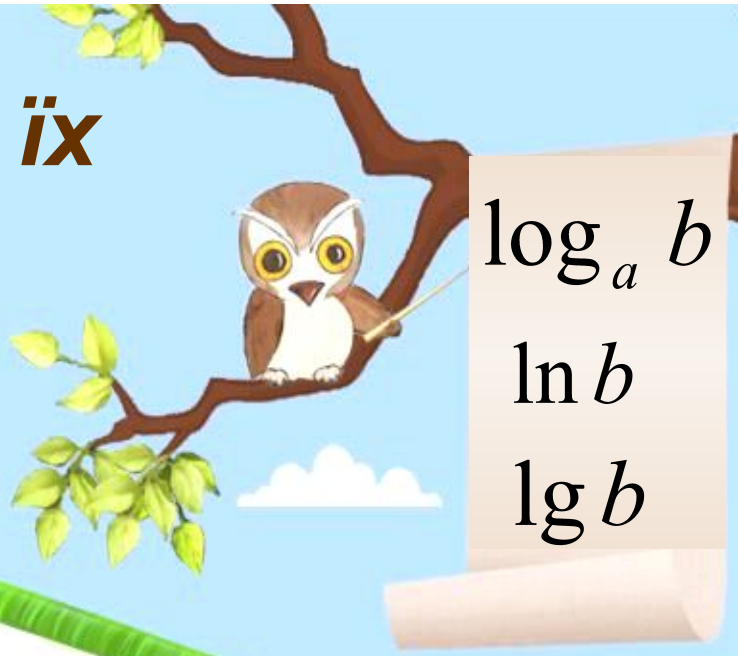
Логарифми та їх властивості



Логарифмічна функція та її графік

Властивості степеня

$$a^0 = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n$$

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad \left(\frac{1}{a^n}\right) = a^{-n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Логарифмом числа b за основою a називається показник степеня x, до якого потрібно піднести основу a щоб отримати число b, і позначається $\log_a b$

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

Наприклад:

$\log_2 8 = 3$, *оскільки* $2^3 = 8$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$, *оскільки* $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\log_7 1 = 0$, *оскільки* $7^0 = 1$

Логарифм числа *b* з основою 10 називається десятковим логарифмом і позначається $\lg b$

Наприклад:

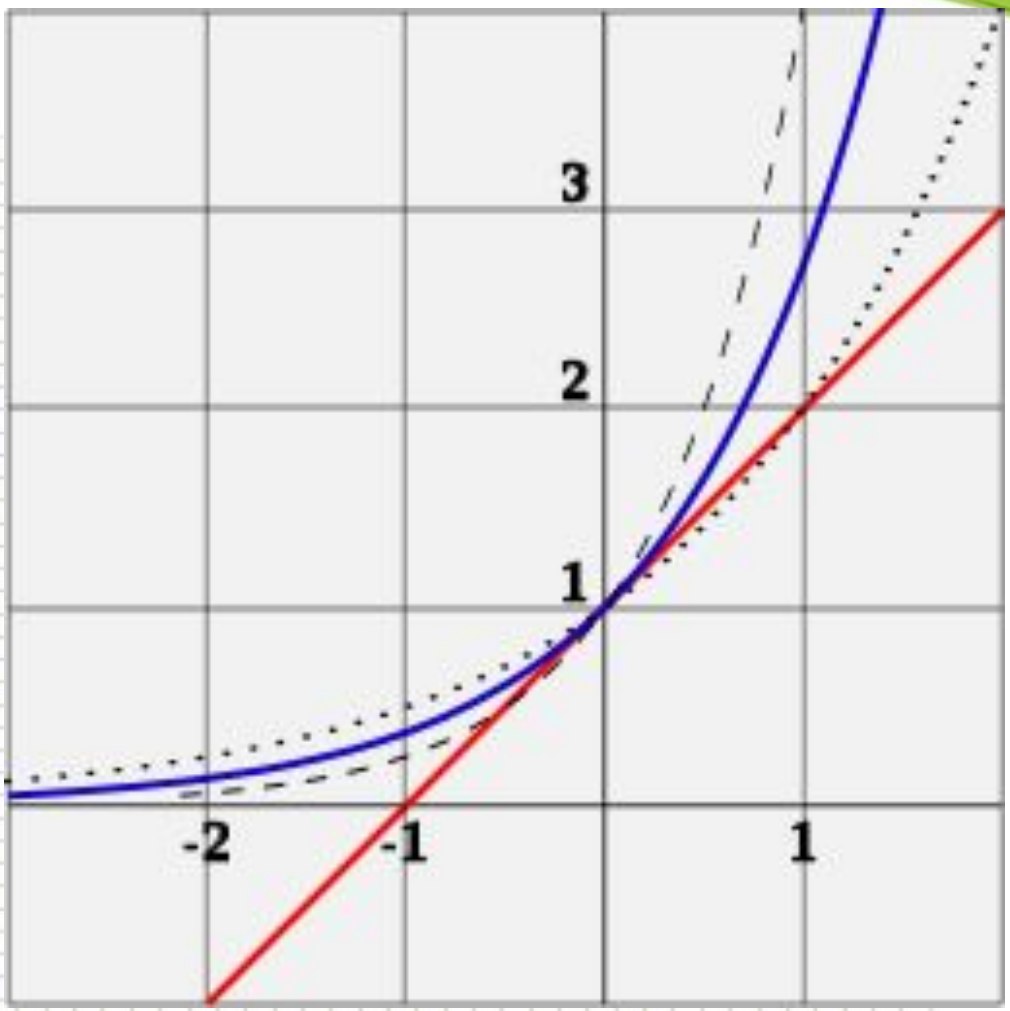
$$\lg 100 = 2, \quad \lg 0{,}0001 = -4$$

Логарифм числа *b* з основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\ln b$

Наприклад:

$$\ln e = 1, \quad \ln e^2 = 2, \quad \ln \frac{1}{e} = -1$$

Число e — фундаментальна математична — фундаментальна математична константа — фундаментальна математична константа, математична величина, що є основою натуральних логарифмів. Іноді **число e** називають *числом Ейлера* або *неперовим числом*. Відіграє важливу роль в диференціальному. Відіграє важливу роль в диференціальному і інтегральному численні, а



Число e – ірраціональне,

$e \approx 2{,}718281828459045\ldots$

$$a^{\log_a b} = b, b > 0, a > 0, a \neq 1$$ – ***основна логарифмічна тотожність***

Наприклад:

$$2^{\log_2 5} = 5, \qquad 2^{-\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Обчисліть логарифми:

1) $\log_3 9 =$

2) $\log_2 \frac{1}{16} =$

3) $\log_{\frac{1}{3}} 27 =$

4) $5^{\log_5 4} =$

Основні властивості логарифмів

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^p = p\log_a x, (p \in R)$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x, (p \in R)$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, (b \rangle 0, b \neq 1)$

Наприклад:

1) $\log_6 18 + \log_6 2 =$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 =$

3) $\log_3 \sqrt{3} =$

4) $\log_{125} 5 =$

5) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} =$

1) $\log_6 (18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$

2) $\log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$

3) $\log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

4) $\log_{5^3} 5 = \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

5) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \frac{\log_3 4^2}{\log_3 4} = \frac{2\log_3 4}{\log_3 4} = 2$

Усне виконання вправ

Обчислити логарифми:

	1	2	3	4	5
1	$\log_2 8$	$\log_6 36$	$\log_3 9$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \sqrt{5}$
2	$\log_4 2$	$\log_9 3$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_{\sqrt{3}} 3$
3	$\log_{\sqrt{3}} 1$	$\log_{81} 3$	$5^{\log_5 4}$	$2^{1+\log_2 3}$	$3^{\log_3 2} - 1$

1.Обчислити логарифми:

а) $\log_2 \frac{1}{4}$; б) $\log_{\sqrt{5}} 5$; в) $\log_{0,2} 25$

2. Знайдіть значення виразу:

а) $\log_9 40{,}5 + \log_9 2$;

б) $\log_3 45 - \log_3 5$; в) $\lg 500 - \lg 5$;

3. Обчислити: $\frac{\log_2 25}{\log_2 5}$.

4. Розв'язати завдання використовуючи означення логарифма:

1) Знайти x, якщо відомі a й N.

а) $\log_5 125=x$; б) $\log_{0,5} 4=x$;

2) Знайти N,якщо відомі a й x.

а) $\log_5 N =2$; б) $\log_7 N =1$; в) $\ln N =1$

3) Знайти a ,якщо відомі N і x

а) $\log_a 81 =4$; б) $\log_a 0,25=-2$;

5. Розв’язати вправи використовуючи основну логарифмічну тотожність:

$$а)\ 1{,}7^{\log_{1,7} 2};$$

$$б)\ \pi^{\log_{\pi} 5{,}2};$$

$$в)\ 3^{2\log_3 7};$$

$$г)\ 10^{\lg 2+\lg 3}.$$

8. Перевірити справедливість рівності:

1) $\log_5 1 = 0$; 2) $\log_5 25 = 2$; 3) $\log_2 32 = 5$; 4) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$;

5) $\log_5 0{,}04 = -2$; 6) $\log_7 343 = 3$; 7) $\lg 0{,}1 = -1$; 8) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$;

9) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 10) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27 = -6$; 11) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$;

12) $\log_{0,5} 8 = -3$; 13) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; 14) $\log_{0,2} 0{,}0016 = 4$;

15) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}04 = -4$; 16) $\log_{0,2} 125 = -3$.

ДОМАШНЯ РОБОТА:

1) $\log_2(2\log_7 49)$; 2) $\log_{12}(3\log_{\sqrt{6}} 36)$; 3) $\lg(51g100)^2$.

7. Обчислити:

1) $\log_{36}84 - \log_{36}14$; 2) $\log_2 48 + \log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\frac{\lg 81}{\lg 3}$;

4) $\frac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$.

№ 4.8

1) $\log_9 \frac{1}{9} = -1$

$9^x = \frac{1}{9}$

2) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

3) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

4) $\lg 0{,}001 = -3$

5) $\log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$

6) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

7) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$

8) $\log_{10} 10\sqrt{10} =$

$10^x = 10^1 \cdot 10^{\frac{1}{2}}$

$x = 1{,}5$

№ 4.10

1) $\log_a a^8 = 8$

2) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

3) $\log_a \frac{1}{a} = -1$

4) $\log_a \frac{1}{a^4} = -4$

№ 4.12

$\log_2 64 = 6$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$

$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

$\log_2 \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5}$

4.14

1) $2^x = 7$

$x = \log_2 7$

2) $7^{x+1} = 9$

$x + 1 = \log_7 9$

$x = \log_7 9 - 1$

4.16

$\frac{1}{2} \log_5 25 - \frac{1}{4} \log_2 128 = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 7 = 1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}$