# Производные процентные расчеты

ЛЕКЦИЯ 6

# Средние процентные ставки

Пусть за последовательные периоды $n_1, n_2, \dots, n_k$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Искомые средние получим посредством приравнивания соответствующих множителей наращения друг к другу:

$$1 + N\bar{\imath} = 1 + \sum n_t i_t$$

$$\bar{\imath} = \frac{\sum n_t i_t}{N}$$

где $N = \sum n_t$ — общий срок наращения процентов

Аналогичным способом определим среднюю учетную ставку:

$$\bar{d} = \frac{\sum n_t d_t}{N}$$

# Средние сложные процентные ставки

$$(1+\bar{\imath})^N = (1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k}$$

$$\bar{\imath} = \sqrt[N]{(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k}} - 1$$

Средняя в этом случае вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

# Средние ставки для однородных операций

Так, если применяются простые ставки и сроки этих операций одинаковы (n), то из равенства

$$\sum P_t(1 + n\bar{\imath}) = \sum P_t(1 + ni_t)$$

следует

$$\bar{\imath} = \frac{\sum P_t i_t}{\sum P_t}$$

весами здесь являются суммы ссуд

# Средние сложные ставки для однородных операций

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum P_t (1 + i_t)^n}{\sum P_t}} - 1$$

# Эквивалентность процентных ставок

Сложная годовая ставка $i$ эквивалентна ставке $j$ при начислении процентов $m$ раз в году.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим исходя из равенства взятых попарно множителей наращения.

$$(1 + ni_s) = (1 + i)^n$$

где $i_s$ и $i$ — ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении двух видов ставок идентичны

Решение приведенного выше равенства дает следующие соотношения эквивалентности:

$$i_s = \frac{(1 + i)^n}{n} - 1$$

$$i = \sqrt[n]{1 + ni_s} - 1$$

# Эквивалентность простых процентных ставок

Если временные базы одинаковы, то из равенства соответствующих множителей наращения следует

$$i_s = \frac{d_s}{1 - nd_s}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ni_s}$$

где $n$ — срок в годах

$i_s$ — ставка простых процентов,

$d_s$ — простая учетная ставка

# Эквивалентность простых процентных ставок для разных временных баз

Пусть срок ссуды измеряется в днях, тогда, подставив $n = \frac{t}{K}$ в предыдущую формулу, получим варианты соотношений эквивалентности

а) временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = \frac{360d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{360 + ti_s}$$

б) если при начислении процентов принята база К = 365, а для учетной ставки К = 360, то

$$i_s = \frac{365d_s}{360 - td_s}$$

$$d_s = \frac{360i_s}{365 + ti_s}$$

# Эквивалентность сложных процентных ставок

$$i = (1 + \frac{j}{m})^m - 1$$

$$j = m(\sqrt[m]{1 + i} - 1)$$

# Финансовая эквивалентность обязательств

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи “приведенными” к одному моменту времени (focal date), оказываются равными. Приведение осуществляется путем дисконтирования (приведение к более ранней дате) или, наоборот, наращения суммы платежа (если эта дата относится к будущему).

Сравнение платежей предполагает использование некоторой процентной ставки и, следовательно, его результат зависит от выбора ее размера.

Допустим, сравниваются два платежа $S_1$ и $S_2$ со сроками $n_1$ и $n_2$ , причем $S_1 < S_2$ и $n_1 < n_2$. Соотношение их современных стоимостей зависит от размера процентной ставки.

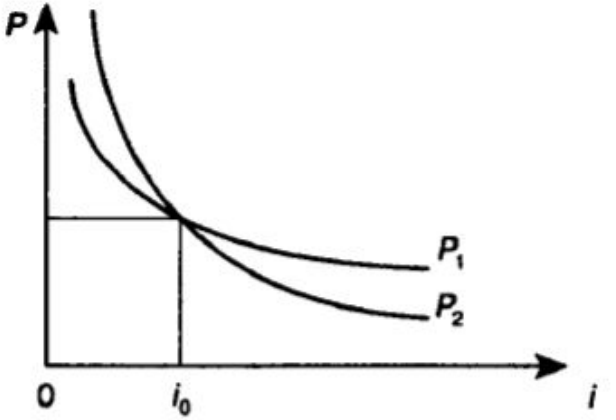
С ростом $i$, размеры современных стоимостей уменьшаются, причем при $i = i_0$ наблюдается равенство $P_1 = P_2$. Таким образом, результат сравнения зависит от размера ставки, равного $i_0$. Назовем эту ставку критической или барьерной.

# Критическая или барьерная процентная ставка

Для простых ставок

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_0} = \frac{S_2}{1+n_2 i_0}$$

$$i_0 = \frac{1-\frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2}n_2 - n_1}$$




Если дисконтирование производится по сложной ставке, то критическую ставку найдем из равенства

$$S_1(1+i_0)^{-n_1} = S_2(1+i_0)^{-n_2}$$

$$i_0 = \sqrt[n_2-n_1]{\frac{S_2}{S_1}} - 1$$

# Консолидирование (объединение) задолженности

Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется обычно на основе простых ставок, для средне- и долгосрочных — с помощью сложных процентных ставок.

Пусть платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$ со сроками $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним в сумме $S_0$ и сроком $n_0$. В этом случае возможны две постановки задачи:

- если задается срок $n_0$, то находится сумма $S_0$;
- если задана сумма консолидированного платежа $S_0$, то определяется срок $n_0$.

# Определение размера консолидированного платежа

Для простых ставок

$$S_0 = \sum S_j(1 + t_j i) + \sum S_k(1 + t_k i)^{-1}$$

где $S_j$ — размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$,

$S_k$ — размеры платежей со сроками $n_k > n_0$

$t_j = (n_0 - n_j)/365$ $\qquad$ $t_k = (n_k - n_0)/365$

Для сложных ставок

$$S_0 = \sum S_j(1 + i)^{t_j} + \sum S_k(1 + i)^{-t_k}$$

# Определение срока консолидированного платежа

Для простых ставок

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j (1 + n_j i)^{-1}} - 1\right)$$

Для сложных ставок

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1 + i)}$$

$$Q = \sum S_j (1 + i)^{-n_j}$$

# Задача 1

Контракт предусматривает переменную ставку простых процентов в течение периодов: 20, 22 и 25%. Продолжительность последовательных процентных периодов: два, три и пять месяцев. Какой размер процентной ставки приведет к аналогичному увеличению первоначальной суммы?

# Задача 2

Предположим, что на первые два года кредита применяется ставка 15%, на следующие три года – 20%. Какова средняя ставка за весь срок кредита?

# Задача 3

Вексель был зарегистрирован за год до даты его погашения по учетной ставке 15%. Какова доходность бухгалтерской операции в виде процентной ставки?

# Задача 4

Необходимо найти значение учетной ставки (К = 360), эквивалентной годовой процентной ставке 40% (К = 365), при условии, что отчетный период составляет 255 дней.

# Задача 5

Какую сложную годовую ставку можно заменить в договоре простой ставкой 18% (К = 365) без изменения финансовых последствий? Срок операции 580 дней.

# Задача 6

При разработке условий договора стороны договорились, что доходность по кредиту должна составлять 24% годовых. Каким должен быть размер номинальной ставки при расчете сложных процентов ежемесячно, ежеквартально?

# Задача 7

Есть два обязательства. Условия первого: оплата 400 тысяч тенге за 4 месяца; условия второго: заплатить 450 тысяч тенге за 8 месяцев. При какой критической процентной ставке их можно считать эквивалентными?

# Задача 8

Два платежа по 1 и 0,5 млн тенге со сроками погашения 150 и 180 дней соответственно объединяются в один со сроком погашения 200 дней. Пусть стороны договорятся о простом коэффициенте конверсии в 20%. Консолидированная сумма долга составит:

# Задача 9

Выплаты в 1 и 2 млн тенге и сроки выплаты в 2 и 3 года объединены в одну со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20%. Суммарная сумма составит:

# Задача 10

Суммы в 10, 20 и 15 миллионов тенге должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны договорились заменить их одним платежом в размере 50 млн тенге. i = 10% (простой) и K = 365. Срок консолидированного платежа:

# Задача 11

Платежи в 1 и 2 млн тенге и сроки оплаты в 2 и 3 года объединены в один платеж на сумму 3 млн тенге. Определить срок консолидированного платежа по сложной процентной ставке 20%.