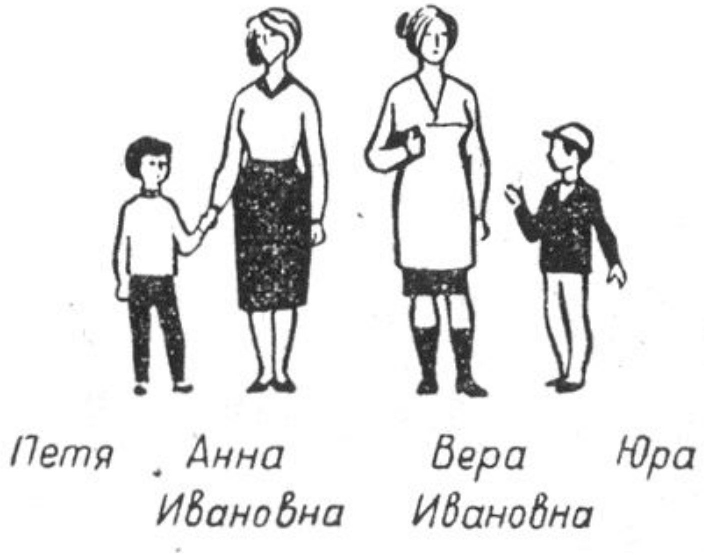
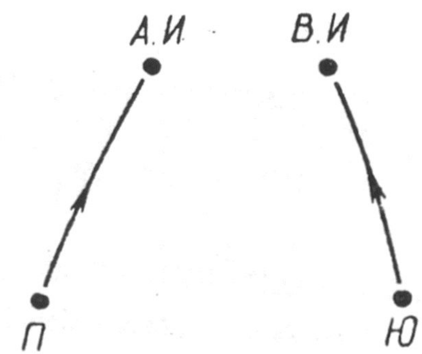
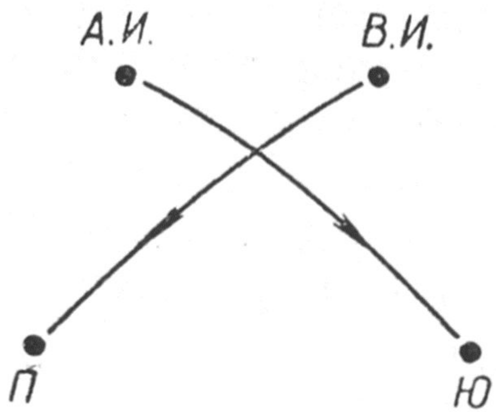
Отношения. Бинарные отношения и их свойства



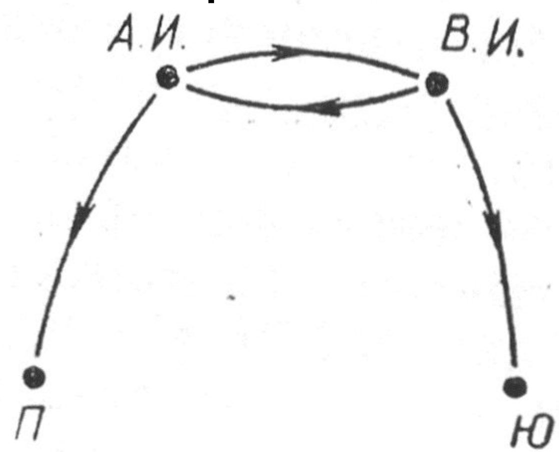
Отношение: «быть сыном»

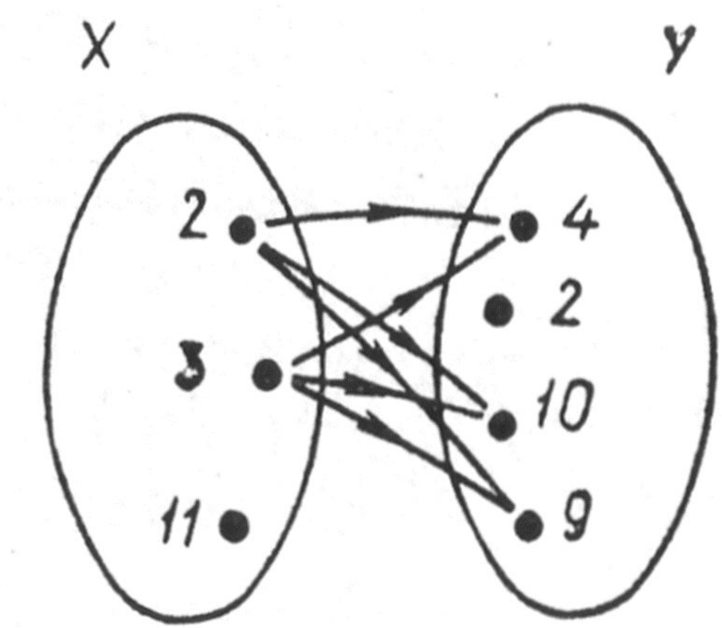


Отношение: «Быть тётей»



Отношение: «быть сестрой или матерью»





Отношение:
«меньше»

{(2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)}.

- **Прямым (декартовым) произведением** множеств A и B называется множество всех пар (a,b), таких, что $a \in A$ и $b \in B$. Прямое произведение множеств A и B обозначается в виде $A \times B$:

  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

  Пример: X – множество точек отрезка [0;1];
  Y – множество точек отрезка [1;2].
  Тогда **X**x**Y** – множество точек квадрата с вершинами в точках (0,1), (0,2), (1,1), (1,2).

- Прямое (декартово) произведение одинаковых множеств называется декартовой степенью множества:

  если $B = A$, то $AxB = AxA = A^2$.

Отношение

- n-местным (n-арным) **отношением R** заданным на множествах M_1, M_2,…M_n называется подмножество R декартова произведения этих множеств
  $R \subseteq M_1 x M_2 x \ldots x M_n$, где
  $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_{2,\ldots}$ $m_n \in M_n$ и
  n-ки элементов $(m_1, m_2 ,_{\ldots} m_n) \in R$

- При n=2 отношение между элементами двух множеств есть множество пар (m_1, m_2)

Бинарные отношения

- **Бинарным отношением** между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.
- Если множества A и B совпадают $A=B$, то R называют бинарным отношением на множестве A. (однородное отношение)
- Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R.

Примеры

- Отношение a= {(4, 4), (3, 3), (2, 2), (4, 2)} на множестве X = {4, 3, 2} можно определить как свойство "Делится" на этом подмножестве целых чисел.
- Из школьного курса
  - На множестве целых чисел Z отношения "делится", "делит", "равно", "больше", "меньше";
  - на множестве прямых пространства отношения "параллельны", "взаимно перпендикулярны", "скрещиваются", "пересекаются", "совпадают";
  - на множестве окружностей плоскости "пересекаются", "касаются", "концентричны".

Пример

- Пусть A=B ***R***, пара (x, y) является точкой вещественной плоскости. Тогда:
- Бинарное отношение
  - $R_1 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

определяет замкнутый круг единичного радиуса с центром в точке (0,0) на плоскости

- Отношение
  - $R_2 = \{ (x, y) \mid x \geq y \}$

  полуплоскость
- Отношение
  - $R_3 = \{ (x, y) \mid |x-y| \leq 1 \}$

  полосу.

Способы задания

- Перечисление всех пар из базового множества A и базового множества B
  - $A=\{a_1, a_2\}$ $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $R=\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$
- Отношения могут задаваться формулами:

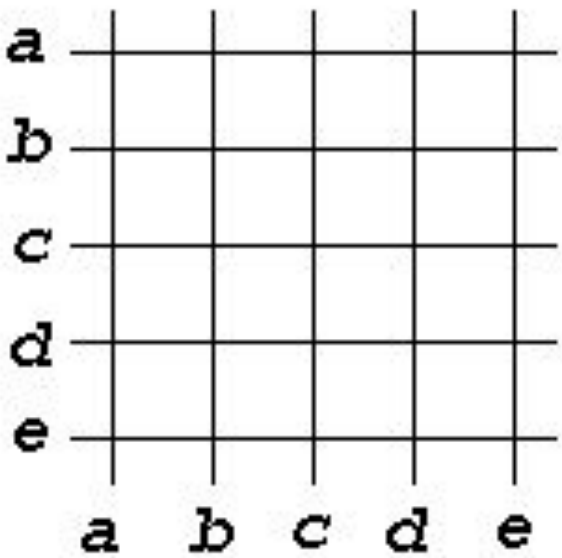
  \- Формулы $y = x^2 + 5x - 6$ или $x + y < 5$ задают бинарные отношения на множестве действительных чисел;

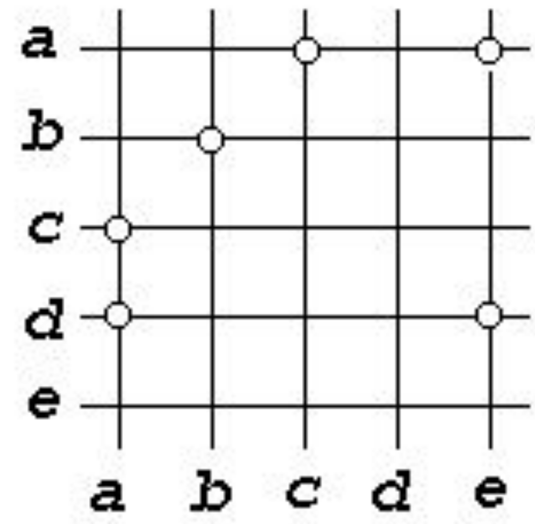
  \- формула $x + y =$ любовь, задает бинарное отношение на множестве людей.

Способы задания

Графический метод задания

R= {(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e,d), (e, a)}



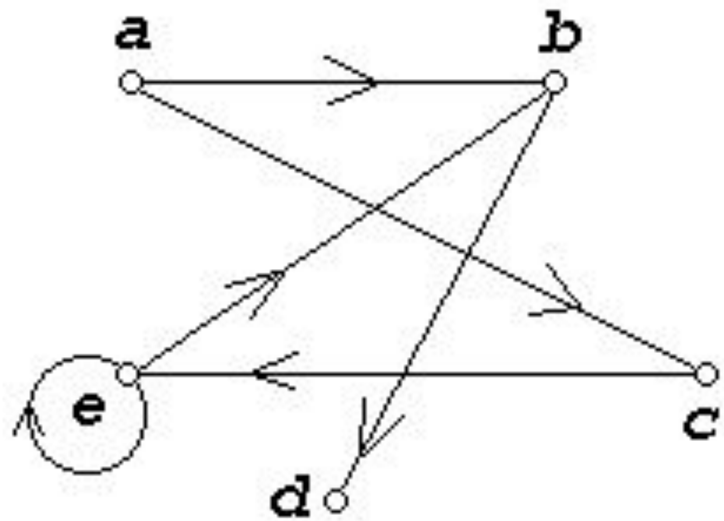


Способы задания

Графовое представление

- Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества А, то есть x_i, а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j, означает, что $(x_i, x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.

- А={(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *d*), (*c*, *e*), (*e*,*b*), (*e*, *e*)}



Способы задания

Матричная форма задания

- Пусть на некотором конечном множестве *X* задано отношение A. Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и определим *матрицу отношения* $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c|ccccc|} & a & b & c & d & e \\ a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Определения

- Диагональ множества $A \times A$, т.е. множество
$$\Delta=\{(x,x) \mid x \in A\},$$
называется **единичным бинарным отношением** или отношением равенства в A.
- **Областью определения** бинарного отношения R называется множество
$\delta R=\{ x \in A \mid \; y \in B, (x, y) \in R \}$.
- **Областью значений** бинарного отношения R называется множество
$\rho R=\{ y \in B \mid \; x \in A, (x, y) \in R \}$.

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$\geq \cap \neq = >$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \backslash R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

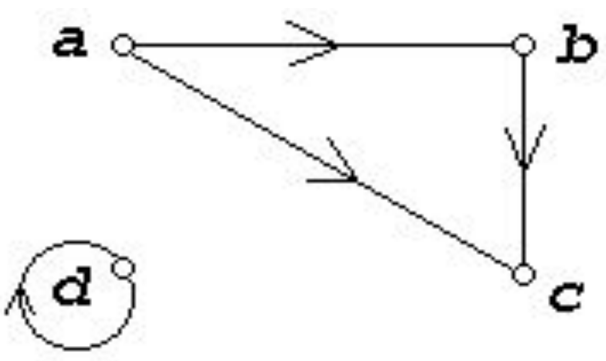
- Дополнение к отношению

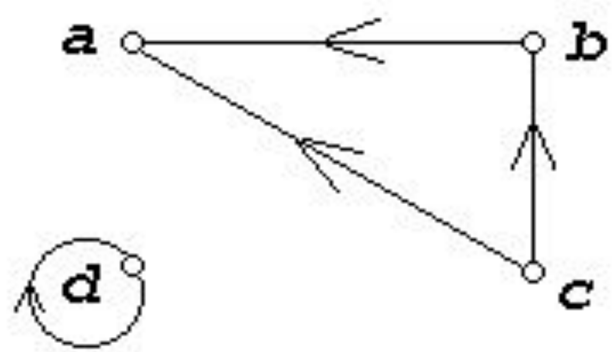
$$\overline{R} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \backslash R \}.$$

$\bar{\geq} \equiv <$

Обратное отношение

- Обратное отношение
  $R^{-1} \in B x A$
  $R^{-1} = \{(y, x) | y \in B, x \in A, (x, y) \in R\}.$
  $R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}.$



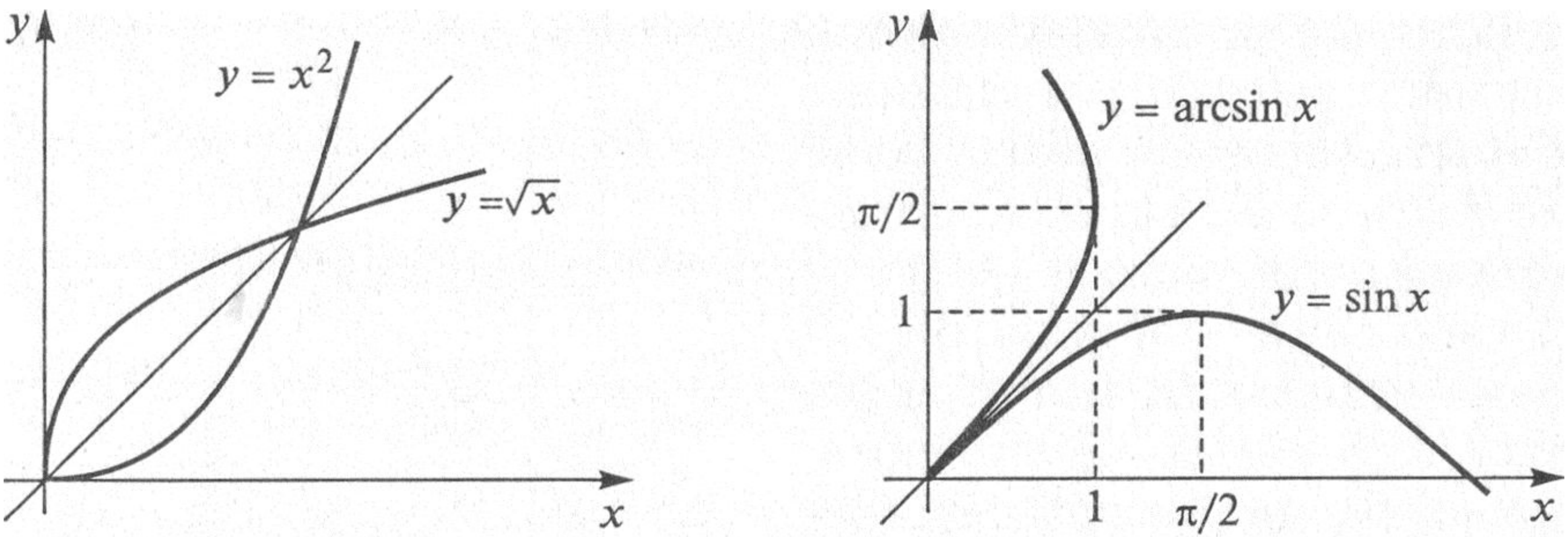


Обратное отношение

$$M_{\alpha} = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_{\alpha^{-1}} = \begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Графики прямых и обратных отношений.



а *б*

Композиция отношений

- Композиция (суперпозиция) отношений $R = R_1 \circ R_2$ содержит пару (x, y) тогда и только тогда, когда существует такое $z \in A$, что $(x, z) \in R_1$ и $(z, y) \in R_2$.

$$\{(x,\ y) \mid \exists z (xSz \wedge zRy)\}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства отношений

- R_1 содержится в R_2 ($R_1 \subseteq R_2$), если любая пара (x, y), которая принадлежит отношению R_1 также принадлежит и отношению R_2
- Рефлексивность

$$\forall x \in M \ (xRx)$$

- Антирефлексивность

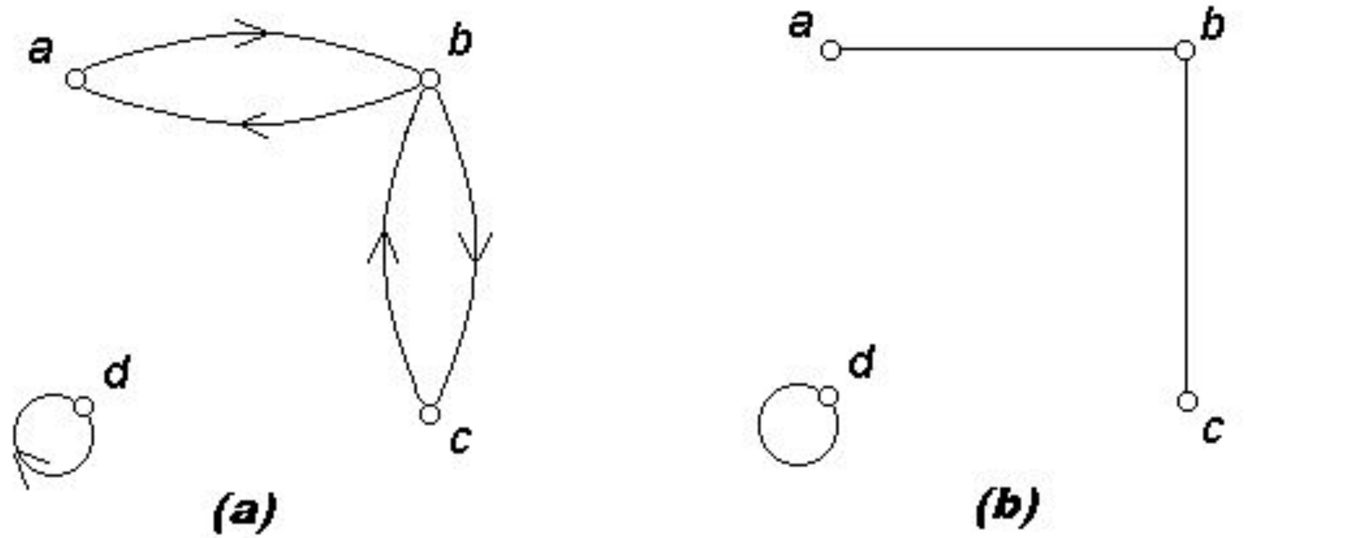
$$\forall x \in M \ \neg(xRx)$$

Свойства отношений

Симметричность *любых двух элементов.*

Отношение R на множестве M называется симметричным, если для любых a, b ∈M одновременно справедливо aRb и bRa.

xRy →yRx или $R=R^{-1}$ $\forall x,\ y \in M(xRy \Rightarrow yRx)$



Свойства отношений

- **Антисимметричность**

$$\forall x,\ y \in M(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

- Пусть A - множество людей в данной очереди. Отношение R "не стоять за кем-то в очереди" будет антисимметричным.

Пусть x=ВАСЯ, а y=ИВАНОВ. Тот факт, что (x, y)∈R означает, что "ВАСЯ не стоит в очереди за ИВАНОВЫМ", (y, x)∈R - "ИВАНОВ не стоит за ВАСЕЙ". Очевидно, что одновременное выполнение обоих включений может быть, только если ВАСЯ и есть ИВАНОВ, т.е. x = y.

- Отношение "≥" также антисимметрично: если x≥y и y≥x, то x=y.

- **Асимметричность**

$$\forall x,\ y \in M(xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

- Асимметричность эквивалентна одновременной антирефлексивности и антисимметричности отношения.

Свойства отношений

- Для любого отношения R вводятся понятия симметричной части отношения
  $R^s = R \cap R^{-1}$
- и асимметричной части отношения
  $R^a = R \setminus R^s$.
- Если отношение R симметрично, то $R = R^s$,
- Если отношение R асимметрично, то $R = R^a$.

Примеры.

Если R - "≥", то R^{-1} - "≤", R^s - "=", R^a - ">".

Свойства отношений

Транзитивность отношений

Если aRb и bRc, то aRc для любых a, b, c ∈M.

$$\forall x,\ y,\ z \in M(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

Нетранзитивное отношение

- Отношение R, определенное на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z этого множества из xRy и yRz не следует xRz.
- Примеры нетранзитивных отношений:

1.«x отец y»

2. "≠". Пусть x=2, y=3, z=2, тогда справедливо x≠y и y≠z, но x=z, т.е. (x, z)∉R.

Отношения эквивалентности (подобия, равносильности)

- Бинарное отношение R на множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает следующими свойствами:
  - рефлексивность
  - симметричность
  - транзитивность
- Обозначается =, ≈, ~, ≡

Отношение эквивалентности

- $x \approx x$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
- Если $x \approx y$, то $y \approx x$ (симметричность)
- Если $x \approx y$ и $y \approx z$, то $x \approx z$ (транзитивность)

Примеры

- отношение параллельности на множестве прямых плоскости;
- отношение подобия на множестве фигур плоскости;
- отношение равносильности на множестве уравнений;
- отношение "иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число *m*" на множестве целых чисел. Это отношение в математике называют отношением сравнимости по модулю *m* и обозначают $a \equiv b \pmod{m}$;
- отношение "принадлежать одному виду" на множестве животных;
- отношение "быть родственниками" на множестве людей;
- отношение "быть одного роста" на множестве людей;
- отношение "жить в одном доме" на множестве людей.

Классы эквивалентности

- Система непустых подмножеств

$$\{M_1, M_2, \ldots\}$$

множества M называется *разбиением* этого множества, если

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ \ldots$$

и при $i \neq j$

$$M_i \cap M_j = \varnothing.$$

Сами множества $M_1, M_2, \ldots$ называются при этом *классами* данного разбиения.

Примеры

- Разложение всех многоугольников на группы по числу вершин - треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.;
- Разбиение всех треугольников по свойствам углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные);
- Разбиение всех треугольников по свойствам сторон (разносторонние, равнобедренные, равносторонние);
- Разбиение всех треугольников на классы подобных треугольников;
- Разбиение множества всех учащихся данной школы по классам.

Класс эквивалентности

- **Классом эквивалентности** $C(a)$ элемента a называется подмножество элементов, эквивалентных a.

Из вышеприведённого определения немедленно следует, что, если и $b \in C(a)$, то $C(a) = C(b)$.

Теорема

- Отношение эквивалентности, заданное между элементами базового множества X, определяет разбиение множества X на непересекающиеся классы эквивалентности базового множества

Теорема

- Два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.
- *Доказательство*. Пусть A и B - два класса эквивалентности из X. Допустим, что они пересекаются и c - общий элемент, то есть $c \in A$, $c \in B$. Если x - произвольный элемент из A, то $x \sim c$. Поскольку $c \in B$, то и $x \in B$. Таким образом, $A \subset B$. Аналогично доказывается, что B ⊂ A. Итак, A = B. Теорема доказана

Функция

- **Функцией** называется бинарное отношение f из X в Y, если из $(x,y)\in f$ и $(x,z)\in f$ следует, что $y=z$. То есть каждому элементу $x\in X$ соответствует не более одного элемента $y\in Y$.

- Такое свойство отношения называется однозначностью, или **функциональностью**.

Функция

- Если f — функция, то вместо $(x,y) \in f$ пишут $\boldsymbol{y=f(x)}$ и говорят, что у — значение, соответствующее аргументу x, или y — образ элемента x при отображении f. При этом x называют прообразом элемента y.