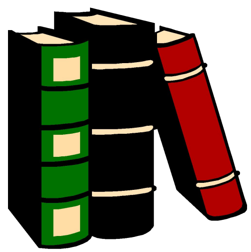
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 6

ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера для построения общего решения такого уравнения.

ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения ЛНДУ с правой частью специального вида.

Теорема. (*о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка*)

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$– линейно независимые на (a, b) решения ЛОДУ 2-го порядка: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, то их линейная комбинация

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, будет общим решением этого уравнения.

Определение. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, определенные на интервале (a, b), называются *линейно независимыми* ,если их отношение

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \not\equiv const \qquad \forall x \in (a, b)$$

,

ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ второго порядкаu

$$\boldsymbol{y'' + py' + qy = 0}, \qquad (1)$$

где $p, q -$ постоянные числа, $x \in R$.

Уравнение (1) называется ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задача: найти ФСР (два линейно независимых частных решения ДУ(1)).

Метод Эйлера

Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$y = e^{kx}, \quad \text{где } k - \text{некоторое число.}$$

$$y' = ke^{kx},$$

$$y'' = k^2\, e^{kx}.$$

$$k^2\, e^{kx} + pke^{kx} + q\, e^{kx} = 0 \;\; |: e^{kx} > 0$$

$$\boldsymbol{k^2 + pk + q = 0} -$$

характеристическое уравнение для ЛОДУ (1).

I Дискриминант характеристического уравнения больше нуля ($D > 0$)

$$k^2 + pk + \mathrm{q} = 0,$$
$$D = p^2 - 4q, \quad D > 0.$$
$$k_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}; \; k_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$$

Корни k_1 и k_2 действительные и различные: $k_1 \neq k_2$.

Следовательно,

$$y_1(x) = e^{k_1 x}, y_2(x) = e^{k_2 x} \text{ —решения ЛОДУ(1)}$$

Эти решения линейно независимы на R, так как:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2-k_1)x} \neq \text{const при } x \in R$$

Следовательно, $y_1(x), y_2(x)$ —линейно независимые решения ЛОДУ(1).

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$\boxed{y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}} \qquad (2)$$

Пример1.Найти фундаментальную систему решений и общее решение:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - \mathrm{k} - 6 = 0,$$

$$D = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$k_1 = -2, \; k_2 = 3.$$

Так как корни действительные и различные, то фундаментальную систему решений этого уравнения составят функции:

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{3x}.$$

Тогда общее решение данного уравнения можно записать в виде линейной комбинации:

$y = C_1 e^{-2x} + C_2\, e^{3x}$, где C_1 ,C_2- произвольные постоянные.

Ответ: $\{e^{-2x}, e^{3x}\}$ – ФСР уравнения,

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2\, e^{3x}$$

Пример2. Решить задачу Коши:

$$y'' - 4y = 0\,; \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4 = 0\ ,$$

$$(k+2)(k-2) = 0\,,$$

$$k_1 = -2;\quad k_2 = 2$$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2\, e^{2x}, \qquad \text{где } C_1\ , C_2 - \text{const} \quad (*)$$

Найдем $\quad y' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}.$

Подставим начальные условия в y и y':

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2\, e^0 \\ 2 = -2C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Подставим найденные значения $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ в общее решение (*) :

$$y = e^{2x} - \text{частное решение.}$$

Ответ: $y = e^{2x}$

II Дискриминант характеристического уравнения равен нулю ($D = 0$)

- $$k^2 + pk + \mathrm{q} = 0,$$
  $$D = p^2 - 4q = 0.$$
  $$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

Следовательно, можно получить только одно решение

$$y_1(x) = e^{k_1 x}.$$

Будем искать второе частное решение в виде:

$$y_2(x) = \varphi(x)e^{k_1 x} \Longrightarrow y_2(x) = \varphi(x)\ e^{-\frac{p}{2}x}$$

Дифференцируя, находим :

$$y_2'(x) = \varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2''(x) = \varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi'\ (x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x} =$$

$$= \varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - p\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)\ e^{-\frac{p}{2}x}$$

Подставим $y_2(x), y_2'(x), y_2''(x)$ в ЛОДУ(1).

$$\varphi''(x)e^{-\frac{p}{2}x} - p\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x} + p\left(\varphi'(x)e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}\right) +$$

$$+q\,\varphi(x)e^{-\frac{p}{2}x}=0,$$

$$\varphi''(x) + \varphi(x)(q - \frac{p^2}{4}) = 0,$$

$$\varphi''(x) - \frac{p^2-4q}{4}\varphi(x) = 0,$$

но $p^2 - 4q = 0$, следовательно,

$$\varphi''(x) = 0,$$

$$\varphi'(x) = C_1\,,\ C_1 = 1,$$

$$\varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = \int dx + C_2$$

$$\varphi(x) = x + C_2, C_2 = 0.$$

$$\varphi(x) = x.$$

Таким образом,

$$y_2(x) = x\ e^{-\frac{p}{2}x},$$

$$y_2(x) = x\ e^{k_1 x}$$

- Функции $y_1(x) = e^{k_1 x}, y_2(x) = x\ e^{k_1 x}$ являются линейно независимыми решениями ЛОДУ(1),т.к.

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{x\ e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = x \neq \text{const}, x \in R$$

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$$

или

$$\boxed{y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)} \qquad (3)$$

Пример3.

Решить уравнение:

$$9y'' + 6y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$9k^2 + 6k + 1 = 0.$$

$$D = 36 - 36 = 0.$$

Корни этого уравнения будут действительными и равными:

$$k_1 = k_2 = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}.$$

Тогда фундаментальную систему решений этого уравнения

составят функции:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{3}};\ y_2 = xe^{-\frac{x}{3}}.$$

Общее решение запишется как линейная комбинация этих решений:

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{3}} + C_2 x e^{-\frac{x}{3}},$$

или

$$y = e^{-\frac{x}{3}}(C_1 + C_2 x)$$

Ответ: $y = e^{-\frac{x}{3}}(C_1 + C_2 x)$

Пример4. Решить задачу Коши:

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1; y'(0) = 3$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

Корни этого уравнения действительные и равные:

$$k_1 = k_2 = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Следовательно, по формуле(3) находим общее решение уравнения:

$$y = e^x(c_1 + c_2 x).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1; y'(0) = 3$

Сначала найдем:$y' = e^x(c_1 + c_2 x) + C_2 e^x$

Подставим в y и y' начальные условия:

$$\begin{cases} 1 = e^0(c_1 + c_2 \cdot 0) \\ 3 = e^0(c_1 + c_2 \cdot 0) + c_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \\ 3 = c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

- Подставим найденные значения $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$ в общее решение:

$$y = e^x(1 + 2x).$$

Получили решение задачи Коши.

Ответ: $y = e^x(1 + 2x)$.

III Дискриминант характеристического уравнения меньше нулю ($D < 0$)

- $$k^2 + pk + \mathrm{q} = 0,$$
  $$D = p^2 - 4q, D < 0,$$
  $$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i\sqrt{-D}}{2}.$$

Обозначим: $-\frac{p}{2} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{-D}}{2} = \beta,$

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$
$$\overline{y_1}(x) = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$
$$\overline{y_2}(x) = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x},$$

Формула Эйлера:

$$\boxed{e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isin\varphi}$$

$$\overline{y_1}(x) = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x)$$
$$\overline{y_2}(x) = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)$$

В качестве ФСР возьмем следующие решения:

$$y_1 = \frac{\overline{y_1} + \overline{y_2}}{2} = \frac{e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) + e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)}{2} =$$

$$= \frac{2e^{\alpha x}cos\beta x}{2} = e^{\alpha x}cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{2i} = \frac{e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) - e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x)}{2i} =$$

$$= \frac{2ie^{\alpha x}sin\beta x}{2i} = e^{\alpha x}sin\beta x.$$

Функции $y_1(x) = e^{\alpha x}cos\beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}sin\beta x$ являются решениями ЛОДУ (1), что следует из свойств решений ЛОДУ 2-го порядка. Эти решения линейно независимы, т.к.

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{\alpha x}sin\beta x}{e^{\alpha x}cos\beta x} = tg\beta x \neq const.$$

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛОДУ2-го порядка, запишем общее решение ЛОДУ(1):

$$y = C_1\, e^{\alpha x}cos\beta x + C_2\, e^{\alpha x}sin\beta x$$

или

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1\, cos\beta x + C_2\, sin\beta x)} \qquad (4)$$

Пример5. Решить уравнение:

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

$$D = 36 - 4 \cdot 13 = -16 < 0.$$

Корни этого уравнения будут комплексно-сопряженными:

$$k_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i, \text{ т.е } \alpha = -3 \text{ и } \beta = 2.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример6. Решить задачу Коши:

$$9y'' + y = 0\,; \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, \;\; y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$9k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 = -\frac{1}{9}\,,$$

$$k = \pm\frac{1}{3}i, \qquad \text{т. е.} \quad \alpha = 0, \beta = \frac{1}{3}.$$

По формуле (4) получаем общее решение уравнения:

$$\boxed{y = C_1 cos\frac{x}{3} + C_2 sin\frac{x}{3}.} \qquad (*)$$

$$y' = -\frac{1}{3}C_1 sin\frac{x}{3} + \frac{1}{3}C_2 cos\frac{x}{3}.$$

Поставим в y и y' начальные условия:

$$\begin{cases} 2 = C_1 cos\dfrac{\pi}{2} + C_2 sin\dfrac{\pi}{2} \\ 0 = -\dfrac{1}{3}C_1 sin\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}C_2 cos\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Подставляя $C_1 = 0$ и $C_2 = 2$ в общее решение $(*)$, находим искомое решение задачи Коши:

$$y = 2\sin\frac{x}{3}\ .$$

Ответ: $y = 2\sin\frac{x}{3}$.

Общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами		
Корни характеристического уравнения	Дискриминант характеристического уравнения	Общее решение ЛОДУ

ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Дифференциальное уравнение вида:

$$\boldsymbol{y'' + py' + qy = f(x)}, \qquad (5)$$

где p, q=const, функция $f(x)$ непрерывна на $(a; b)$, $f(x) \not\equiv 0$, называется <u>линейным неоднородным дифференциальным уравнением(ЛНДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами</u>.

Теорема (*о структуре общего решения ЛНДУ 2-го порядка*)

Общее решение ЛНДУ 2-го порядка $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ представляется в виде суммы общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ и любого частного решения $y_{чн}(x)$ ЛНДУ , т. е.

$$y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$$

или

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}(x)$$

Решение ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов

- Пусть задано ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (5)$$

где $\mathrm{p, q} = \mathrm{const}$.

Рассмотрим правые части следующего вида:

$$\textbf{I. } \boldsymbol{f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x}},$$

где α-некоторое число, $P_m(x)$- многочлен степени m.

$P_m(x)= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$

Вид частного решения.

$$y_{\text{чн}}(x) = x^s\, Q_m(x)\cdot e^{\alpha x},$$

где $Q_m(x)$- многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, s равно кратности числа α как корня характеристического уравнения

$$k^2 + pk + \mathrm{q} = 0. \qquad (6)$$

1) Если $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, то $y_{чн}(x) = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.

2) Если $\alpha = k_1, \alpha \neq k_2$, то $y_{чн}(x) = xQ_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.

3) Если $\alpha = k_1 = k_2$, то $y_{чн}(x) = x^2 Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$.

Многочлен $Q_m(x)$ находится методом неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов

- записать $Q_m(x)$ как многочлен общего вида степени m с неизвестными коэффициентами:

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m;$$

- подставить в исходное уравнение (5) вместо $y(x)$ф ункцию $y_{чн}(x)$;
- приравнять коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях полученного равенства.

Будет получена система $(m+1)$-го линейного алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами, из которой определяют числа $b_0, b_1, \ldots, b_m$

многочлен $\boldsymbol{Q_m(x)}$

1) если $m = 0,$ то $Q_m(x) = A;$
2) если $m = 1,$ то $Q_m(x) = Ax + B;$
3) если $m = 2,$ то $Q_m(x) = Ax^2 + Bx + C;$
4) если $m = 3,$ то $Q_m(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + \mathrm{D};$

Пример7.Решить уравнение:

$$y''+y = e^{3x}(x-2).$$

Решение.

$$y = y_0 + y_{\text{чн}}$$

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y''+y=0,$$

$$k^2+1=0, \qquad D<0$$

$$k^2=-1,$$

$$k_{1,2}=\pm i \;, \alpha=0,\; \beta=1.$$

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)}$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$y_0(x) = C_1\cos x + C_2\sin x\;.$$

2) Найдем частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ ЛНДУ:

$$f(x) = e^{3x}(x-2) \qquad (\,f(x) = P_m(x)\cdot e^{\alpha x}\,)$$

$$P_m(x)= x-2,\; m=1 \Rightarrow Q_m(x)= Ax+B,\; \alpha=3\neq k_{1,2}$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{чн}}(x) = (Ax + B)\, e^{3x}.$$

Найдем производные первого и второго порядков и подставим их и $y_{\text{чн}}(x)$ в заданное уравнение:

$$y'_{\text{чн}}(x) = Ae^{3x} + 3(Ax + B)\, e^{3x};$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = 3Ae^{3x} + 3A\, e^{3x} + 9\,(Ax + B)\, e^{3x} = 6Ae^{3x} + 9\,(Ax + B)\, e^{3x};$$

$$6Ae^{3x} + 9\,(Ax + B)\, e^{3x} + (Ax + B)\, e^{3x} = e^{3x}(x - 2);$$

$$6Ae^{3x} + 10\,(Ax + B)\, e^{3x} = e^{3x}(x - 2);$$

$$6A + 10Ax + 10B = x - 2$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях равенства, приходим к системе:

x^1: $10A = 1,$

x^0: $6A + 10B = -2$

$$\begin{cases} A = 0{,}1 \\ 6 \cdot 0{,}1 + 10B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}1 \\ B = -0{,}26. \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}}(x) = (0{,}1x - 0{,}26)e^{3x}$$

Запишем общее решение исходного ЛНДУ:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (0{,}1x - 0{,}26)e^{3x}.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (0{,}1x - 0{,}26)e^{3x}$.

Пример8. Решить задачу Коши:

$$y'' - 4y' = 8 - 16x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$$

Решение.

$$y = y_0(x) + y_{чн}(x)$$

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$y'' - 4y' = 0,$

$k^2 - 4\mathrm{k} = 0,$

$k(k-4) = 0,$

$k_1 = 0, \; k_2 = 4.$

$$\boxed{y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}}$$

Получены различные действительные корни, поэтому общее решение :

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

2) Найдем частное решение $y_{чн}(x)$ ЛНДУ.

$f(x) = 8 - 16x;$

$P_m(x) = 8 - 16x, m = 1 \Rightarrow Q_m(x) = Ax + B;$

$\alpha = 0 = k_1 \neq k_2.$

Следовательно, частное решение ищем в виде:

$y_{чн}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

Найдем производные первого и второго порядков и подставим их в заданное уравнение:

$$y'_{\text{чн}}(x) = 2Ax + B,$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = 2A\,,$$

$$2A - 4(2Ax + B) = 8 - 16x,$$

$$-8Ax + 2A - 4B = 8 - 16x,$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, составим и решим систему.

$$\begin{cases} -8A = -16 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{\text{чн}}(x) = 2x^2 - x.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x. \qquad (*)$$

Найдем y': $\quad y'(x) = 4C_2 e^{4x} + 4x - 1,$

Подставим начальные условия в y и y':

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 3 = 4C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Подставим найденные значения $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ в общее решение $(*)$:

$y(x) = e^{4x} + 2x^2 - x$ – частное решение исходного ЛНДУ.

Ответ: $y(x) = e^{4x} + 2x^2 - x$.

Пример9. Указать вид частного решения для уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = (5x^3 - 1)e^{2x}$$

Решение.

1) Составим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ и решим его.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0$

$D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2,$

$\boxed{y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)}$

$y_0(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ –общее решение ЛОДУ.

2) $f(x) = (5x^3 - 1)e^{2x}$ $\quad (f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x})$

$P_m(x) = 5x^3 - 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow Q_m(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$\alpha = 2 = k_{1,2},$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$y_{чн}(x) = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x}.$

Ответ: $y_{чн}(x) = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x}.$

$$\text{II. } \boldsymbol{f(x) = (P_{m_1}(x)\cdot cos\beta x + Q_{m_2}(x)\cdot sin\beta x)e^{\alpha x}},$$

где α, β некоторые числа,

$P_{m_1}(x)$, $Q_{m_2}(x)$- многочлены от x степени m_1 и m_2 соответственно.

Вид частного решения

$$y_{чн}(x) = x^s\ (M_n\ (x)\cdot cos\beta x + T_n(x)\cdot sin\beta x)e^{\alpha x},$$

где $M_n\ (x)$, $T_n(x)$ – многочлены от x степени $n = \max(m_1, m_2)$ с неопределенными коэффициентами, которые надо определить методом неопределенных коэффициентов

$\boldsymbol{s = 0}$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

$$k^2 + pk + \mathrm{q} = 0;$$

$\boldsymbol{s = 1}$, если $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Частный случай:

$$f\,(x) = P\cos\beta x + Q\sin\beta x,$$

где хотя бы одно из чисел P и Q отлично от нуля.

- Если число βi не является корнем характеристического уравнения,

  то частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{чн}}(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

- Если число βi является корнем характеристического уравнения,

  то частное решение ищем в виде:

$$y_{\text{чн}}(x) = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

где A и B —неопределенные коэффициенты.

Пример10. Решить уравнение:

$$y'' + 4y = 4\cos 2x\,.$$

Решение.

1) Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y'' + 4y = 0,$$

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i,\ \alpha = 0, \beta = 2$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения есть

$$y_0(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2) Найдем частное решение $y_{чн}(x)$ ЛНДУ:

$f(x) = 4\cos 2x$ $\qquad$ $(f(x) = P\cos\beta x + Q\sin\beta x)$

$P=4,\ Q=0$

$\alpha = 0, \beta = 2,\quad 2i = k_1$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{чн}(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

$y'_{\text{чн}}(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$

$y''_{\text{чн}}(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x -$

$4B\sin 2x) = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x).$

Подставим $y_{\text{чн}}(x)$ и $y''_{\text{чн}}(x)$ в исходное уравнение:

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$= 4\cos 2x,$

$4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x.$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему:

$$\begin{cases} 4A = 0 \\ 4B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $y_{\text{чн}}(x) = x\sin 2x.$

Окончательно, имеем общее решение исходного уравнения:

$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \sin 2x.$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \sin 2x.$

Пример11. Указать вид частного решения для уравнения:

$$y'' + 2y' + 2y = (x\cos x + 3\sin x)e^{-x}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ и решим его.

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$k^2 + 2k + 2 = 0,$

$D = 4 - 8 = -4 < 0,$

$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i,\ \alpha = -1, \beta = 1.\ y_0(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

2) $f(x) = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x)$

$f(x) = (P_{m_1}(x) \cdot \cos\beta x + Q_{m_2}(x) \cdot \sin\beta x)e^{\alpha x}$

$\alpha = -1, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = -1 + i$ – корень характеристического уравнения,

$P_{m_1}(x) = x \Rightarrow m_1 = 1,\ Q_{m_2}(x) = 3 \Rightarrow m_2 = 0 \Rightarrow n = \max(m_1, m_2) = 1.$

Следовательно, частное решение имеет вид :

$y_{\text{чн}}(x) = x\big((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\big)e^{-x}.$

Ответ: $y_{\text{чн}}(x) = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)e^{-x}$

Замечание.

Если в ЛНДУ $y'' + py' + qy = f(x)$ функция $f(x)$=$f_1(x) + f_2(x)$,
где каждая из $f_1(x), f_2(x)$ имеет специальный вид (случаи I, II), то
то частное решение уравнения строится согласно *принципу наложения*;

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{\text{чн}1}(x) + y_{\text{чн}2}(x),$$

где $y_{\text{чн}1}(x)$- частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$,
$y_{\text{чн}2}(x)$ - частное решение уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$.

Аналогично находятся частные решения в случае, когда правая часть есть алгебраическая сумма конечного числа функций специального вида;

$f(x)$=$f_1(x)$ +… +$f_n(x)$

Пример12. Решить уравнение: $y'' - 5y' = e^{5x} + 10\cos 5x$

Решение. $y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$

1 Найдем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$y'' - 5y' = 0,$

$k^2 - 5k = 0,$

$k(k - 5) = 0,$

$k_1=0,\ k_2=5,$

$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{5x}$ - общее решение однородного уравнения.

2 $y'' - 5y' = e^{5x}$

$f_1(x) = e^{5x}, \alpha = 5 = k_2, P_n(x) = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow Q_n(x) = A,$

$y_{чн1}(x) = Axe^{5x},$

$y'_{чн1}(x) = Ae^{5x} + 5Axe^{5x},$

$y''_{чн1}(x) = 5Ae^{5x} + 5Ae^{5x} + 25Axe^{5x} = 10Ae^{5x} + 25Axe^{5x},$

$10Ae^{5x} + 25Axe^{5x} - 5Ae^{5x} - 25Axe^{5x} = e^{5x}.$

$5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5},$

$y_{чн1}(x) = \frac{1}{5}xe^{5x} = 0{,}2xe^{5x},$

3 $y'' - 5y' = 10\cos 5x,$

$f_2(x) = 10\cos 5x,$

$\alpha = 0,\ \beta = 5,\quad \alpha + i\beta = 5i \neq k_{1,2},$

$y_{чн2}(x) = A\cos 5x + B\sin 5x,$

$y'_{чн2}(x) = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x,$

$y''_{чн2}(x) = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x,$

$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 25A\sin 5x - 25B\cos 5x = 10\cos 5x,$

$$\begin{cases} -25A - 25B = 10 \\ -25A + 25B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{5} \\ A = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0{,}2 \\ B = -0{,}2 \end{cases}$$

$y_{чн2}(x) = -0{,}2\cos 5x - 0{,}2\sin 5x,$

$y_{чн}(x) = y_{чн1}(x) + y_{чн2}(x),$

$y_{чн}(x) = 0{,}2(xe^{5x} - \cos 5x - \sin 5x),$

$y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x),$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{5x} + 0{,}2(xe^{5x} - \cos 5x - \sin 5x).$

Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 e^{5x} + 0{,}2(xe^{5x} - \cos 5x - \sin 5x).$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!