



# Непрерывные случайные величины (НСВ)

**НСВ** – это СВ, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток

**Плотность**  
**распределения ( $f(x)$ ),**  
закон распределения

**Функция**  
**распределения ( $F(x)$ )**

**Числовые**  
**характеристики**

## Пример:

- ✓ расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из оружия;
- ✓ скорость самолета при выходе на заданную высоту;
- ✓ изменение температуры жидкости при нагревании или охлаждении
- ✓ И т.п.

**Связь между  $f(x)$  и  $F(x)$**

$$f(x) = F'(x)$$

**Вероятность попадания в заданный интервал:**

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$



# Плотность распределения НСВ

**Плотность распределения вероятностей НСВ  $X$  в точке  $x$**  – это предел отношения вероятности попадания значения этой величины в интервале  $(x; x+\Delta x)$  к длине  $\Delta x$  отрезка  $[x; x+\Delta x]$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

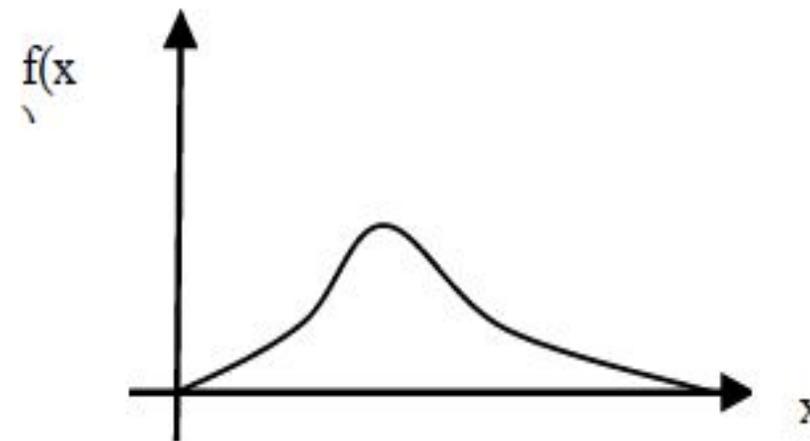
## Свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна:

$$f(x) \geq 0$$

2. Плотность распределения нормирована на единицу:

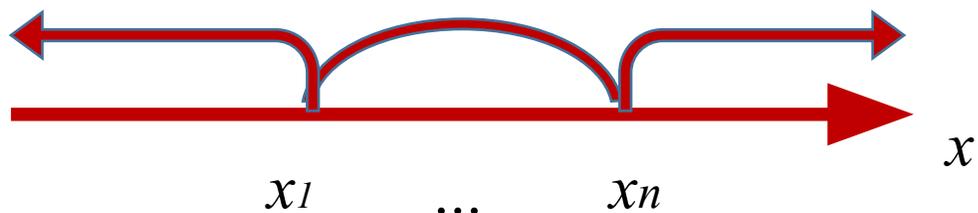
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$



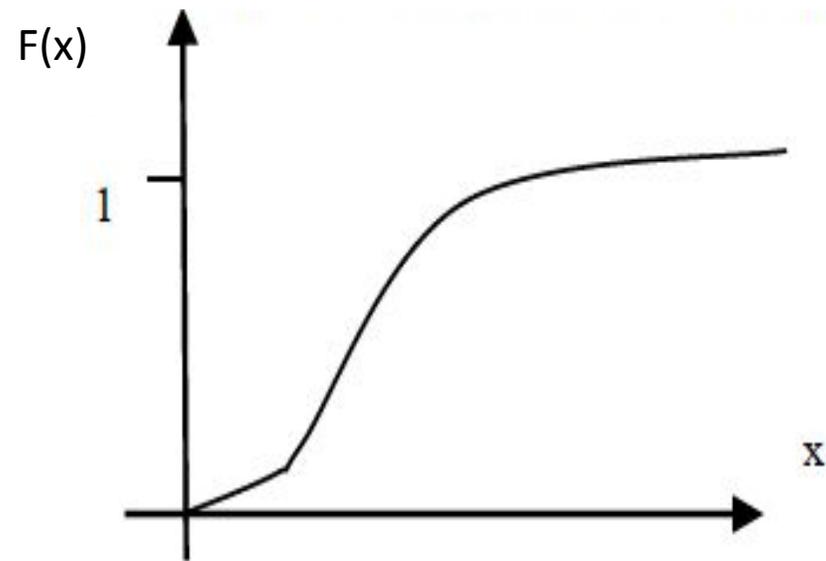


# Функция распределения НСВ

НСВ имеет непрерывную функцию распределения, график которой имеет форму плавной кривой



$$F(x) = F(X < x) = F(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$





# Числовые характеристики НСВ

**Мода ( $M_o$ )** – значение НСВ при котором плотность вероятности максимальная;

**Медиана ( $M_e$ )** – значение НСВ, для которого вероятность попасть справа и слева от нее одинакова

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x)dx$$

**Математическое ожидание  $M(x)$**

$$M(x) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x)dx$$

**Дисперсия  $D(x)$**   $D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} [M - x]^2 \cdot f(x) \cdot dx$

**Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(x)$**   $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$



# Решение задач

---

НСВ  $X$  задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ Cx & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases};$$

**Найти:**

1. *постоянный параметр  $C$ ,*
2. *функцию распределения  $F(x)$ ,*
3. *построить графики  $f(x)$  и  $F(x)$ ,*
4. *вероятность попадания  $X$  в  $(0; 0,5)$ ,*
5. *математическое ожидание  $M(X)$ ,*
6. *дисперсию  $D(X)$*
7. *среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X)$*



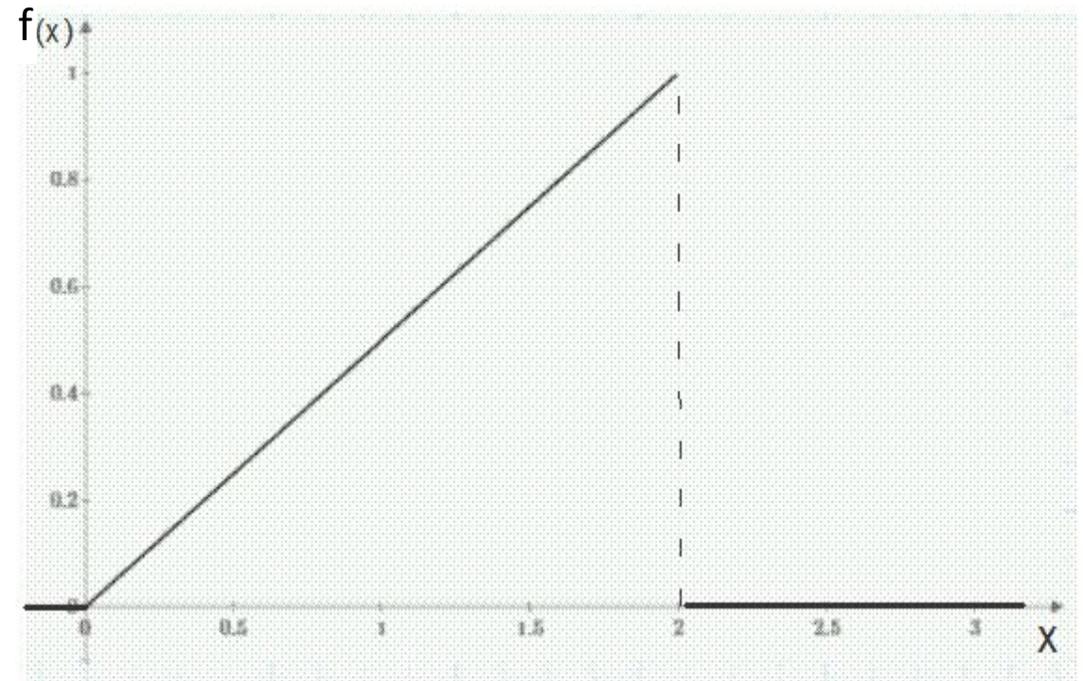
# Решение

1) Согласно свойству плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow C \int_0^2 x dx = 1 \Rightarrow C \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{C \cdot 4}{2} = 1 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Имеем:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$





# Решение

2) Функция распределения находится по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Разбиваем числовую прямую на три участка:

1)  $x \leq 0$

$$F(x) = F(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = 0$$

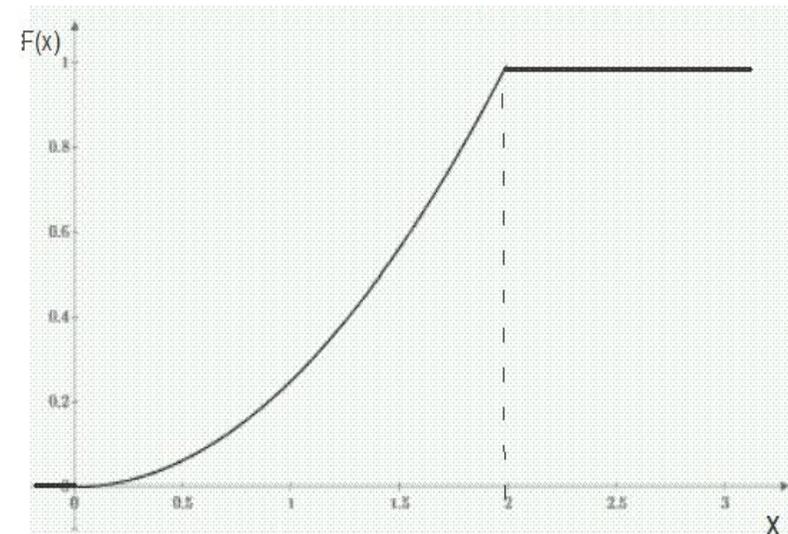
2)  $0 < x \leq 2$

$$\begin{aligned} F(x) = F(X < x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^x f(x) dx = \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^x x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{4} - 0 = \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

3)  $x > 2$

$$\begin{aligned} F(x) = F(X < x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^x f(x) dx = \\ &= 0 + \int_0^2 \frac{1}{2} x dx + 0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, 2 & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$





# Решение

4) Вероятность попадания НСВ в интервал  $(0; 0,5)$ :  $P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

Интервал  $(0; 0,5)$  принадлежит второй строке плотности распределения, поэтому используем значение функции в этой строке.

Имеем:

$$P(0 < x < 0,5) = \int_0^{0,5} f(x) dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{0,5} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,5} = \frac{0,5^2}{4} - 0 = \frac{0,25}{4} = 0.0625$$

5) Математическое ожидание НСВ:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot f(x) dx + \int_0^2 x \cdot f(x) dx + \int_2^{\infty} x \cdot f(x) dx = \\ &= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



# Решение

б) Дисперсия НСВ:

$$D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} [M(x) - x]^2 f(x) dx$$



$$D(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot x^2 dx - [M(x)]^2$$

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} - 0 - \frac{16}{9} = \frac{4}{3} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

б) Среднее квадратическое отклонение НСВ:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$