Непрерывные случайные величины (НСВ)

НСВ – это СВ, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток

Плотность распределения (f(x)),
закон распределения

Функция распределения (F(x))

Числовые характеристики

Пример:

- ✔ *расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из оружия;*
- ✔ *скорость самолета при выходе на заданную высоту;*
- ✔ *изменение температуры жидкости при нагревании или охлаждении*
- ✔ *И т.п.*

Связь между f(x) и F(x)

$$f(x) = F'(x)$$

Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Плотность распределения НСВ

Плотность распределения вероятностей НСВ X в точке x – это предел отношения вероятности попадания значения этой величины в интервале (x; x+Δx) к длине Δx отрезка [x; x+Δx] при Δx→0:

$$f(x) = \lim_{x \to \Delta x} \frac{P(x < x < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

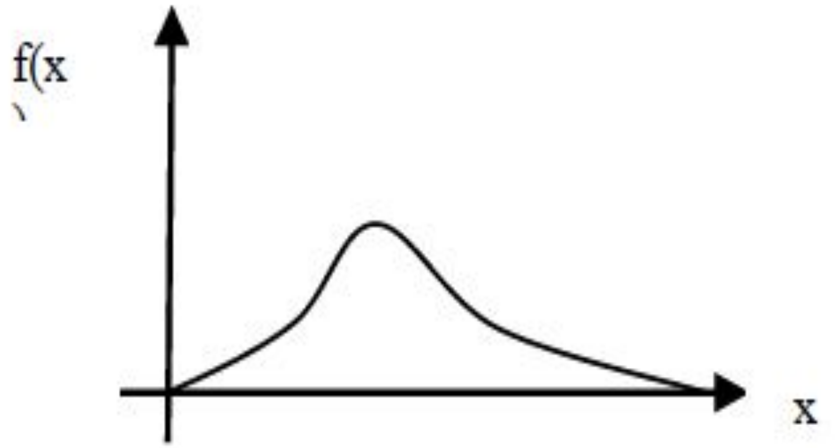
Свойства плотности распределения:

1. *Плотность распределения неотрицательна:*

$$f(x) \geq 0$$

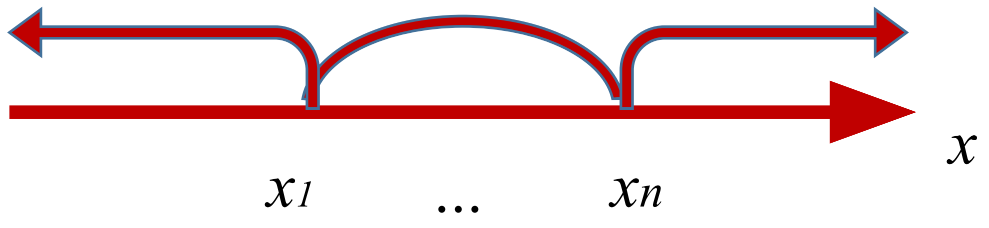
2. *Плотность распределения нормирована на единицу:*

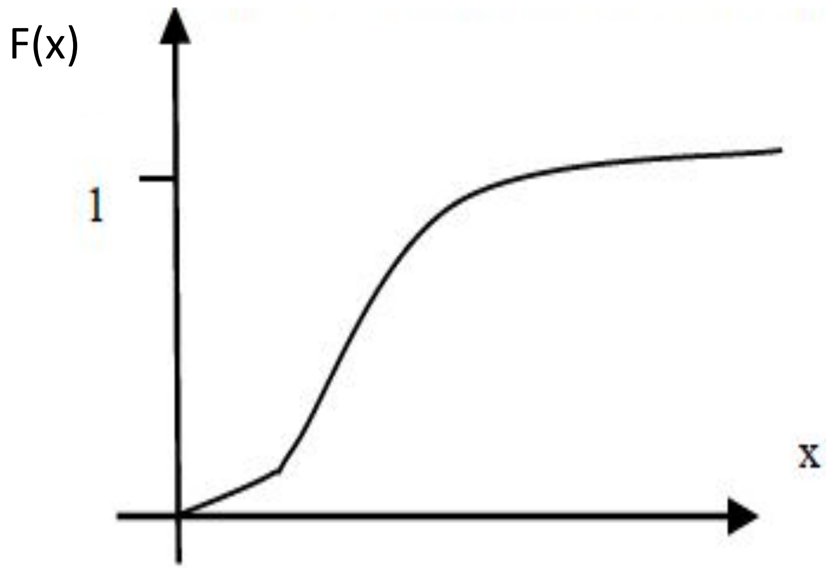
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$



Функция распределения НСВ

НСВ имеет непрерывную функцию распределения, график которой имеет форму плавной кривой





$$F(x)=F(X<x)=F(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Числовые характеристики НСВ

Мода (Мо) – значение НСВ при котором плотность вероятности максимальная;

Медиана (Ме) – значение НСВ, для которого вероятность попасть справа и слева от нее одинакова

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx$$

Математическое ожидание M(x)

$$M(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсия D(x)

$$D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} [x - M(x)]^2 \cdot f(x)dx$$

Среднее квадратическое отклонение σ(x)

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Решение задач

НСВ X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ Cx, & \text{при } 0<x\le 2; \\ 0, & \text{при } x>2 \end{cases}$$

Найти:

1. *постоянный параметр C,*
2. *функцию распределения F(x),*
3. *построить графики f(x) и F(x),*
4. *вероятность попадания X в (0;0,5),*
5. *математическое ожидание M(X),*
6. *дисперсию D(X)*
7. *среднее квадратическое отклонение σ(X)*

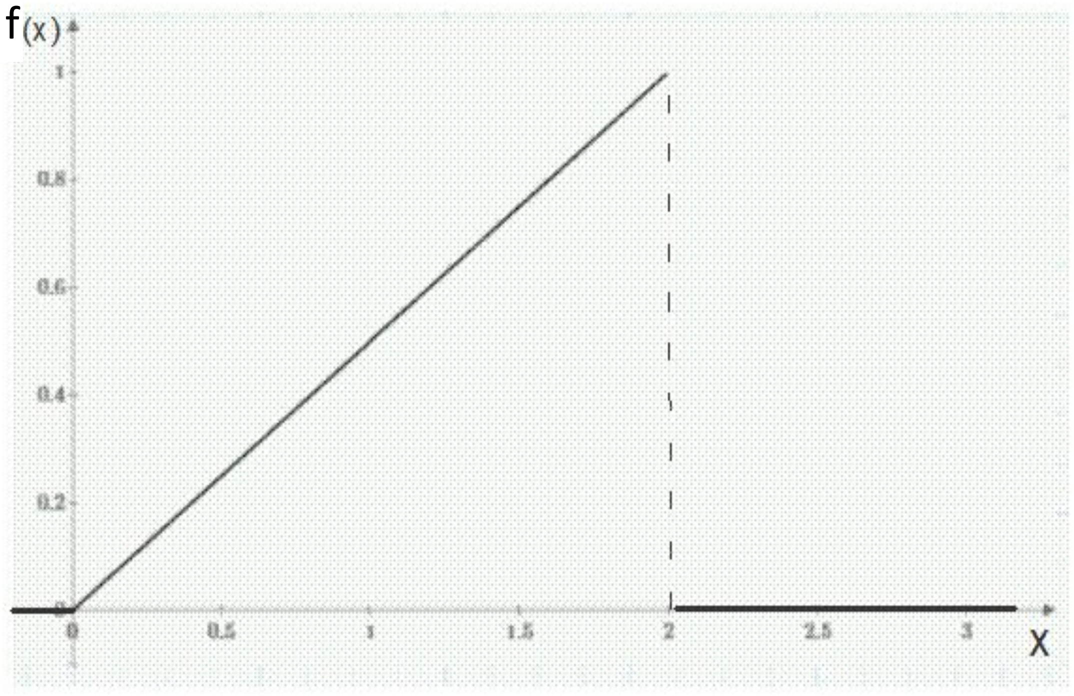
Решение

1) Согласно свойству плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow C\int_{0}^{2} xdx = 1 \Rightarrow C\cdot\int_{0}^{2} xdx = 1 \Rightarrow \left.\frac{Cx^2}{2}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{C\cdot 4}{2} = 1 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \frac{1}{2}x, & \text{при } 0 < x \le 2; \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$



Решение

2) Функция распределения находится по формуле: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Разбиваем числовую прямую на три участка:

1) $x \le 0$

$$F(x)=F(X<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=0$$

2) $0<x\le 2$

$$F(x)=F(X<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{x} f(x)dx=$$

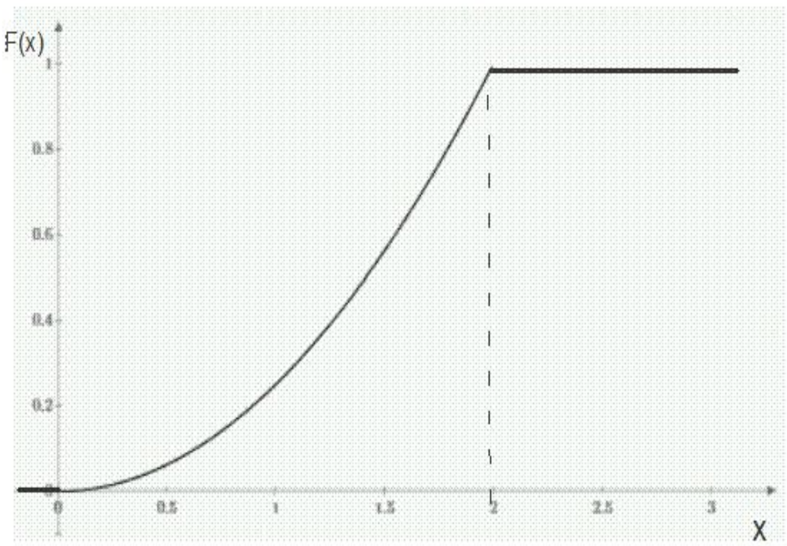
$$=0+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{x}=\frac{x^2}{4}-0=\frac{x^2}{4}$$

3) $x>2$

$$F(x)=F(X<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{2} f(x)dx+\int\limits_{2}^{x} f(x)dx=$$

$$=0+\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{2}xdx+0=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{2^2}{4}-0=1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{при } 0<x\le 2; \\ 1 & \text{при } x>2 \end{cases}$$



Решение

4) Вероятность попадания НСВ в интервал $(0;0,5)$: $P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Интервал (0;0,5) принадлежит второй строке плотности распределения, поэтому используем значение функции в этой строке.

Имеем:

$$P(0 < x < 0,5) = \int_0^{0.5} f(x)dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} xdx = \frac{1}{2}\int_0^{0.5} xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,5} = \frac{0,5^2}{4} - 0 = \frac{0,25}{4} = 0.0625$$

5) Математическое ожидание НСВ:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot f(x)dx + \int_0^2 x\cdot f(x)dx + \int_2^{\infty} x\cdot f(x)dx =$$

$$= \int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

Решение

6) Дисперсия НСВ:

$$D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} [x - M(x)]^2 \cdot f(x)\,dx \qquad \boxed{\sim} \qquad D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \cdot f(x)\,dx - [M(x)]^2$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}x\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{16}{9} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} - 0 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

6) Среднее квадратическое отклонение НСВ: $\sigma(x) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$