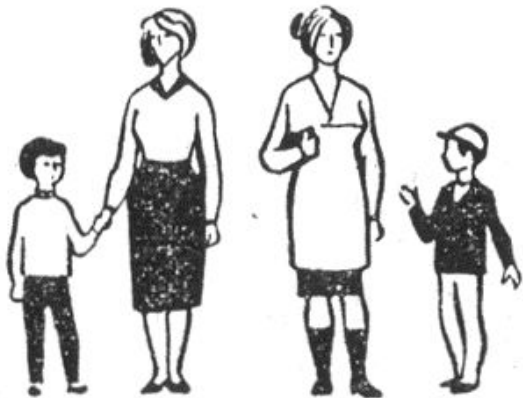


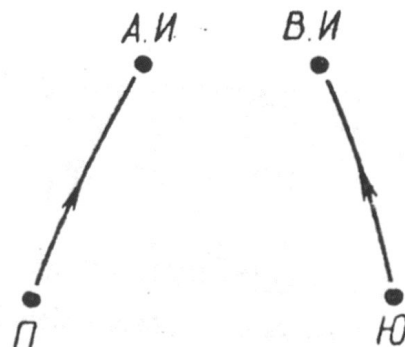


**Отношения.
Бинарные отношения
и их свойства**

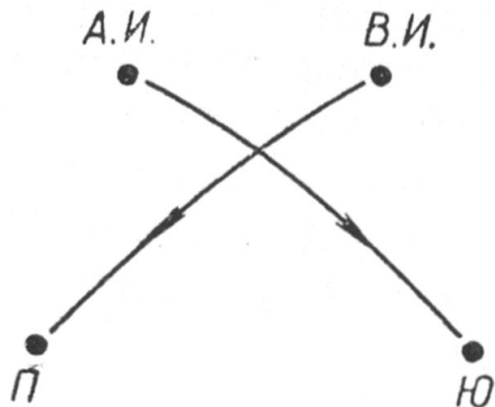


Петя Анна Ивановна
Вера Ивановна Юра

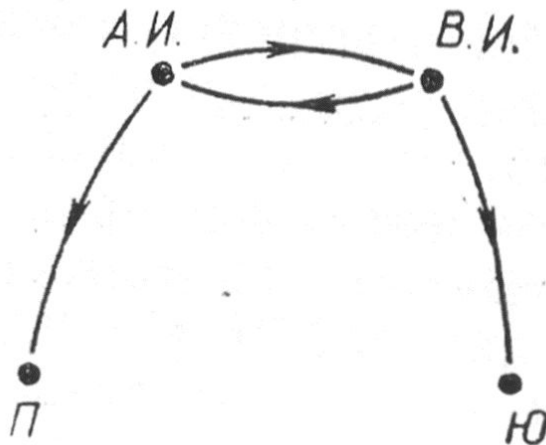
Отношение: «быть сыном»

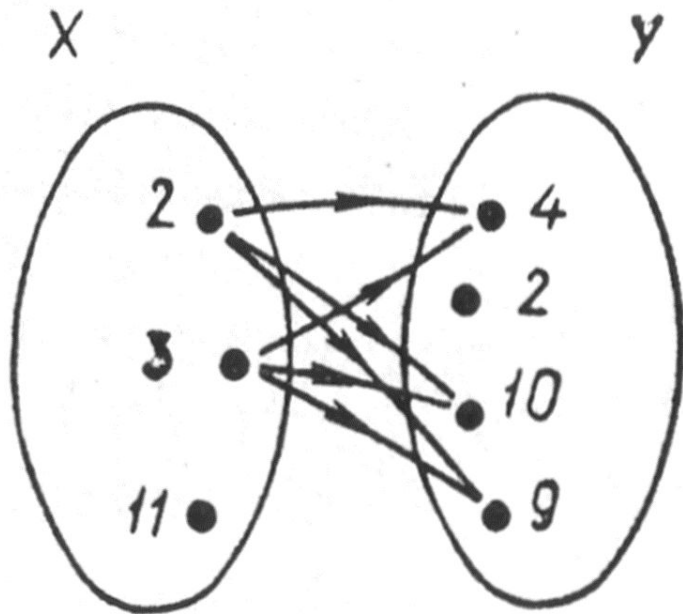
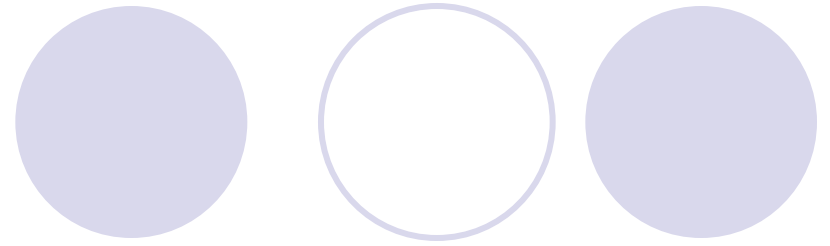


Отношение: «Быть тётёй»



Отношение: «быть сестрой или матерью»





Отношение:
«меньше»

$\{(2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)\}$.

- **Прямым (декартовым) произведением** множеств A и B называется множество всех пар (a,b) , таких, что $a \in A$ и $b \in B$.

Прямое произведение множеств A и B обозначается в виде $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Пример: X – множество точек отрезка $[0;1]$;

Y – множество точек отрезка $[1;2]$.

Тогда $X \times Y$ – множество точек квадрата с вершинами в точках $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,2)$.

- Прямое (декартово) произведение одинаковых множеств называется декартовой степенью множества:

если $B = A$, то $A \times B = A \times A = A^2$.



Отношение

- n -местным (n -арным) **отношением** R заданным на множествах M_1, M_2, \dots, M_n называется подмножество R декартова произведения этих множеств
 $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, где
 $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \dots, m_n \in M_n$ и
 n -ки элементов $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in R$
- При $n=2$ отношение между элементами двух множеств есть множество пар (m_1, m_2)

Бинарные отношения



- **Бинарным отношением** между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.
- Если множества A и B совпадают $A=B$, то R называют бинарным отношением на множестве A . (однородное отношение)
- Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R .

Примеры



- Отношение $a = \{(4, 4), (3, 3), (2, 2), (4, 2)\}$ на множестве $X = \{4, 3, 2\}$ можно определить как свойство "Делится" на этом подмножестве целых чисел.
- Из школьного курса
 - На множестве целых чисел Z отношения "делится", "делит", "равно", "больше", "меньше";
 - на множестве прямых пространства отношения "параллельны", "взаимно перпендикулярны", "скрещиваются", "пересекаются", "совпадают";
 - на множестве окружностей плоскости "пересекаются", "касаются", "концентричны".

Пример

- Пусть $A=B = \mathbb{R}$, пара (x, y) является точкой вещественной плоскости. Тогда:
- Бинарное отношение
 - $R_1 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$
определяет замкнутый круг единичного радиуса с центром в точке $(0,0)$ на плоскости
- Отношение
 - $R_2 = \{ (x, y) \mid x \geq y \}$
полуплоскость
- Отношение
 - $R_3 = \{ (x, y) \mid |x-y| \leq 1 \}$
полосу.

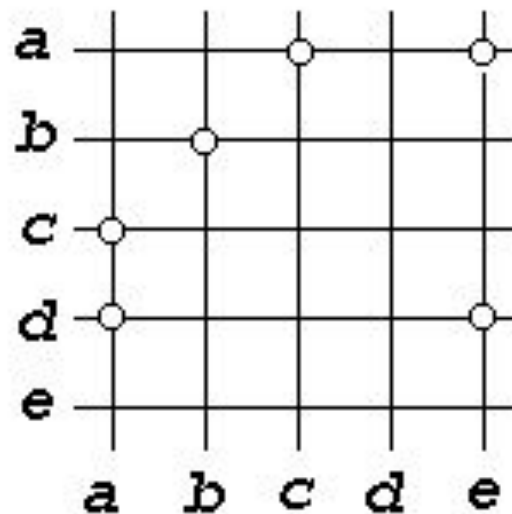
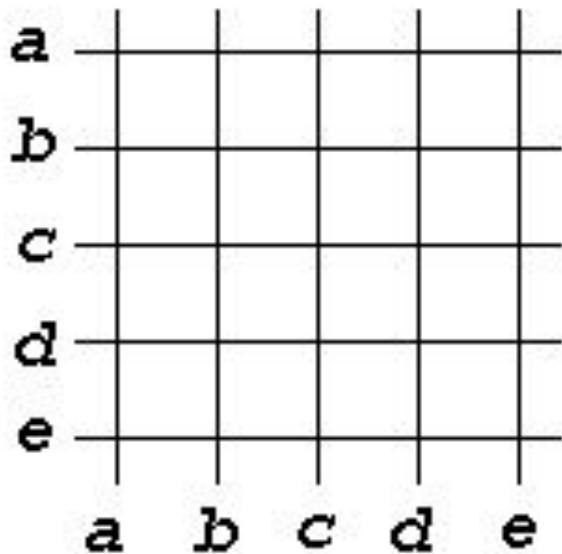
Способы задания

- Перечисление всех пар из базового множества А и базового множества В
 - $A=\{a_1, a_2\}$ $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $R=\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$
- Отношения могут задаваться формулами:
 - Формулы $y = x^2 + 5x - 6$ или $x + y < 5$ задают бинарные отношения на множестве действительных чисел;
 - формула $x + y = \text{любовь}$, задает бинарное отношение на множестве людей.

Способы задания

Графический метод задания

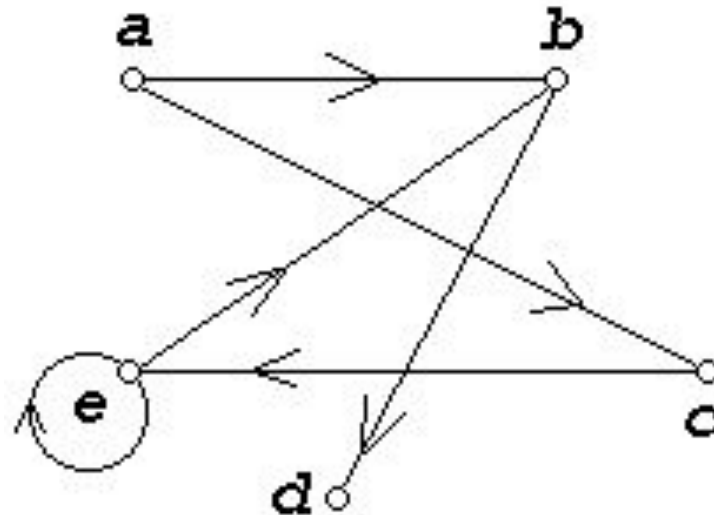
$$R = \{(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e, d), (e, a)\}$$



Способы задания

Графовое представление

- Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества A , то есть x_i , а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j , означает, что $(x_i, x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.
- $A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b), (e, e)\}$



Способы задания

Матричная форма задания

- Пусть на некотором конечном множестве X задано отношение A . Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и определим матрицу отношения $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Определения

- Диагональ множества $A \times A$, т.е. множество $\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$, называется **единичным бинарным отношением** или отношением равенства в A .
- **Областью определения** бинарного отношения R называется множество $\delta R = \{x \in A \mid \exists y \in B, (x, y) \in R\}$.
- **Областью значений** бинарного отношения R называется множество $\rho R = \{y \in B \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}$.

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$\geq \cap \neq = >$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

- Дополнение к отношению

$$\bar{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \setminus R \}.$$

$\bar{\quad} = \complement$

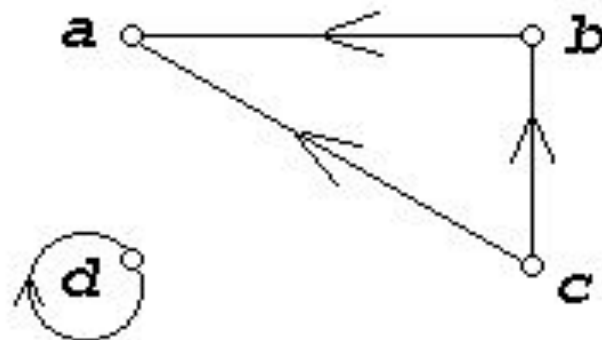
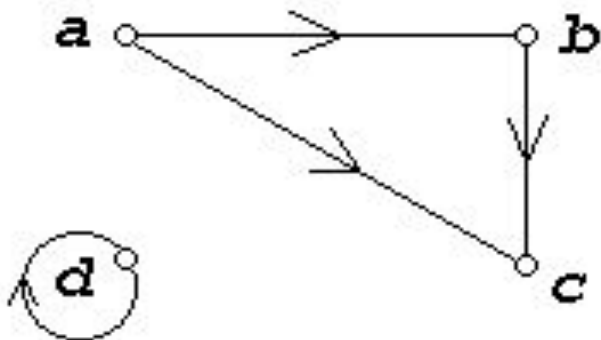
Обратное отношение

- Обратное отношение

$$R^{-1} \in B \times A$$

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B, x \in A, (x, y) \in R\}.$$

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}.$$

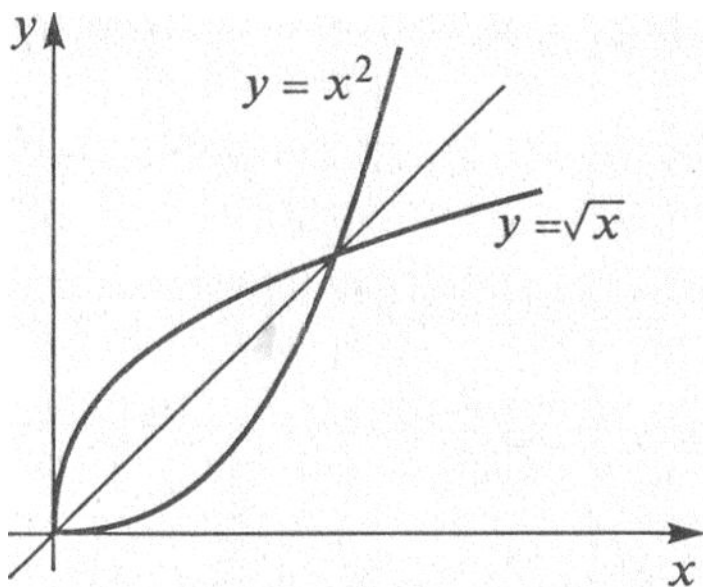


Обратное отношение

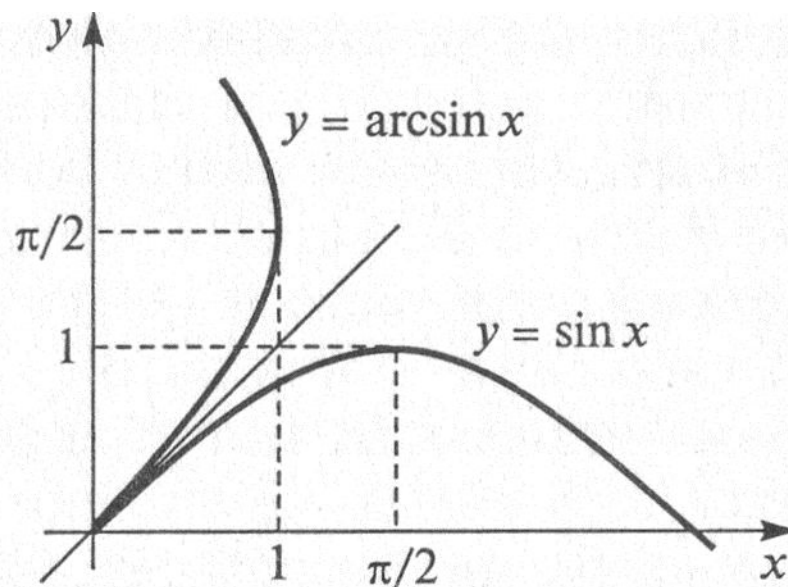
$$M_{\alpha} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right\|$$

$$M_{\alpha^{-1}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right\|$$

Графики прямых и обратных отношений.



a



б

Композиция отношений

- Композиция (суперпозиция) отношений $R=R_1 \circ R_2$ содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда существует такое $z \in A$, что $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

$$\{(x, y) \mid \exists z(x S z \wedge z R y)\}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства отношений

- R_1 содержится в R_2 ($R_1 \subseteq R_2$), если любая пара (x, y) , которая принадлежит отношению R_1 также принадлежит и отношению R_2

- Рефлексивность

$$\forall x \in M (xRx)$$

- Антирефлексивность

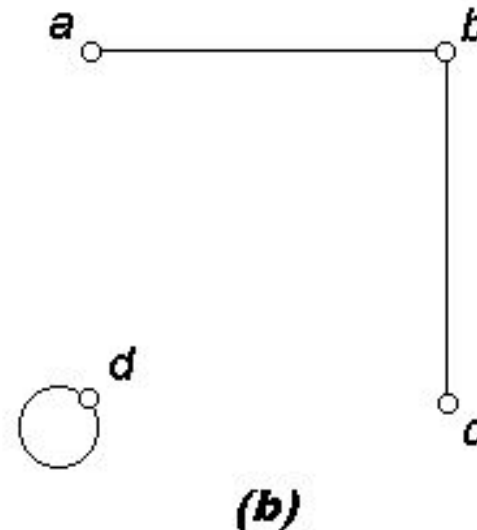
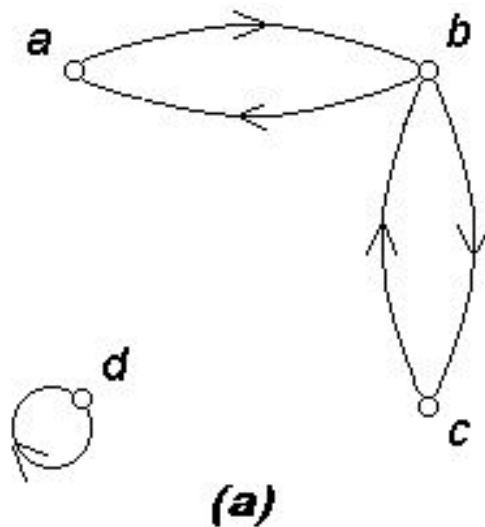
$$\forall x \in M \neg(xRx)$$

Свойства отношений

Симметричность любых двух элементов.

Отношение R на множестве M называется симметричным, если для любых $a, b \in M$ одновременно справедливо aRb и bRa .

$$xRy \rightarrow yRx \text{ или } R=R^{-1} \quad \forall x, y \in M (xRy \Rightarrow yRx)$$



Свойства отношений

- **Антисимметричность**

$$\forall x, y \in M (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

- Пусть A - множество людей в данной очереди. Отношение R "не стоять за кем-то в очереди" будет антисимметричным.

Пусть $x = \text{ВАСЯ}$, а $y = \text{ИВАНОВ}$. Тот факт, что $(x, y) \in R$ означает, что "ВАСЯ не стоит в очереди за ИВАНОВЫМ", $(y, x) \in R$ - "ИВАНОВ не стоит за ВАСЕЙ". Очевидно, что одновременное выполнение обоих включений может быть, только если ВАСЯ и есть ИВАНОВ, т.е. $x = y$.

- Отношение " \geq " также антисимметрично: если $x \geq y$ и $y \geq x$, то $x = y$.

- **Асимметричность**

$$\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

- Асимметричность эквивалентна одновременной антирефлексивности и антисимметричности отношения.

Свойства отношений

- Для любого отношения R вводятся понятия симметричной части отношения
 $R^s = R \cap R^{-1}$
- и асимметричной части отношения
 $R^a = R \setminus R^s$.
- Если отношение R симметрично, то $R = R^s$,
- Если отношение R асимметрично, то $R = R^a$.

Примеры.

Если R - " \geq ", то R^{-1} - " \leq ", R^s - "=", R^a - ">".

Свойства отношений


Транзитивность отношений

Если aRb и bRc , то aRc для любых $a, b, c \in M$.

$$\forall x, y, z \in M (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

Нетранзитивное отношение

- Отношение R , определенное на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z этого множества из xRy и yRz не следует xRz .
- Примеры нетранзитивных отношений:
 1. « x отец y »
 2. " \neq ". Пусть $x=2, y=3, z=2$, тогда справедливо $x \neq y$ и $y \neq z$, но $x=z$, т.е. $(x, z) \notin R$.



Отношения эквивалентности (подобия, равносильности)

- Бинарное отношение R на множестве A называется **отношением эквивалентности**, если оно обладает следующими свойствами:
 - рефлексивность
 - симметричность
 - транзитивность
- Обозначается $=, \approx, \sim, \equiv$

Отношение эквивалентности

- $x \approx x$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
- Если $x \approx y$, то $y \approx x$ (симметричность)
- Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$
(транзитивность)

Примеры



- отношение параллельности на множестве прямых плоскости;
- отношение подобия на множестве фигур плоскости;
- отношение равносильности на множестве уравнений;
- отношение "иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число m " на множестве целых чисел. Это отношение в математике называют отношением сравнимости по модулю m и обозначают $a \equiv b \pmod{m}$;
- отношение "принадлежать одному виду" на множестве животных;
- отношение "быть родственниками" на множестве людей;
- отношение "быть одного роста" на множестве людей;
- отношение "жить в одном доме" на множестве людей.

Классы эквивалентности

- Система непустых подмножеств

$$\{M_1, M_2, \dots\}$$

множества M называется *разбиением* этого множества, если

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$$

и при $i \neq j$

$$M_i \cap M_j = \emptyset.$$

Сами множества M_1, M_2, \dots называются при этом *классами* данного разбиения.

Примеры



- Разложение всех многоугольников на группы по числу вершин - треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.;
- Разбиение всех треугольников по свойствам углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные);
- Разбиение всех треугольников по свойствам сторон (разносторонние, равнобедренные, равносторонние);
- Разбиение всех треугольников на классы подобных треугольников;
- Разбиение множества всех учащихся данной школы по классам.

Класс эквивалентности

- **Классом эквивалентности** $C(a)$ элемента a называется подмножество элементов, эквивалентных a .

Из вышеприведённого определения немедленно следует, что, если и $b \in C(a)$, то $C(a) = C(b)$.

Теорема



- Отношение эквивалентности, заданное между элементами базового множества X , определяет разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности базового множества

Теорема



- Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.
- *Доказательство.* Пусть A и B - два класса эквивалентности из X . Допустим, что они пересекаются и c - общий элемент, то есть $c \in A$, $c \in B$. Если x - произвольный элемент из A , то $x \sim c$. Поскольку $c \in B$, то и $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$. Аналогично доказывается, что $B \subset A$. Итак, $A = B$.
Теорема доказана

Функция



- **Функцией** называется бинарное отношение f из X в Y , если из $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$ следует, что $y = z$. То есть каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$.
- Такое свойство отношения называется однозначностью, или **функциональностью**.

Функция



- Если f — функция, то вместо $(x, y) \in f$ пишут $y=f(x)$ и говорят, что y — значение, соответствующее аргументу x , или y — образ элемента x при отображении f . При этом x называют прообразом элемента y .