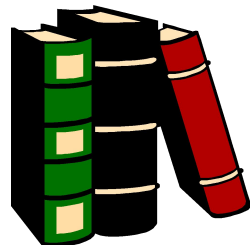




КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 6

ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера для построения общего решения такого уравнения.

ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения ЛНДУ с правой частью специального вида.



■ **Теорема.** (о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка)

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые на (a, b) решения ЛОДУ 2-го порядка: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, то их линейная комбинация

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, будет общим решением этого уравнения.

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, определенные на интервале (a, b) , называются линейно независимыми, если их отношение

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const} \quad \forall x \in (a, b)$$

ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

где p, q – постоянные числа, $x \in R$.

Уравнение (1) называется ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задача: найти ФСР (два линейно независимых частных решения ДУ(1)).

Метод Эйлера

Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$y = e^{kx}, \quad \text{где } k \text{ – некоторое число.}$$

$$y' = ke^{kx},$$

$$y'' = k^2 e^{kx}.$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + q e^{kx} = 0 \quad | : e^{kx} > 0$$

$$k^2 + pk + q = 0 -$$

характеристическое уравнение для ЛОДУ (1).

I Дискриминант характеристического уравнения больше нуля ($D > 0$)

$$k^2 + pk + q = 0,$$

$$D = p^2 - 4q, \quad D > 0.$$

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}; \quad k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$$

Корни k_1 и k_2 действительные и различные: $k_1 \neq k_2$.

Следовательно,

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \quad y_2(x) = e^{k_2 x} \text{ — решения ЛОДУ(1)}$$

Эти решения линейно независимы на R , так как:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const при } x \in R$$

Следовательно, $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения ЛОДУ(1).

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (2)$$

Пример 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}k^2 - k - 6 &= 0, \\D &= 1 + 24 = 25 > 0 \\k_1 &= -2, \quad k_2 = 3.\end{aligned}$$

Так как корни действительные и различные, то фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{3x}.$$

Тогда общее решение данного уравнения можно записать в виде линейной комбинации:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{ произвольные постоянные.}$$

Ответ: $\{e^{-2x}, e^{3x}\}$ – ФСР уравнения,

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y'' - 4y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4 = 0,$$

$$(k + 2)(k - 2) = 0,$$

$$k_1 = -2; \quad k_2 = 2$$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \quad \text{где } C_1, C_2 - \text{const} \quad (*)$$

Найдем

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}.$$

Подставим начальные условия в y и y' :

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 2 = -2C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Подставим найденные значения $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ в общее решение (*):

$$y = e^{2x} - \text{частное решение.}$$

Ответ: $y = e^{2x}$

II Дискриминант характеристического уравнения равен нулю ($D = 0$)

$$k^2 + pk + q = 0,$$

$$D = p^2 - 4q = 0.$$

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

Следовательно, можно получить только одно решение

$$y_1(x) = e^{k_1 x}.$$

Будем искать второе частное решение в виде:

$$y_2(x) = \varphi(x)e^{k_1 x} \Rightarrow y_2(x) = \varphi(x) e^{-\frac{p}{2}x}$$

Дифференцируя, находим :

$$y_2'(x) = \varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2''(x) = \varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x} =$$

$$= \varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - p\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

Подставим $y_2(x)$, $y_2'(x)$, $y_2''(x)$ в ЛОДУ(1).

$$\varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - p\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x} + p\left(\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}\right) + q\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x} = 0,$$

$$\varphi''(x) + \varphi(x)\left(q - \frac{p^2}{4}\right) = 0,$$

$$\varphi''(x) - \frac{p^2 - 4q}{4}\varphi(x) = 0,$$

но $p^2 - 4q = 0$, следовательно,

$$\varphi''(x) = 0,$$

$$\varphi'(x) = C_1, C_1 = 1,$$

$$\varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = \int dx + C_2$$

$$\varphi(x) = x + C_2, C_2 = 0.$$

$$\varphi(x) = x.$$

Таким образом,

$$y_2(x) = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

$$y_2(x) = x e^{k_1 x}$$

■ Функции $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = x e^{k_1x}$ являются линейно независимыми решениями ЛОДУ(1), т.к.

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{x e^{k_1x}}{e^{k_1x}} = x \neq \text{const}, x \in R$$

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 x e^{k_1x}$$

ИЛИ

$$y = e^{k_1x} (C_1 + C_2 x) \quad (3)$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$9y'' + 6y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$9k^2 + 6k + 1 = 0.$$

$$D = 36 - 36 = 0.$$

Корни этого уравнения будут действительными и равными:

$$k_1 = k_2 = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Тогда фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{3}}; y_2 = xe^{-\frac{x}{3}}.$$

Общее решение запишется как линейная комбинация этих решений:

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}},$$

или

$$y = e^{-\frac{x}{3}}(C_1 + C_2 x)$$

Ответ: $y = e^{-\frac{x}{3}}(C_1 + C_2 x)$

Пример4. Решить задачу Коши:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1; y'(0) = 3$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

Корни этого уравнения действительные и равные:

$$k_1 = k_2 = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Следовательно, по формуле(3) находим общее решение уравнения:

$$y = e^x(c_1 + c_2x).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1; y'(0) = 3$$

Сначала найдем: $y' = e^x(c_1 + c_2x) + c_2e^x$

Подставим в y и y' начальные условия:

$$\begin{cases} 1 = e^0(c_1 + c_2 \cdot 0) \\ 3 = e^0(c_1 + c_2 \cdot 0) + c_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \\ 3 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

■ Подставим найденные значения $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$ в общее решение:

$$y = e^x(1 + 2x).$$

Получили решение задачи Коши.

Ответ: $y = e^x(1 + 2x)$.

III Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля ($D < 0$)

$$k^2 + pk + q = 0,$$

$$D = p^2 - 4q, D < 0,$$

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i\sqrt{-D}}{2}.$$

Обозначим:

$$-\frac{p}{2} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{-D}}{2} = \beta,$$

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

$$\bar{y}_1(x) = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

$$\bar{y}_2(x) = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x},$$

Формула Эйлера:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

$$\bar{y}_1(x) = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\bar{y}_2(x) = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

В качестве ФСР возьмем следующие решения:

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)}{2} = \\ &= \frac{2e^{\alpha x}\cos\beta x}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2 &= \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{2i} = \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) - e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)}{2i} = \\ &= \frac{2ie^{\alpha x}\sin\beta x}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}$$

Функции $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями ЛОДУ (1), что следует из свойств решений ЛОДУ 2-го порядка. Эти решения линейно независимы, т.к.

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \operatorname{tg}\beta x \neq \operatorname{const}.$$

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

или

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \quad (4)$$

Пример5. Решить уравнение:

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

$$D = 36 - 4 \cdot 13 = -16 < 0.$$

Корни этого уравнения будут комплексно-сопряженными:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i, \text{ т.е. } \alpha = -3 \text{ и } \beta = 2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = e^{-3x} (C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}).$$

Ответ: $y = e^{-3x} (C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix})$.

■ **Пример 6.** Решить задачу Коши:

$$9y'' + y = 0; \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$9k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 = -\frac{1}{9},$$

$$k = \pm \frac{1}{3}i, \quad \text{т.е.} \quad \alpha = 0, \beta = \frac{1}{3}.$$

По формуле (4) получаем общее решение уравнения:

$$y = C_1 \cos \frac{x}{3} + C_2 \sin \frac{x}{3}. \quad (*)$$

$$y' = -\frac{1}{3}C_1 \sin \frac{x}{3} + \frac{1}{3}C_2 \cos \frac{x}{3}.$$

Поставим в y и y' начальные условия:

$$\begin{cases} 2 = C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} \\ 0 = -\frac{1}{3}C_1 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}C_2 \cos \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Подставляя $C_1 = 0$ и $C_2 = 2$ в общее решение (*), находим искомое решение задачи Коши:

$$y = 2\sin\frac{x}{3}.$$

Ответ: $y = 2\sin\frac{x}{3}$.

Общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

| Корни характеристического уравнения | Дискриминант характеристического уравнения | Общее решение ЛОДУ |
|---|--|--------------------|
| | | |
| | | |
| | | |

ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (5)$$

где $p, q = \text{const}$, функция $f(x)$ непрерывна на $(a; b)$, $f(x) \not\equiv 0$, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема (о структуре общего решения ЛНДУ 2-го порядка)

Общее решение ЛНДУ 2-го порядка $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ представляется в виде суммы общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ и любого частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ ЛНДУ, т. е.

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{чн}}(x)$$

или

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{\text{чн}}(x)$$

Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов

■ Пусть задано ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (5)$$

где $p, q = \text{const}$.

Рассмотрим правые части следующего вида:

$$\text{I. } f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где α -некоторое число, $P_m(x)$ - многочлен степени m .

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

Вид частного решения.

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s Q_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$ - многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, s равно кратности числа α как корня характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (6)$$

- Если $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, то $y_{\text{ЧН}}(x) = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.
- 2) Если $\alpha = k_1, \alpha \neq k_2$, то $y_{\text{ЧН}}(x) = xQ_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.
- 3) Если $\alpha = k_1 = k_2$, то $y_{\text{ЧН}}(x) = x^2Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.

Многочлен $Q_m(x)$ находится методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов

- записать $Q_m(x)$ как многочлен общего вида степени m с неизвестными коэффициентами:

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m;$$

- подставить в исходное уравнение (5) вместо $y(x)$ функцию $y_{\text{ЧН}}(x)$;
- приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях полученного равенства.

Будет получена система $(m + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами, из которой определяют числа b_0, b_1, \dots, b_m

■ МНОГОЧЛЕН $Q_m(x)$

- 1) если $m = 0$, то $Q_m(x) = A$;
- 2) если $m = 1$, то $Q_m(x) = Ax + B$;
- 3) если $m = 2$, то $Q_m(x) = Ax^2 + Bx + C$;
- 4) если $m = 3$, то $Q_m(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

■ **Пример 7.** Решить уравнение:

$$y'' + y = e^{3x}(x - 2).$$

Решение.

$$y = y_0 + y_{\text{чн}}$$

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + y = 0,$$

$$k^2 + 1 = 0, \quad D < 0$$

$$k^2 = -1,$$

$$k_{1,2} = \pm i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

2) Найдем частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ ЛНДУ:

$$f(x) = e^{3x}(x - 2) \quad (f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x})$$

$$P_m(x) = x - 2, \quad m = 1 \Rightarrow Q_m(x) = Ax + B, \quad \alpha = 3 \neq k_{1,2}$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{чн}}(x) = (Ax + B) e^{3x}.$$

Найдем производные первого и второго порядков и подставим их и $y_{\text{чн}}(x)$ в заданное уравнение:

$$y'_{\text{чн}}(x) = Ae^{3x} + 3(Ax + B) e^{3x};$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = 3Ae^{3x} + 3A e^{3x} + 9(Ax + B) e^{3x} = 6Ae^{3x} + 9(Ax + B) e^{3x};$$

$$6Ae^{3x} + 9(Ax + B) e^{3x} + (Ax + B) e^{3x} = e^{3x}(x - 2);$$

$$6Ae^{3x} + 10(Ax + B) e^{3x} = e^{3x}(x - 2);$$

$$6A + 10Ax + 10B = x - 2$$

Приравнявая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях равенства, приходим к системе:

$$x^1: 10A = 1,$$

$$x^0: 6A + 10B = -2$$

$$\begin{cases} A = 0,1 \\ 6 \cdot 0,1 + 10B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,1 \\ B = -0,26. \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{ЧН}}(x) = (0,1x - 0,26)e^{3x}$$

Запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (0,1x - 0,26)e^{3x}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (0,1x - 0,26)e^{3x}$.

■ **Пример 8.** Решить задачу Коши:

$$y'' - 4y' = 8 - 16x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

Решение.

$$y = y_0(x) + y_{\text{ЧН}}(x)$$

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' - 4y' = 0,$$

$$k^2 - 4k = 0,$$

$$k(k - 4) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 4.$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Получены различные действительные корни, поэтому общее решение :

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

2) Найдем частное решение $y_{\text{ЧН}}(x)$ ЛНДУ.

$$f(x) = 8 - 16x;$$

$$P_m(x) = 8 - 16x, \quad m = 1 \Rightarrow Q_m(x) = Ax + B;$$

$$\alpha = 0 = k_1 \neq k_2.$$

Следовательно, частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{ЧН}}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

Найдем производные первого и второго порядков и подставим их в заданное уравнение:

$$\begin{aligned}y'_{\text{чн}}(x) &= 2Ax + B, \\y''_{\text{чн}}(x) &= 2A, \\2A - 4(2Ax + B) &= 8 - 16x, \\-8Ax + 2A - 4B &= 8 - 16x,\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях x , составим и решим систему.

$$\begin{cases} -8A = -16 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}}(x) = 2x^2 - x.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x. \quad (*)$$

Найдем y' :

$$y'(x) = 4C_2 e^{4x} + 4x - 1,$$

Подставим начальные условия в y и y' :

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 3 = 4C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Подставим найденные значения $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ в общее решение (*):

$y(x) = e^{4x} + 2x^2 - x$ — частное решение исходного ЛНДУ.

Ответ: $y(x) = e^{4x} + 2x^2 - x$.

Пример 9. Указать вид частного решения для уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = (5x^3 - 1)e^{2x}$$

Решение.

1) Составим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ и решим его.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2,$$

$$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

$y_0(x) = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$ — общее решение ЛОДУ.

$$2) f(x) = (5x^3 - 1)e^{2x} \quad (f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x})$$

$$P_m(x) = 5x^3 - 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow Q_m(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$\alpha = 2 = k_{1,2},$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{чн}}(x) = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) e^{2x}.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{чн}}(x) = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) e^{2x}.$$

$$\text{II. } f(x) = (P_{m_1}(x) \cdot \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \cdot \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

где α, β некоторые числа,

$P_{m_1}(x), Q_{m_2}(x)$ - многочлены от x степени m_1 и m_2 соответственно.

Вид частного решения

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s (M_n(x) \cdot \cos \beta x + T_n(x) \cdot \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

где $M_n(x), T_n(x)$ - многочлены от x степени $n = \max(m_1, m_2)$ с
неопределенными коэффициентами, которые надо определить методом
неопределенных коэффициентов

$s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

$$k^2 + pk + q = 0;$$

$s = 1$, если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Частный случай:

$$f(x) = P\cos\beta x + Q\sin\beta x,$$

где хотя бы одно из чисел P и Q отлично от нуля.

- Если число βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{чн}}(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

- Если число βi является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{чн}}(x) = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

где A и B — неопределенные коэффициенты.

■ **Пример 10.** Решить уравнение:

$$y'' + 4y = 4 \cos 2x.$$

Решение.

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + 4y = 0,$$

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i, \alpha = 0, \beta = 2$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$y_0(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2) Найдем частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ ЛНДУ:

$$f(x) = 4 \cos 2x \quad (f(x) = P \cos \beta x + Q \sin \beta x)$$

$$P=4, Q=0$$

$$\alpha = 0, \beta = 2, \quad 2i = k_1$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{чн}}(x) = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

$$y'_{\text{чн}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Подставим $y_{\text{чн}}(x)$ и $y''_{\text{чн}}(x)$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} & -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ & = 4\cos 2x, \end{aligned}$$

$$4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему:

$$\begin{cases} 4A = 0 \\ 4B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $y_{\text{чн}}(x) = x\sin 2x$.

Окончательно, имеем общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \sin 2x.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \sin 2x$.

■ **Пример 11.** Указать вид частного решения для уравнения:

$$y'' + 2y' + 2y = (x \cos x + 3 \sin x)e^{-x}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ и решим его.

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$k^2 + 2k + 2 = 0,$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i, \quad \alpha = -1, \beta = 1. \quad y_0(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$2) \quad f(x) = e^{-x}(x \cos x + 3 \sin x)$$

$$f(x) = (P_{m_1}(x) \cdot \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \cdot \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

$\alpha = -1, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = -1 + i$ – корень характеристического уравнения,

$$P_{m_1}(x) = x \Rightarrow m_1 = 1, \quad Q_{m_2}(x) = 3 \Rightarrow m_2 = 0 \Rightarrow n = \max(m_1, m_2) = 1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид :

$$y_{\text{чн}}(x) = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)e^{-x}.$$

$$\text{Ответ: } y_{\text{чн}}(x) = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)e^{-x}$$

Замечание.

Если в ЛНДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где каждая из $f_1(x), f_2(x)$ имеет специальный вид (случаи I, II), то частное решение уравнения строится согласно *принципу наложения*;

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{\text{чн1}}(x) + y_{\text{чн2}}(x),$$

где $y_{\text{чн1}}(x)$ - частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$,

$y_{\text{чн2}}(x)$ - частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$.

Аналогично находятся частные решения в случае, когда правая часть есть алгебраическая сумма конечного числа функций специального вида;

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

Пример 12. Решить уравнение: $y'' - 5y' = y^{5x} + 10x^4y^5$

Решение. $y'' - 5y' = y^{5x} + 10x^4y^5$

- 1 Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' - 5y' = 0,$$

$$y^2 - 5y = 0,$$

$$y(y - 5) = 0,$$

$$k_1=0, k_2=5,$$

$y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}$ - общее решение однородного уравнения.

- 2 $y'' - 5y' = y^{5x}$

$$y_1 = y^{5x}, y_1' = 5x y^{5x-1}, y_1'' = 1 \cdot y^{5x} + 0 \cdot y^{5x-1} = y^{5x},$$

$$y_{\text{чн1}}(x) = y^{5x},$$

$$y_{\text{чн1}}'(x) = 5x y^{5x-1} + 5x^2 y^{5x-2},$$

$$y_{\text{чн1}}''(x) = 5x^2 y^{5x-2} + 5x^2 y^{5x-2} + 25x^3 y^{5x-3} = 10x^2 y^{5x-2} + 25x^3 y^{5x-3},$$

$$10x^2 y^{5x-2} + 25x^3 y^{5x-3} - 5x^2 y^{5x-2} - 25x^3 y^{5x-3} = y^{5x}.$$

$$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5},$$

$$y_{\text{чн1}}(x) = \frac{1}{5} y^{5x} = 0,2 y^{5x},$$

$$3 \quad x'' - 5x' = 10e^{5x}$$

$$x_2(x) = 10e^{5x}$$

$$x = 0, x' = 5, x + x'' = 5 \neq x_{1,2},$$

$$x_{4H2}(x) = e^{5x} + e^{5x}$$

$$x_{4H2}'(x) = -5e^{5x} + 5e^{5x}$$

$$x_{4H2}''(x) = -25e^{5x} - 25e^{5x}$$

$$-25e^{5x} - 25e^{5x} + 25e^{5x} - 25e^{5x} = 10e^{5x}$$

$$\begin{cases} -25x - 25x = 10 & x = -\frac{1}{5} & x = -0,2 \\ -25x + 25x = 0 & x = x & x = -0,2 \end{cases}$$

$$x_{4H2}(x) = -0,2e^{5x} - 0,2e^{5x}$$

$$x_{4H}(x) = x_{4H1}(x) + x_{4H2}(x),$$

$$x_{4H}(x) = 0,2(e^{5x} - e^{5x} - e^{5x}),$$

$$x(x) = C_0 x + x_{4H}(x),$$

$$x(x) = C_1 + C_2 e^{5x} + 0,2(e^{5x} - e^{5x} - e^{5x}).$$

$$\text{Ответ: } x(x) = C_1 + C_2 e^{5x} + 0,2(e^{5x} - e^{5x} - e^{5x}).$$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!