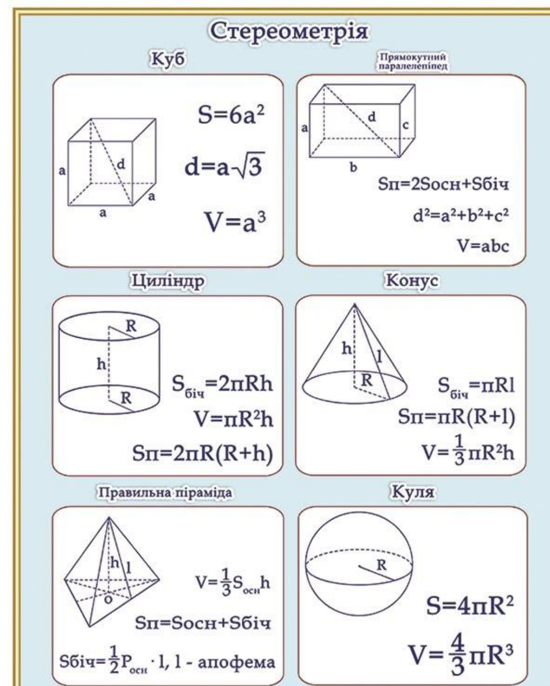
*Викладач:* *Люль Максим Петрович*


Telegram: Max_Liul

E-mail: maximliul@gmail.com

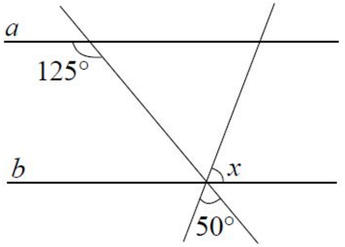

**Курс: математика**



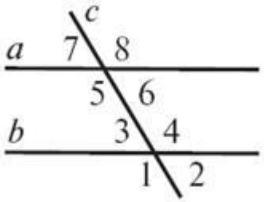
# Паралельні прямі та січна

Прямі $a$ і $b$ паралельні. Знайдіть градусну міру кута $x$, зображеного на рисунку.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 50° | 60° | 65° | 75° | 85° |

**Властивості кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною**

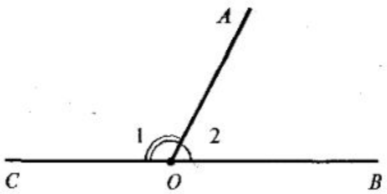
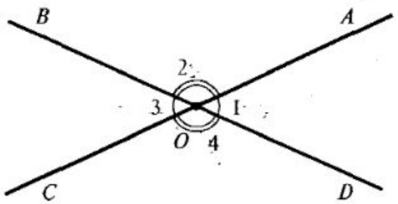



Якщо $a \| b$, $c$ — січна, то:

1) $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні);

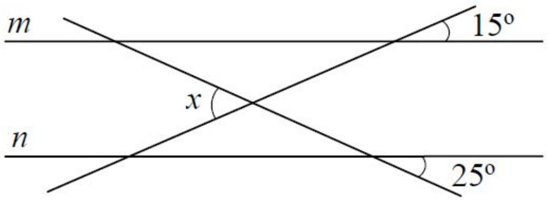
2) $\angle 4 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 5 = 180°$ (як внутрішні односторонні);

3) $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$ (як відповідні)

| Суміжні кути | Вертикальні кути |
|---|---|
|  $\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні <br> $\boxed{\angle 1 + \angle 2 = 180°}$ |  $\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні <br> $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні <br> $\boxed{\angle 1 = \angle 3}$ $\boxed{\angle 2 = \angle 4}$ |

# Паралельні прямі та січна. Приклади

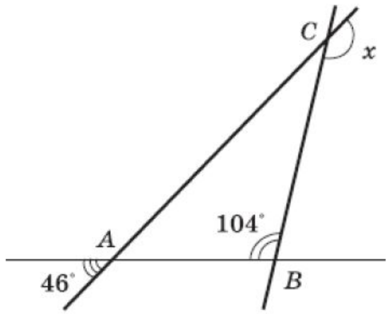
Прямі m і n паралельні.
Обчисліть величину кута $x$, зображеного на рисунку.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| А 40º | Б 45º | В 50º | Г 80º | Д 140º |

# Сума кутів трикутника

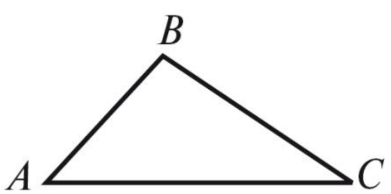
Знайдіть градусну міру кута $x$, зображеного на рисунку.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 95° | 120° | 140° | 150° | 160° |

**Сума кутів трикутника**

*1. Теорема*. Якщо дано $\Delta ABC$, то $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.




*2. Наслідки*

1) У будь-якому трикутнику хоча б два кути гострі.

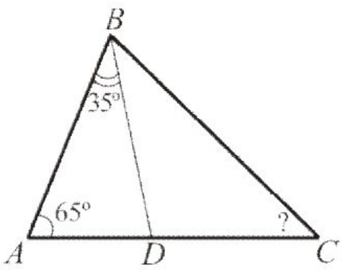
2) Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60°.

3) Якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник є рівностороннім

Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: а) 65° і 45°; б) 120° і 18°; в) 90° і 64°.

# Сума кутів трикутника. Приклад

У трикутнику $ABC$: $\angle A=65^o$, $BD$ – бісектриса кута $B$ (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута $BCA$, якщо $\angle ABD=35^o$.

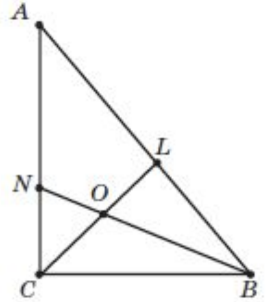



| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 35° | 45° | 50° | 55° | 65° |

У трикутнику $ABC$: $\angle A = 42^o$, $\angle B = 64^o$. Із вершин кутів $A$ і $C$ проведені бісектриси трикутника, що перетинаються в точці $O$. Знайдіть градусну міру кута $AOC$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 76° | 106° | 111° | 122° | 127° |

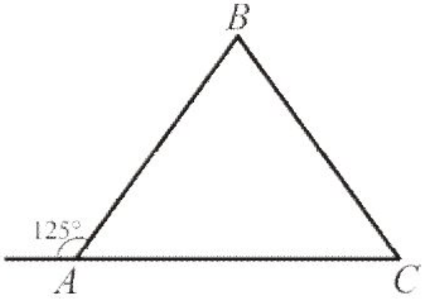
**У прямокутному трикутнику $ABC$ із прямим кутом $C$ бісектриси кутів $B$ і $C$ перетинаються в точці $O$, $\angle BAC = 40°$ (*див. рисунок*). Знайдіть градусну міру кута $BOC$.**



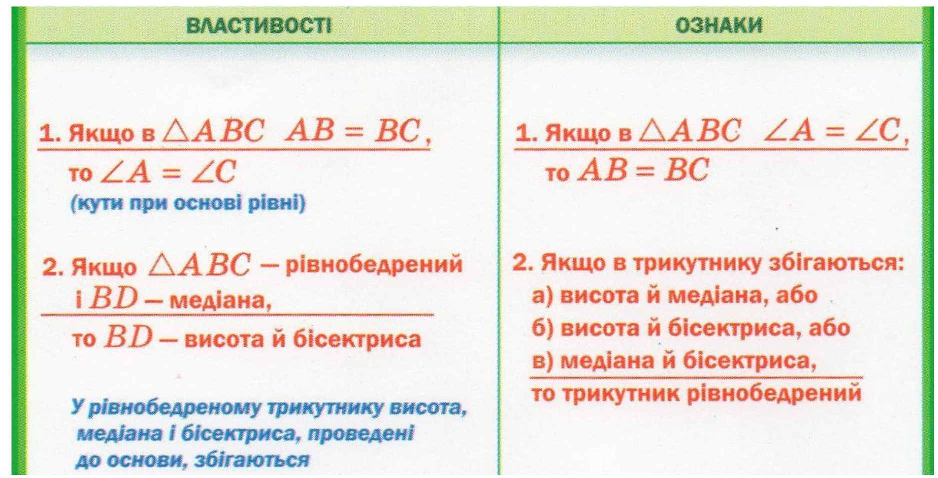

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 70° | 135° | 155° | 110° | 100° |

# Рівнобедрений трикутник

Градусна міра зовнішнього кута $A$ рівнобедреного трикутника $ABC$ ($AB=BC$) дорівнює 125° (див. рисунок). Знайдіть градусну міру внутрішнього кута $B$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |


Знайдіть невідомі кути рівнобедреного трикутника, якщо:

а) кут при його основі дорівнює 40°;

б) кут, протилежний його основі, дорівнює 40°.

*Рівень Б*

Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть решту кутів. Скільки розв'язків має задача?

# Рівнобедрений трикутник

Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині. Знайти кут при вершині.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 20° | 40° | 15° | 140° | 10° |

Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайти кут при основі трикутника.

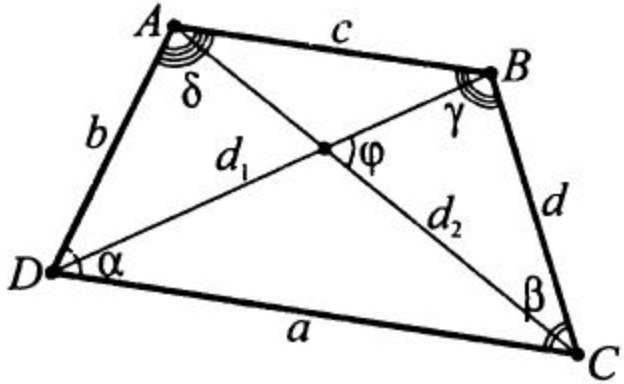
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 82° | 90° | 49° | 51° | 98° |

Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

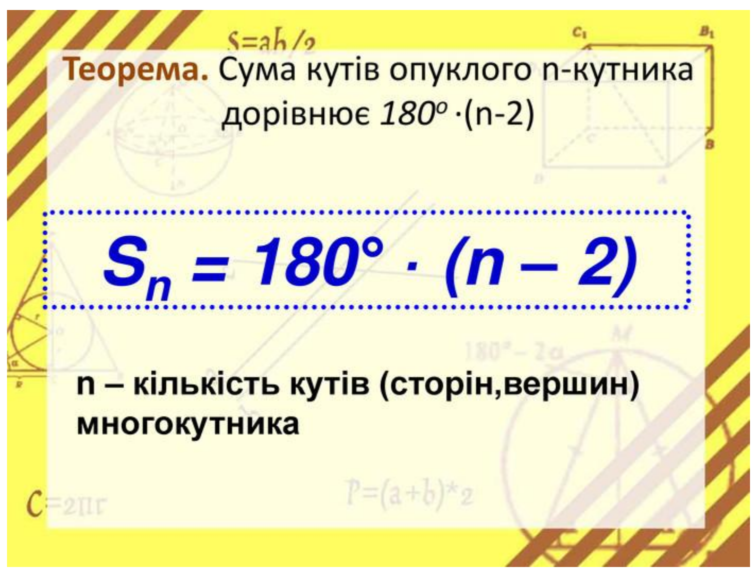
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 20 см | 10 см | 13 см | 17 см | 17 см або 13 см |

# Сума кутів n-кутника

Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 7, 8, 9 і 12.



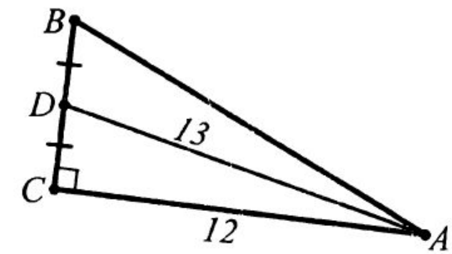

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$



# Прямокутний трикутник

Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 5 см | $2\sqrt{61}$ см | 25 см | 22 см | 26 см |



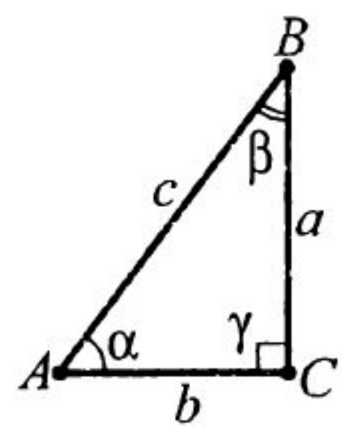

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \quad S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta, \quad S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Радіус описаного кола: $R = \frac{1}{2}c, \ R = m_c.$

Радіус вписаного кола: $r = \frac{a+b-c}{2}, \ r = \frac{ab}{a+b+c}.$

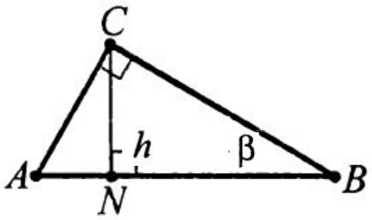
$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$



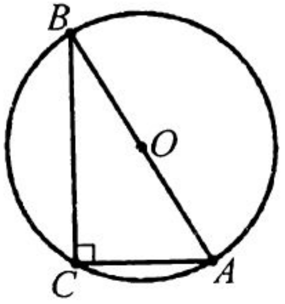
# Прямокутний трикутник. Приклад

Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює $h$, а гострий кут — $\beta$. Знайти гіпотенузу трикутника.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{h}{\sin\beta}$ | $h\operatorname{ctg}\beta$ | $h\operatorname{tg}\beta$ | $\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$ | $\frac{h}{\cos\beta}$ |




Навколо прямокутного трикутника $ABC$ з прямим кутом $C$ описано коло (див. рис.). Знайти радіус кола, якщо $AC = 12$ см, $\angle B = 30°$.




**Підвищеної складності**

Знайти площу прямокутного трикутника у квадратних метрах, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

# Прямокутний трикутник. Додаткові задачі

Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 66° | 68° | 36° | 54° | 48° |

Катети прямокутного трикутника дорівнюють $a$ і $b$ ($a > b$). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$ | $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ | $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ | $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ |

Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 см | $2\sqrt{7}$ см | $4\sqrt{5}$ см | 12 см | $8\sqrt{5}$ см |

Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

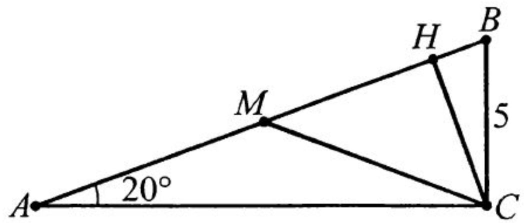
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 65 см$^2$ | 32,5 см$^2$ | 30 см$^2$ | 60 см$^2$ | 130 см$^2$ |

Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 4 см | 2 см | 8 см | 8,5 см | 6 см |

# Прямокутний трикутник. Додаткові задачі

На рисунку зображено прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle C = 90°$), його висоту $CH$, медіану $CM$ і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).




**1** $\angle MCH$

**2** $\angle CMH$

**3** $CM$

**4** $CH$

**А** $\dfrac{5}{2\sin 20°}$

**Б** $5\sin 20°$

**В** $50°$

**Г** $5\sin 70°$

**Д** $40°$

Установити відповідність між катетами $a$ й $b$ (1–4) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета $a$ (А–Д).

**1** 2 см, 2 см

**2** 1 см, $\sqrt{3}$ см

**3** $\sqrt{3}$ см, 1 см

**4** $2-\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см

**А** 22,5°

**Б** 45°

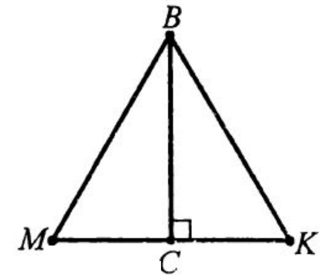
**В** 60°

**Г** 90°

**Д** 30°

# Рівнобедрений трикутник

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайти периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 8 см.




Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 20 см | 10 см | 13 см | 17 см | 17 см або 13 см |

У рівнобедреному трикутнику $ABC$ кут $C$ дорівнює 104°. Знайти кут $B$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 66° | 76° | 38° | 28° | 48° |

Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між бічними сторонами дорівнює 30°.

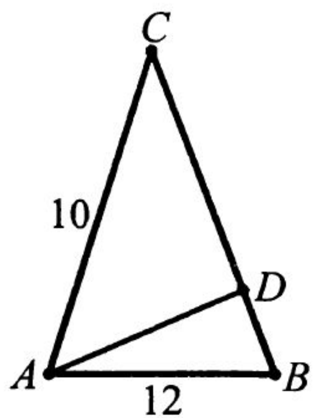
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $8\sqrt{2}$ см$^2$ | $16\sqrt{3}$ см$^2$ | $8\sqrt{3}$ см$^2$ | 16 см$^2$ | 8 см$^2$ |

У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 48 см$^2$ | 24 см$^2$ | 96 см$^2$ | 30 см$^2$ | 60 см$^2$ |

# Рівнобедрений трикутник

На рисунку зображено рівнобедрений трикутник $ABC$ ($AC = BC$), його висоту $AD$ і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).




**1** $AD$

**2** $S_{\Delta ABC}$

**3** Радіус вписаного кола

**4** Радіус описаного кола

**А** 9,6

**Б** 6,25

**В** 3

**Г** 48

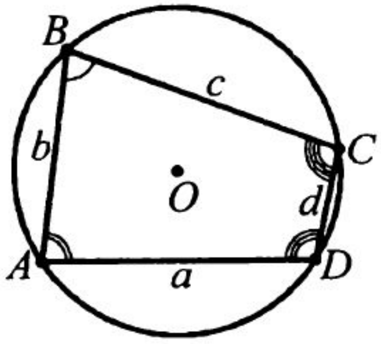
**Д** 32

# Чотирикутники

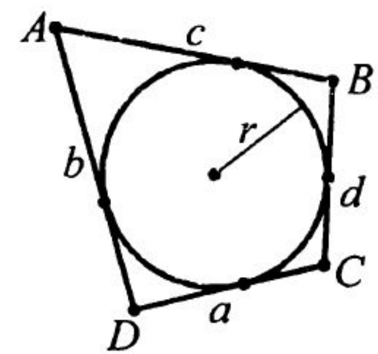
Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 120°, 80°, 60°, 100° | 80°, 20°, 130°, 130° | 100°, 60°, 80°, 120° | 80°, 120°, 110°, 50° | 110°, 90°, 80°, 80° |

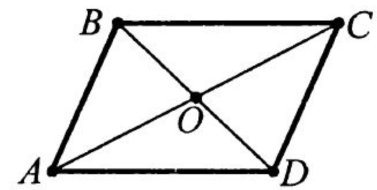
Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.




У чотирикутник можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$.



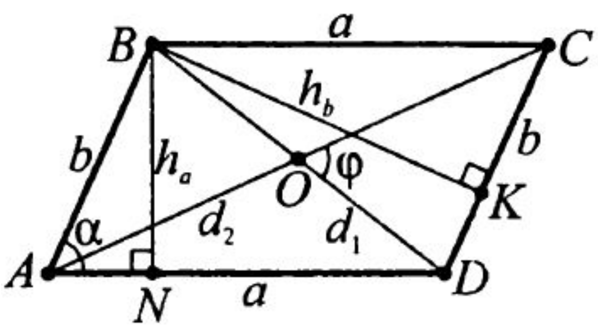
# Паралелограм (важливо!)




*O* — точка перетину діагоналей паралелограма *ABCD*. Знайти сторону *AB*, якщо периметр трикутника *COD* дорівнює 15 см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 15 см | 10 см | 8 см | 6 см | 4 см |

*Паралелограмом* називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, *ABCD* — паралелограм.




**Площа**

$$S = ah_a;\ S = bh_b;\ S = ab\sin\alpha;\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

***Властивості паралелограма:***

1) у паралелограма протилежні сторони рівні: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$;
2) у паралелограма протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
3) діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$;
4) кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники;

# Ромб

Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 36° | 26° | 72° | 62° | 27° |

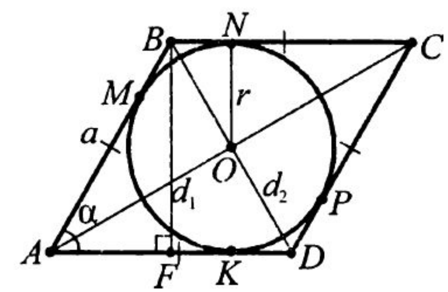
***Ромб***

*Ромбом* називають паралелограм, у якого всі сторони рівні. $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — ромб.

Оскільки ромб — це паралелограм, то він має всі властивості паралелограма, а також властивості, характерні лише для нього.

*Властивості:*

1) діагоналі ромба перпендикулярні;
2) діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.




***Площа ромба***

$S = a^2\sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$; $S = ar$.

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей. $r = \frac{1}{2}h_a$.

# Прямокутник

У прямокутнику $ABCD$ $O$ — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 108°$. Знайти $\angle ABD$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 72° | 45° | 30° | 54° | 18° |

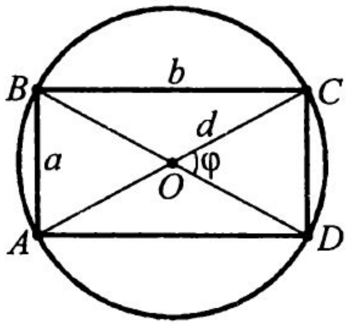
***Прямокутник***

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником*. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $ABCD$ — прямокутник.

Оскільки прямокутник — це окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма.

Крім цих властивостей, прямокутник має особливу властивість: *Діагоналі прямокутника рівні*.

Наприклад, у прямокутнику $ABCD$ (див. рис.) $AC$ і $BD$ — діагоналі. Тоді $AC = BD$.




***Площа прямокутника***

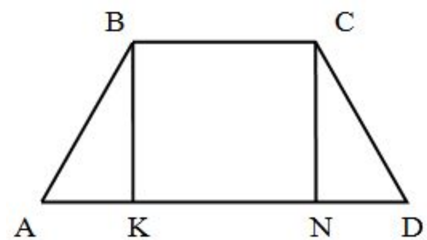
$S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$.

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей. $R = \frac{1}{2}d$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

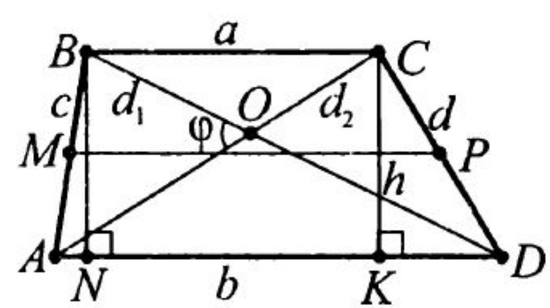
# Трапеція

Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 50 см | 43 см | 48 см | 47 см | 53 см |




$BC \| AD$, $AB$ і $CD$ — не паралельні.




***Площа трапеції***

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

***Властивості рівнобічної трапеції:***

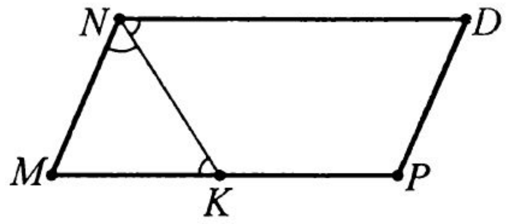
**1.** Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 1).

**2.** Діагоналі рівнобічної трапеції рівні: $AC = BD$ (рис. 2).

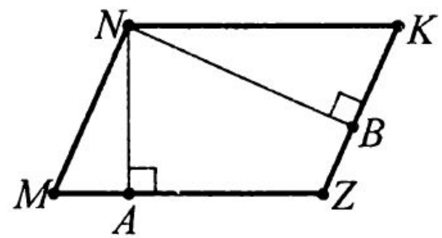
# Чотирикутники

Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайти кути паралелограма.

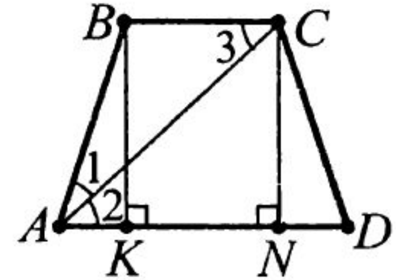
Бісектриса тупого кута паралелограма *MNDP* поділяє сторону *MP* на відрізки 8 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.




Знайти площу паралелограма, периметр якого дорівнює 24 см, а висоти — 10 см і 14 см.




Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см.



# Чотирикутники

Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює $25\pi$ см$^2$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 80 см$^2$ | 48 см$^2$ | 40 см$^2$ | 24 см$^2$ | 200 см$^2$ |

Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 20 см | 24 см | 30 см | 16 см | 19 см |

Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см$^2$. Знайти найбільший кут ромба.

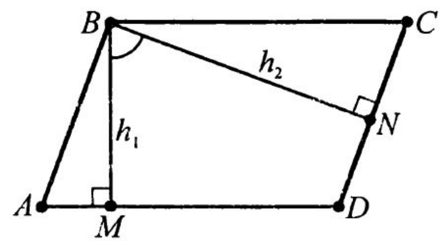
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 105° | 120° | 130° | 135° | 150° |

Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 10 см | 20 см | 15 см | 3,6 см | 18 см |

# Чотирикутники

Висоти паралелограма дорівнюють $h_1$ і $h_2$, а кут між ними — $\alpha$. Визначити площу паралелограма.

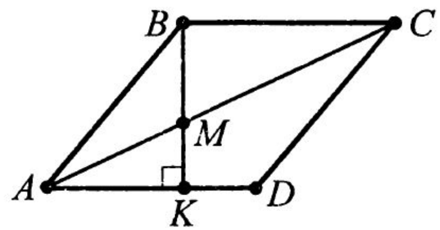



| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{h_1h_2}{\cos\alpha}$ | $\dfrac{h_1h_2}{\sin\alpha}$ | $h_1h_2\sin\alpha$ | $h_1h_2\cos\alpha$ | $\dfrac{h_1h_2}{\sin^2\alpha}$ |

Точка $O$, яка є перетином діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), ділить діагональ $AC$ на відрізки $AO = 8$ см і $OC = 4$ см. Знайти основу $BC$, якщо $AD = 14$ см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 5 см | 6 см | 7 см | 8 см | 4 см |

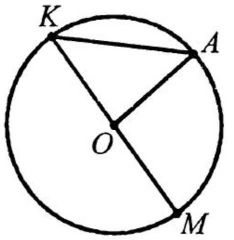
У ромбі $ABCD$ більша діагональ $AC$ поділяє висоту $BK$ на відрізки $BM = 5$ см і $MK = 3$ см. Знайти площу ромба.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 40 см$^2$ | 80 см$^2$ | 120 см$^2$ | 140 см$^2$ | 20 см$^2$ |

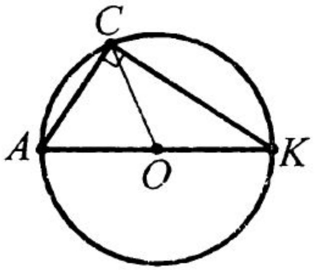
# Коло та круг

У колі з центром $O$ проведено діаметр $KM$ і хорду $KA$ (див. рис.). Знайти кут $AOM$, якщо $\angle OAK = 48°$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 48° | 86° | 96° | 90° | 24° |

***Приклад 8.*** Трикутник $AKC$ вписаний у коло, центр якого належить стороні $AK$. Знайти: **1)** кут $K$, якщо $\angle A = 46°$; **2)** медіану, проведену з вершини $C$, якщо $AK = 14$ см.




***Довжина кола***

Довжину кола обчислюють за формулами: $C = \pi d$, $C = 2\pi r$, де $\pi \approx 3{,}1415...$ .

***Площа круга***

Площу круга обчислюють за формулами: $S = \pi r^2$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

**Довільний трикутник:**

$$r = \frac{S}{p},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

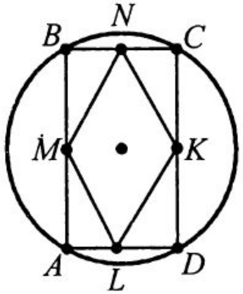
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

**Правильний n-трикутник:**

| Загальна формула | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 6$ |
|---|---|---|---|
| $r = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180°}{n}}$ | $r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$ | $r = \dfrac{a_4}{2}$ | $r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$ |
| $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ | $R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$ | $R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$ | $R = a_6$ |
| $r = R\cos\dfrac{180°}{n}$ | $r = \dfrac{R}{2}$ | $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ | $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ |

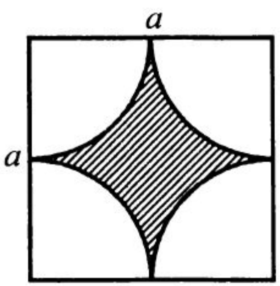
# Коло та круг

У коло, довжина якого дорівнює $6\pi$ см, вписано прямокутник $ABCD$. $M$, $N$, $K$ і $L$ — середини сторін прямокутника. Чому дорівнює периметр чотирикутника $MNKL$?




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 6 см | 9 см | 12 см | 14 см | 18 см |

Знайти площу заштрихованої на рисунку частини квадрата зі стороною $a$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi-2}{2}a^2$ | $\frac{\pi-3}{3}a^2$ | $\frac{3-\pi}{3}a^2$ | $\frac{4-\pi}{4}a^2$ | $\frac{8-\pi}{8}a^2$ |

У рівнобедрену трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25, а бічна сторона — 17. Знайти довжину $l$ вписаного кола. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

# Пряма і площина

***Прямі в просторі***

*Прямі в просторі можуть:*

— перетинатися (рис. 1);

— лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 2). Такі прямі називають *паралельними*;

— не лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 3). Такі прямі називають *мимобіжними*.

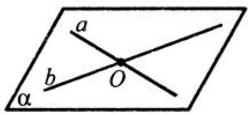



**Рис. 1**

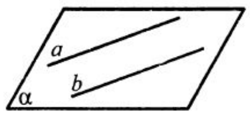



**Рис. 2**

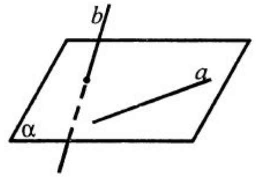



**Рис. 3**

Через одну точку простору можна провести безліч прямих (рис. 4).

Через будь-які дві точки простору можна провести одну пряму (рис. 5).

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

Оскільки пряму визначають дві точки, то через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

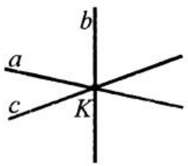



**Рис. 4**


**Рис. 5**

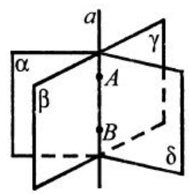



**Рис. 6**

***Взаємне розміщення прямої і площини***

Пряма може:

— перетинати площину (рис. 11), $A$ — єдина спільна точка;

— лежати в площині (рис. 12);

— не мати з площиною спільних точок (рис. 13). Такі пряму і площину називають *паралельними*.

На рис. 13 пряма $a$ паралельна до площини $\alpha$.

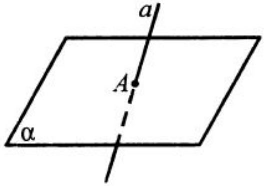



**Рис. 11**

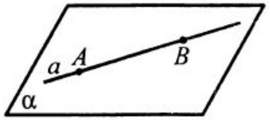



**Рис. 12**

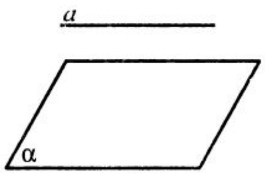



**Рис. 13**

# Перпендикулярність та паралельність прямої та площини

***Паралельність прямих і площин***

*Ознака паралельності прямої та площини.*

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна до якої-небудь прямої у цій площині, то вона паралельна і до самої площини (рис. 14). Коротко: якщо $a \parallel b$, $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.

*Ознака паралельності площин.*

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то такі площини паралельні (рис. 15). Коротко: якщо $a$, $b \subset \alpha$, $a \cap b$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a_1$, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

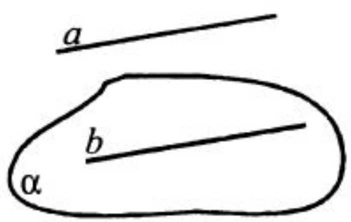



**Рис. 14**

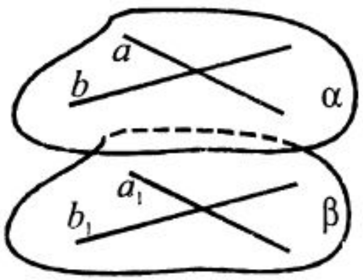



**Рис. 15**

***Перпендикулярність прямих і площин***

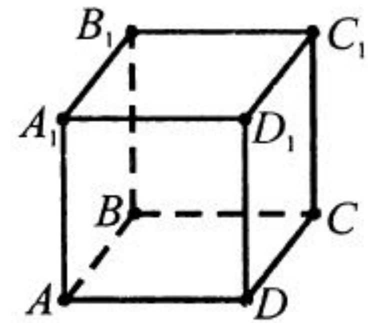
*Ознака перпендикулярності прямої та площини.*

Пряму *a* називають *перпендикулярною* до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

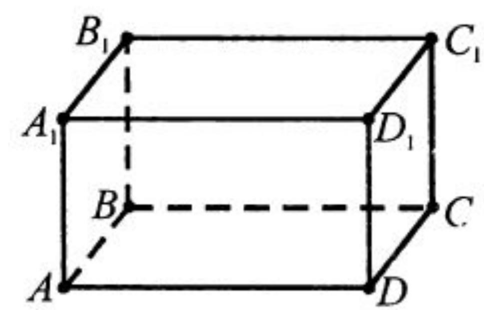
Пряма *a* буде перпендикулярною до площини $\alpha$, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині $\alpha$ і перетинаються (рис. 16). Коротко: $a \perp b \in \alpha$, $a \perp c \in \alpha$, $b \nparallel c$, то $a \perp \alpha$.

# Пряма та площина

Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **а)** Чи перетинаються прямі $BB_1$ і $CC_1$, $AB$ і $CD$? Як називають ці прямі? **б)** Чи перетинаються прямі $BC$ і $AA_1$, $CD$ і $BB_1$? Як називають ці прямі?




Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначити взаємне розміщення площини $ABC$ і прямих: **а)** $A_1B_1$; **б)** $BB_1$; **в)** $DB_1$; **г)** $CD$.

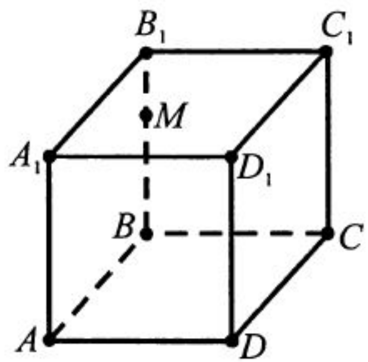



Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| дві | три | чотири | п’ять | шість |

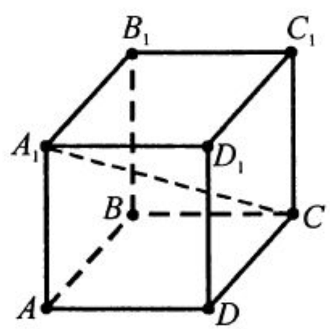
# Пряма та площина

На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точку $M$ на ребрі $BB_1$. Якій із прямих належить точка перетину прямої $MC$ із площиною $A_1B_1C_1$?




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $A_1B_1$ | $B_1C_1$ | $C_1D_1$ | $A_1C_1$ | $B_1D_1$ |

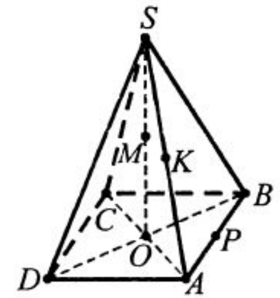
Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати кут між прямою $A_1C$ і площиною $DCC_1$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\angle A_1CC_1$ | $\angle A_1CD$ | $\angle A_1CD_1$ | $\angle ACB_1$ | $\angle A_1CA$ |

# Пряма та площина

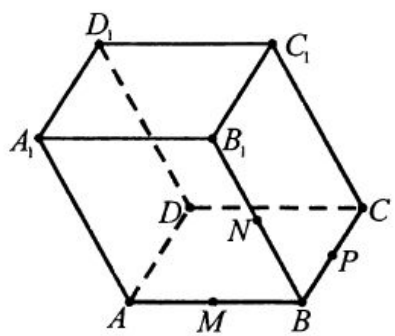
На рисунку зображено піраміду $SABCD$, де $SO$ — висота піраміди, $M$ — середина висоти, $K$ — середина ребра $SA$, $P$ — середина ребра $AB$. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).




**1** Пряма $MK$ і площина $ABC$
**2** Прямі $OP$ і $MK$
**3** Пряма $MP$ і площина $SDC$
**4** Площини $BMK$ і $SDC$

**А** Площини перетинаються
**Б** Пряма і площина перетинаються
**В** Пряма паралельна площині
**Г** Прямі паралельні
**Д** Прямі мимобіжні

На рисунку зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки $M$, $N$ і $P$ — середини ребер $AB$, $BB_1$ і $BC$ відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).




**1** Прямі $MN$ і $DD_1$
**2** Прямі $MN$ і $DC_1$
**3** Площини $MNP$ і $AB_1C$
**4** Прямі $NP$ і $CC_1$

**А** Площини паралельні
**Б** Площини перетинаються
**В** Прямі паралельні
**Г** Прямі мимобіжні
**Д** Прямі перетинаються

# Призма

*Пряма призма* — призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основи, *похила призма* — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основи.

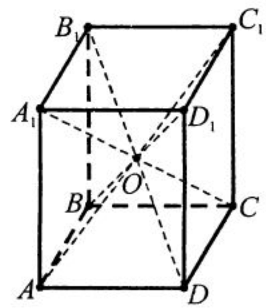
*Правильна призма* — пряма призма, основи якої — правильні многокутники.

*Паралелепіпед* — призма, в основі якої паралелограм.

Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

*Прямокутний паралелепіпед* — паралелепіпед, в основі якої — прямокутник.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.




***Площа поверхні й об'єм***

*Пряма призма.*

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$,

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

*Похила призма.*

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{пер.} \cdot AA_1$,

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

*Прямокутний паралелепіпед.*

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 2(a + b)c$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн} = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = abc$.

*Куб.*

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 4a^2$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн} = 6a^2$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = a^3$.

# Призма. Приклади

Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°. Висота призми — 15 см. Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.

Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 80 см$^2$ | 800 см$^2$ | 400 см$^2$ | 360 см$^2$ | 600 см$^2$ |

Діагональ грані куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти об'єм куба.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 4 см$^3$ | 16 см$^3$ | $12\sqrt{3}$ см$^3$ | 64 см$^3$ | 48 см$^3$ |

Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 120 см$^2$ | 90 см$^2$ | 60 см$^2$ | 180 см$^2$ | 240 см$^2$ |

Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 60 см$^2$ | 195 см$^2$ | 360 см$^2$ | 180 см$^2$ | 468 см$^2$ |

# Призма. Складніші приклади

Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{313}$ см$^2$ | 25 см$^2$ | 50 см$^2$ | 144 см$^2$ | 169 см$^2$ |

Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює $Q$, а її об'єм — $V$. Визначити сторону основи призми.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{2V}{Q}$ | $\frac{V}{2Q}$ | $\frac{V}{4Q}$ | $\frac{V}{Q}$ | $\frac{4V}{Q}$ |

Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють $S_1$, $S_2$ і $S_3$. Визначити об'єм паралелепіпеда.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{S_1S_2S_3}$ | $2\sqrt{S_1S_2S_3}$ | $\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$ | $8\sqrt{S_1S_2S_3}$ | $\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{8}$ |

# Піраміда

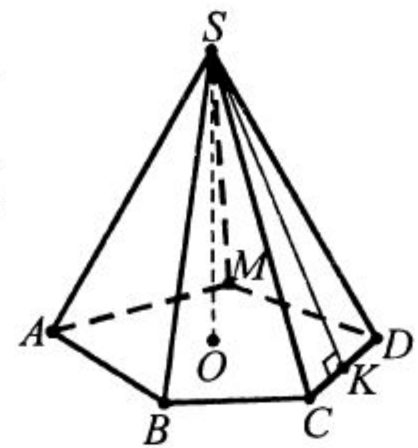
Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $b\sqrt{3}$, а висота піраміди — $H$. Визначити бічне ребро піраміди.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{3b^2 - H^2}$ | $\sqrt{b^2 + H^2}$ | $\sqrt{3b^2 + H^2}$ | $\dfrac{\sqrt{b^2 + 4H^2}}{2}$ | $\sqrt{b^2 - H^2}$ |

***Властивості***

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні й вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одинаком кутом $\alpha$, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута $\alpha$: $S_{осн.} = S_{б.} \cdot \cos\alpha$.




***Правильна піраміда***

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. У правильній піраміді висота $SK$ бічної грані, проведена з її вершини, — апофема.

***Площа поверхні й об'єм***

*Площа бічної поверхні* правильної піраміди: $S_{б.} = \dfrac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$, де $l$ — апофема. Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_{осн}$.

*Об'єм* піраміди: $V = \dfrac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

# Піраміда. Приклади

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює *a*. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Визначити апофему піраміди.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{2\sin\beta}$ | $\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\beta}$ | $\frac{a\cos\beta}{2}$ | $\frac{a\sin\beta}{2}$ | $\frac{a}{2\cos\beta}$ |

Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 см | 4 см | 2 см | $2\sqrt{2}$ см | $4\sqrt{2}$ см |

# Координати

Точки $A(2; -4; -8)$ і $B(10; -20; 6)$ симетричні відносно точки $C$. Знайти координати точки $C$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(-10; 20; -6)$ | $(3; -4; -0,5)$ | $(12; -24; -1)$ | $(6; -12; -1)$ | $(-2; 4; -8)$ |

Скласти рівняння кола, в якого відрізок $MN$ — діаметр і $M(7; 6)$, $N(11; 9)$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(x-7)^2+(y-6)^2 = 6,25$ | $(x+9)^2+(y+7,5)^2 = 6,25$ | $(x-9)^2+(y-7,5)^2 = 6,25$ | $(x-9)^2+(y-7,5)^2 = 25$ | $(x+9)^2+(y+7,5)^2 = 9$ |

Координати точки $C(x; y; z)$ — середини відрізка $AB$, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $A(x_2; y_2; z_2)$, обчислюють за формулами: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Відстань $d$ між точками $A$ та $B$ обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Рівняння сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, де $(a; b; c)$ — координати центра, $R$ — радіус сфери; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

# Координати. Приклади

Дано трикутник $ABC$, вершини якого мають координати $A(-2; 6)$, $B(-2; -2)$ і $C(4; -2)$. Знайти довжину медіани $BM$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини $xy$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–1; –2; –3) | (–1; –2; 3) | (1; –2; 3) | (–1; 2; 3) | (1; 2; –3) |

Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(10; 20; 30)$ відносно осі аплікат.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| (–10; –20; 30) | (10; 20; 30) | (10; 20; 0) | (–10; –20; –30) | (10; 20; –30) |

Знайти відстань від точки $M(5; 4; 12)$ до осі ординат.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 12 | 13 | 21 |

Вказати рівняння кола, яке на площині симетричне до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі $y$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $(x+5)^2+$<br>$+(y-4)^2=9$ | $(x-5)^2+$<br>$+(y+4)^2=9$ | $(x+4)^2+$<br>$+(y-5)^2=9$ | $(x-4)^2+$<br>$+(y-5)^2=9$ | $(x+4)^2+$<br>$+(y+5)^2=9$ |

Дано трикутник $ABC$ з вершинами $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$. Знайти зовнішній кут при вершині $B$.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 60° | 90° | 120° | 135° | інша відповідь |

# Координати. Додаткові задачі

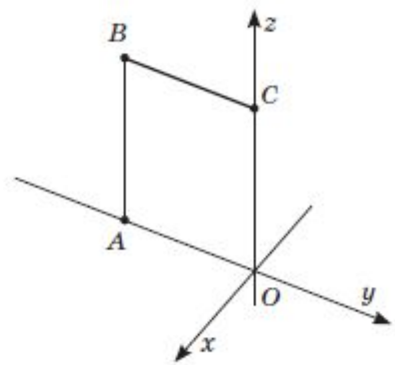
Точки $A(2; 4)$ і $C(5; 8)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Знайти площу цього квадрата.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 5 | 12,5 | 25 | 20 |

Точка Р симетрична точці $A(-2;-3;4)$ відносно координатної площини $xz$. Знайдіть координати точки Р.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| ( 2;–3; 4) | ( – 2; 3; 4) | ( – 2; 3;–4) | ( – 2;– 3;–4) | ( 2;–3;–4) |

На *рисунку* зображено квадрат $OABC$, сторона якого дорівнює 8. Установіть відповідність між вершинами квадрата (1–4) та їхніми координатами (А–Д).




| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Вершина $O$ | А | $(0;0;0)$ |
| 2 | Вершина $A$ | Б | $(0;8;0)$ |
| 3 | Вершина $B$ | В | $(0;-8;8)$ |
| 4 | Вершина $C$ | Г | $(0;0;8)$ |
| | | Д | $(0;-8;0)$ |

# Вектори

***Координати вектора***

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = \overrightarrow{AB}(a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$.

***Рівність векторів***

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

***Колінеарність векторів.***

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$.

***Сума векторів***

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, такий що $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

***Різниця векторів***

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$.

***Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$***

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

***Множення вектора на число***

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

***Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$***

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

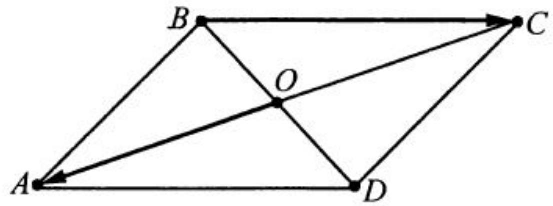
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де $\varphi$ — кут між векторами.

# Вектори. Приклади

За якого значення $m$ вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(m; 2m - 1{,}5)$ будуть перпендикулярними?

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 | –1 | 2 | 1,5 | –6 |

Дано паралелограм $ABCD$. $O$ — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$?




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB}$ | $\overrightarrow{OC}$ | $\overrightarrow{OB}$ | $\overrightarrow{OD}$ | $\overrightarrow{AD}$ |

Серед векторів $\vec{a}$ (4; 14; 2), $\vec{b}$ (2; 7; –1), $\vec{c}$ (0; 0; 3), $\vec{d}$ (–6; –21; 3) знайти колінеарні.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ і $\vec{b}$ | $\vec{a}$ і $\vec{c}$ | $\vec{a}$ і $\vec{d}$ | $\vec{b}$ і $\vec{c}$ | $\vec{b}$ і $\vec{d}$ |

Дано вектори $\vec{a}$ (3; –6; 2) і $\vec{b}$ (8; 4; 5). Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

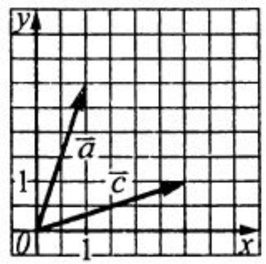
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| –17 | 0 | –5760 | 10 | –3 |

# Вектори. Приклади

Сторона рівностороннього трикутника $ABC$ дорівнює 4. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

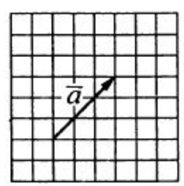
| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 8 | –8 | 4 | –4 | 2 |

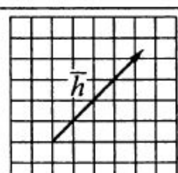
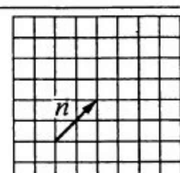
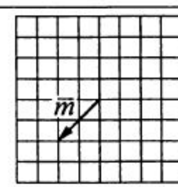
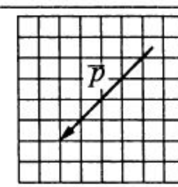
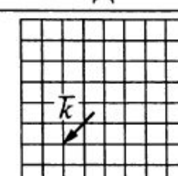
Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |

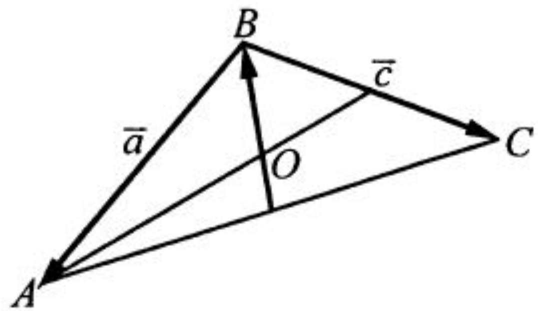
Дано вектор $\vec{a}$. Який з наведених векторів дорівнює $-\frac{2}{3}\vec{a}$?




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |

# Вектори. Складніші приклади

$O$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$. $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.




| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ | $\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$ | $\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}$ | $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$ | $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$ |

Обчислити квадрат довжини вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{c}(2;-2;3)$ і їх скалярний добуток дорівнює 34.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 17 | $\sqrt{17}$ | 2 | 4,5 | 68 |