

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.1 Заряд. Закон сохранения заряда

Заряд – одна из важнейших характеристик вещества, проявляющаяся на уровне атомов и молекул. Все атомы состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Отрицательный заряд электрона $-e$ и равный ему по модулю положительный заряд протона $+e$ являются элементарными (наименьшими) зарядами, которые встречаются в природе. Величина элементарного электрического заряда $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Изменение заряда атома происходит дискретно кратно величине e . Ввиду малости элементарного заряда, изменение заряда макроскопических тел можно считать непрерывным. Атомы и молекулы являются электрически нейтральными системами. Электрические заряды могут исчезать или возникать вновь, однако, всегда исчезают или возникают два разноименных элементарных заряда или несколько их пар. Поэтому заряд q электрически изолированной системы не может изменяться $q = \sum q_i = \text{const}$. Это утверждение называют законом сохранения заряда

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.2 Закон Кулона

Взаимодействие точечных зарядов и заряженных тел сферической формы подчиняется закону Кулона, который был получен им в 1785 году экспериментально. С помощью крутильных весов измерялась сила взаимодействия между зарядами и их величины. Сила взаимодействия двух точечных неподвижных электрических зарядов в вакууме пропорциональна величине каждого из них и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (рис.1).

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$

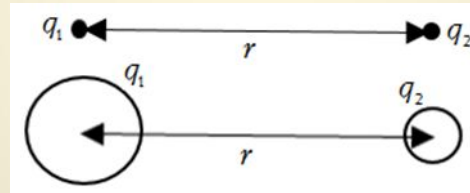


Рис.1

Рис.1

где k – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально. В системе СИ за единицу заряда принимают 1 кулон (определение которого будет дано позже), а коэффициент $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Кл} \cdot \text{м} / \text{Кл}^2$. Его можно записывать в виде $k = 1/4\pi\epsilon_0$, где ϵ_0 – электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{В} \cdot \text{м}$. Единица емкости фарада (Ф) будет определена позже.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В векторной форме закон Кулона записывается в виде

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}.$$

В диэлектриках сила взаимодействия зарядов уменьшается

$$F_{\text{диэл}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2},$$

где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды. Она показывает во сколько раз сила взаимодействия двух зарядов в среде меньше силы взаимодействия тех же зарядов на том же расстоянии в воздухе.

1.3 Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Принцип суперпозиции электрических полей

Определим электрическое поле следующим образом: если внести в пустое пространство заряд q , свойства пространства изменятся, и в нем возникнет электрическое поле. Оно будет проявляться в действии определенной силы на внесенный в поле на расстоянии r другой (пробный) электрический заряд $q_{\text{пр}}$. Для поля точечного заряда q эта сила определяется законом Кулона.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В каждой точке поля сила F будет иметь разное значение и ее можно использовать для задания поля. Однако, пробный заряд не имеет никакого отношения к рассматриваемому электрическому полю. Его можно исключить, разделив значение силы на величину пробного заряда.
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}}$$

Полученная величина называется напряженностью электрического поля. Для точечного заряда она равна $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Напряженность электрического поля является

силовой характеристикой поля. Зная напряженность поля, можно определить силу, действующую на заряд в любой его точке $\vec{F} = q_{\text{пр}} \vec{E}$. Таким образом, напряженность электрического поля равна силе, действующей на единичный положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля.

Электрическое поле принято описывать с помощью линий напряженности, касательная в каждой точке которых определяет направление напряженности поля.

Величина напряженности определяется числом линий, проходящих через площадку единичной площади. Чем гуще идут линии, тем больше напряженность поля. На рис.2 через площадку S_1 проходит 2 линии, а через такую же по площади площадку S_2 4 линии, поэтому напряженность поля у площадки S_2 будет больше.

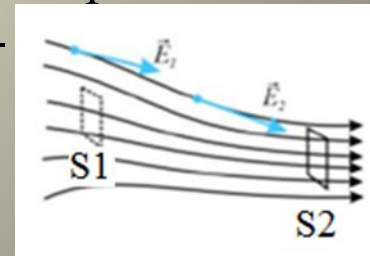


Рис.2

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность. Линии напряженности могут приходить из бесконечности и заканчиваться на отрицательных зарядах (рис.3).

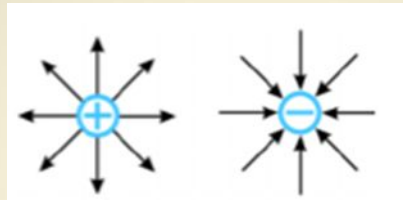


Рис. 3

Принцип суперпозиции электрических полей

Если в пространстве имеется несколько электрических полей, то напряженность результирующего поля определяется векторной суммой напряженностей этих полей

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.4 Потенциал электростатического поля. Принцип суперпозиции для потенциала

Пусть электрическое поле создается положительным точечным зарядом q , и в нем перемещается положительный точечный пробный заряд $q_{\text{пр}}$ ((рис.4).

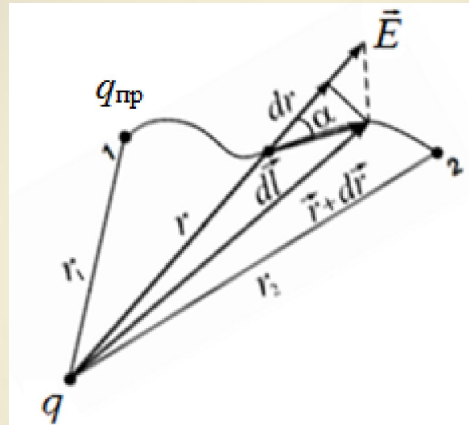


Рис.4

Работа при бесконечно малом перемещении заряда $d\vec{\ell}$ по определению равна $dA = \vec{F} d\vec{\ell}$. Подставляя сюда выражение для силы из закона Кулона, получим:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_{\text{пр}} q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left(\frac{q_{\text{пр}} q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q_{\text{пр}} q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_{\text{пр}} q}{r_1} - \frac{q_{\text{пр}} q}{r_2} \right).$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Из полученного результата видно, что работа не зависит от пути перемещения заряда $q_{\text{пр}}$, а определяется только его начальным и конечным положением, т.е. электростатическое поле является потенциальным, а его силы консервативны. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле по замкнутому пути равна нулю.

$$A = \oint_{\ell} \vec{F} d\vec{\ell} = q \oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = 0,$$

откуда $\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = 0$ - циркуляция вектора напряженности электрического поля равна нулю.

Работа консервативных сил электростатического поля по перемещению заряда равна изменению потенциальной энергии заряда в этом поле, которая в рассматриваемом случае равна $U = -\frac{q_{\text{пр}}q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Потенциальная энергия характеризует

электрическое поле в каждой его точке и может быть использована как энергетическая характеристика поля заряда q . Пробный заряд, не имеющий отношения к полю, можно исключить, разделив потенциальную энергию на $q_{\text{пр}}$. Полученную величину называют потенциалом электрического поля $\varphi = \frac{U}{q_{\text{пр}}}$. Для поля точечного заряда $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Выражая работу A_{12} через потенциальную энергию и потенциал, получим:

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

$$A_{\text{пр}} = U_1 - U_2 = q (\varphi - \varphi_2)$$

Рассмотрим работу по перемещению заряда из данной точки в бесконечность:

$$A_{\text{пр}} = U_1 - U_{\infty} = q (\varphi - \varphi_{\infty}) = q \varphi.$$

Если принять $\varphi_{\infty} = 0$, то потенциал в данной точке электростатического поля определяется как работа, совершаемая силами поля по перемещению единичного положительного пробного заряда из данной точки в бесконечность.

Принцип суперпозиции для потенциала

Если в пространстве имеется несколько электрических полей, то потенциал результирующего электростатического поля определяется алгебраической суммой потенциалов этих полей $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$.

Единицы потенциала

Размерность работы связана с размерностью потенциала соотношением

$$[A] = [q] \cdot [\varphi],$$

откуда $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}$ и $\mathbf{В} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Из соотношения $dA = -dU$ получим:

$$qE_{\rho}d\ell = -qd\varphi = -q \frac{\partial\varphi}{\partial\ell} d\ell,$$

где $E_{\rho} = E \cos\alpha$ - проекция напряженности поля \vec{E} на направление перемещения $d\vec{\ell}$.

Тогда $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}$, а $\varphi = \int E_{\rho}d\ell + \text{const}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_{\rho}d\ell$. Если $E = \text{const}$

(поле однородно), то $\varphi_1 - \varphi_2 = E \int_1^2 d\ell = Ed$, где d - расстояние между точками

1 и 2 по прямой.

При перемещении по оси x $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, по оси y $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и по оси z $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Для вектора \vec{E} имеем:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \text{ или } \vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Градиент – вектор, направление которого совпадает с направлением, в котором рассматриваемая величина при смещении из данной точки возрастает с максимальной скоростью.

Поверхность равного потенциала $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ называется эквипотенциальной.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

При смещении вдоль касательной к такой поверхности на бесконечно малую величину $d\vec{\tau}$ потенциал не меняется, поэтому $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$. Производная

$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ с точностью до знака равна проекции вектора \vec{E} на направление $d\vec{\tau}$ к

поверхности и равно нулю. Следовательно, тангенциальная составляющая \vec{E} равна нулю и вектор перпендикулярен поверхности.

Примеры решения задач

Задача 1. Два одинаковых заряженных шарика, имеющих заряды $q_1 = -5$ нКл и $q_2 = 25$ нКл, приводят в соприкосновение и вновь разводят на прежнее расстояние. Найдите, во сколько раз уменьшилась величина их силы взаимодействия.

Решение. При соприкосновении одинаковых шариков их суммарный заряд распределится поровну. По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = 2q$ и на каждом шарике окажется заряд $q = +10$ нКл. Вначале сила взаимодействия между зарядами равна $F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, а после соприкосновения $F_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Сила взаимодействия уменьшится в $\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1 q_2}{q^2} = 1,25$ раза.

Задача 2. Два одинаковых маленьких шарика с одинаковыми зарядами подвешены на изолирующих нитях равной длины к одной точке. При заполнении окружающей среды моторным маслом угол расхождения нитей не изменился. Найдите плотность материала шариков. Диэлектрическая проницаемость ϵ масла 3, его плотность $\rho_m = 900 \text{ кг/м}^3$.

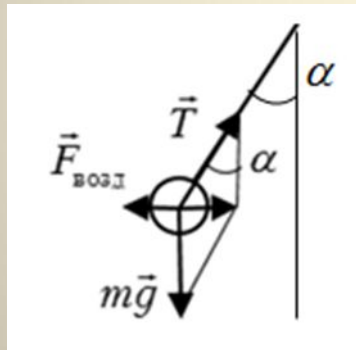


Рис. 5а

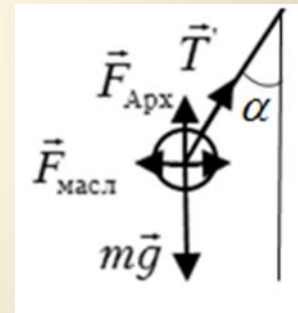


Рис. 5б

Решение. В воздухе (рис.5а) на каждый шарик действуют сила натяжения нити, сила тяжести и кулоновская сила $F_{\text{возд}}$ со стороны другого шарика. Сумма двух последних сил равна по модулю силе натяжения нити.

Тангенс угла отклонения нити от вертикали $\text{tg}\alpha = \frac{F_{\text{возд}}}{mg}$. При погружении

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

системы в масло (рис.5б) на шарик дополнительно действует сила Архимеда, а кулоновская сила в масле $F_{\text{масл}}$ уменьшается. Так как угол α не меняется, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{масл}}}{mg - F_{\text{арх}}} = \frac{F_{\text{возд}}}{mg}$. Преобразуя это равенство, получим ,

где $\rho = \frac{3\rho_{\text{м}}}{\varepsilon - 1} = 1350 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - плотность масла.

Задача 3. Два точечных заряда $+4$ нКл и -4 нКл находятся на расстоянии $r = 50$ см друг от друга (рис.6) Найдите величину напряженности электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 60$ см от первого заряда и на расстоянии $r_2 = 80$ см от второго.

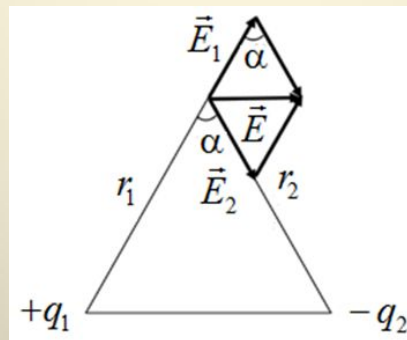


Рис. 6

Решение. Суммарная напряженность электрического поля в рассматриваемой точке определяется по теореме косинусов

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \alpha$$

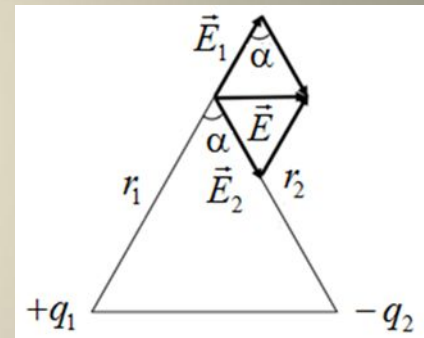
где $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$ - напряженность от первого заряда, $E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$ -

напряженность от второго заряда (рис.6).

Угол α найдем, записав еще раз теорему косинусов для сторон треугольника $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha$, откуда $\cos \alpha = (r_1^2 + r_2^2 - r^2) / 2r_1r_2$

Окончательно получим

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2^2}\right)^2 - 2\frac{\cos \alpha}{r_1^2 r_2^2}} = 66,18 \text{ —}$$



Задача 4. Потенциал поля, создаваемого некоторой системой зарядов, зависит от координат по закону $\varphi = a(x^2+y^2) - bz^2$, где $a = 5 \text{ В/м}^2$, $b = 10 \text{ В/м}^2$. Найдите модуль вектора напряженности поля в точке с координатами (1;1;1). Координаты указаны в метрах.

Решение. Напряженность и потенциал электрического поля связаны соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Дифференцируя потенциал и подставляя в выражение для grad , получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{(2ax)^2 + (2ay)^2 + (2bz)^2} = 24,5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Задача 5. Положительные заряды $q_1 = 30 \text{ нКл}$ и $q_2 = 6 \text{ нКл}$ находятся в вакууме на расстоянии 30 см друг от друга. Найдите работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить эти заряды до расстояния 9 см.

Решение. Будем считать, что заряд q_1 создает электрическое поле, а заряд q_2 в нем перемещается. Тогда работа A сил поля по перемещению заряда равна $A = q_2(\phi_1 - \phi_2) = q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right) = 1,26 \cdot 10^{-5}$

Задача 6. В электрическом поле движется заряженная частица. В точке поля с потенциалом 300 В частица имела скорость $v_1 = 10^8 \text{ м/с}$, а в точке с потенциалом, в n раз меньшим, скорость в ней была n раз больше. Удельный заряд частицы (отношение заряда к массе) равен 10^8 Кл/кг . Найдите по этим данным величину n .

Решение. Запишем закон сохранения энергии:

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

$$q\varphi_1 + \frac{mv^2}{2} = q \frac{\varphi}{n} + \frac{m(nv)^2}{2}$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$n^2 + n - \frac{2q\varphi}{mv^2} = 0. \quad \frac{2q\varphi(n-1)}{mv^2n} = n^2 - 1.$$

Решая это квадратное уравнение, получим $n = 2$.

Задача 7. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U=5$ кВ, в начале координат влетает под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту в однородное электрическое поле с напряженностью $E=40$ кВ/м, направленное вертикально вниз. Через какое время ее координата y снова будет равна нулю. Ее удельный заряд $\frac{q}{m} = 108$ Кл/кг, силу тяжести не учитывать.

Решение. Пройдя ускоряющую разность потенциалов, частица получит кинетическую энергию $qU = \frac{mv_0^2}{2}$ и будет двигаться в

направленном вниз электрическом поле с постоянным ускорением $a = \frac{qE}{m}$. Координата y частицы будет зависеть от времени следующим образом

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{at^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{qEt^2}{2m}$$

Координата y обращается в 0 в момент времени

$$t = \frac{2mv_0 \sin \alpha}{qE} = \frac{2m \sqrt{\frac{2qU}{m}} \sin \alpha}{qE} = 0,125$$