

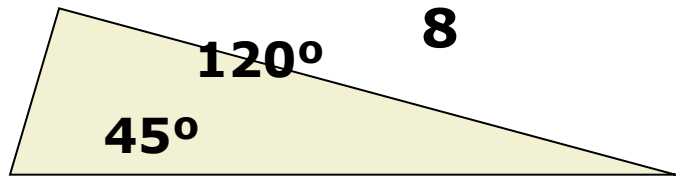
# *Решение треугольников*

Урок №28

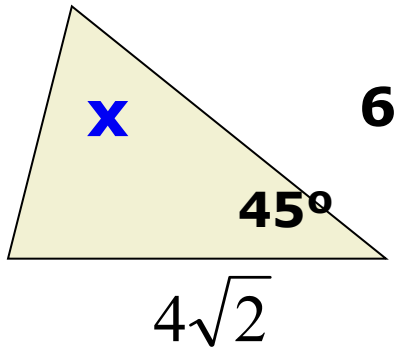
## Самостоятельная работа

• Вариант 1

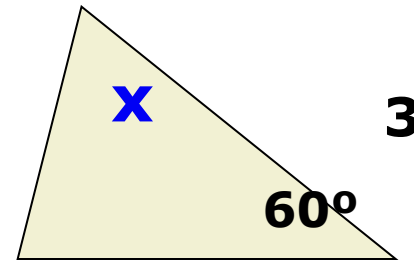
1.

**x**

2.

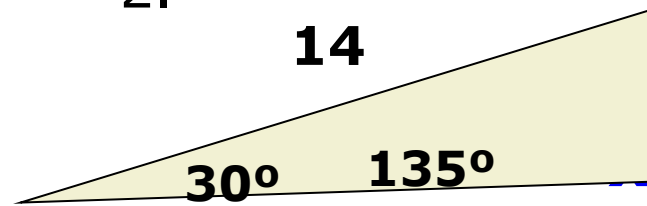
**Найти X**

• Вариант 2



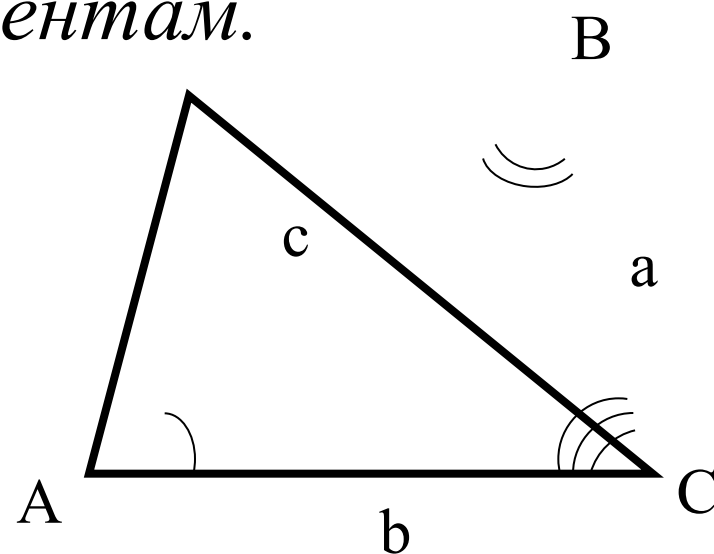
5

2.

**3. Определите вид треугольника со сторонами****3; 5; 7****4; 5; 6**

# Определение

*Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.*



## Для этого вспомним

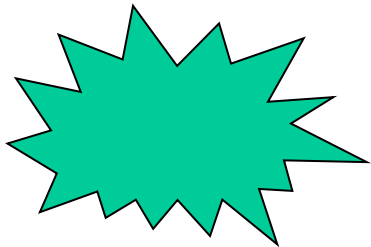
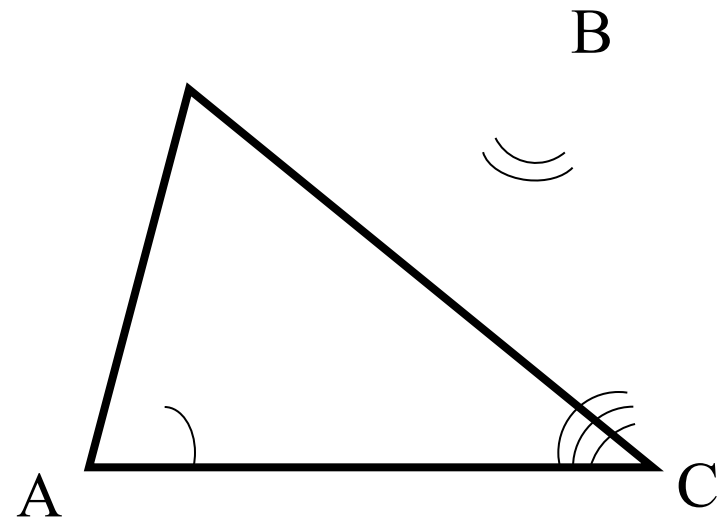
Решение данных задач основано на использовании теорем синусов и косинусов, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

# Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$

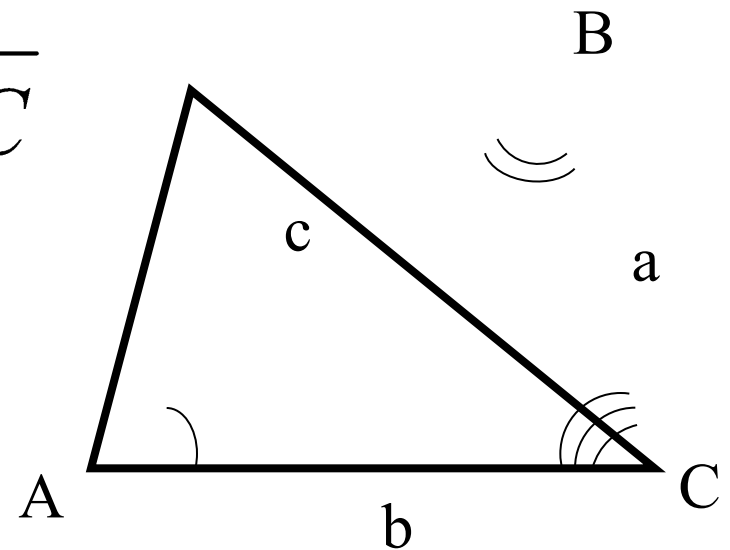
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



# Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов

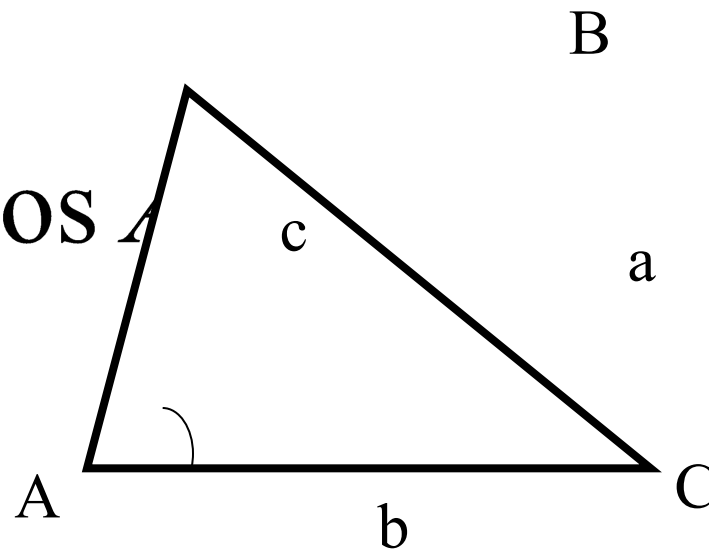
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



# Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

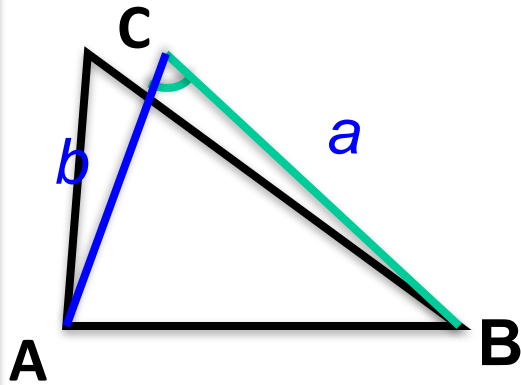


# Три задачи на решение треугольника





**Решение треугольника**  
*Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle C$*   
**по двум сторонам и углу между ними.**



**Что можно  
найти???**

1.  $AB$  по теореме косинусов
2.  $\angle A$  и  $\angle B$  по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

## Решение

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma, \text{ значит}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

2) Если  $\gamma$ - *тупой угол*, значит  $\alpha$  и  $\beta$  острые углы

Если  $\gamma$  – *острый угол*, то сравниваем  $a$  и  $b$ , *выбираем меньшую* и находим меньший угол (он точно острый)

Допустим это  $\alpha$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}$$

$$3) \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

**Задача имеет одно решение**

# Решаем задачу 1

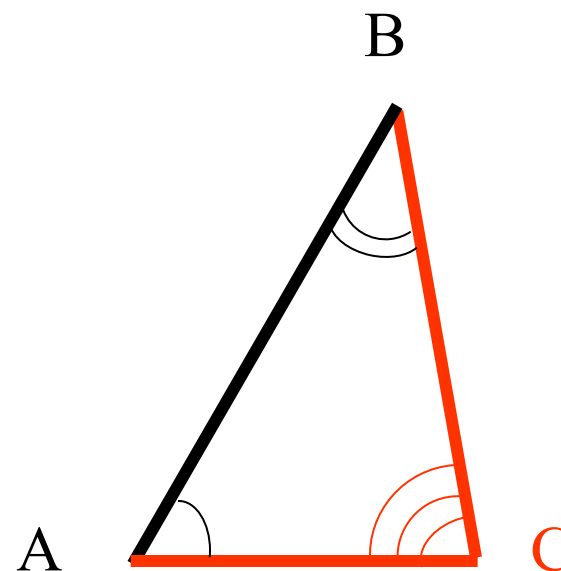
Решить треугольник ABC, если  $a=6,3$  см,  $b=6,3$  см,  $\angle C=54^\circ$ .

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $a=6,3$  см,

$b=6,3$  см,  $\angle C=54^\circ$ .

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $c$ .

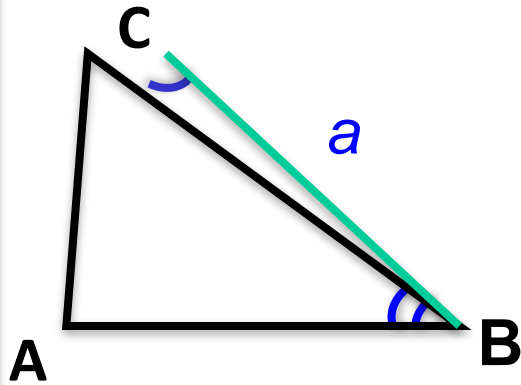
Ответ





## Решение треугольника по стороне и двум прилегающим к ней

**углам.**  
Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  $\angle C$ ,  $\angle B$



**Что можно  
найти???**

1.  $AB$  по теореме косинусов
2.  $\angle A$  и  $\angle B$  по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

# *Решение:*

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \alpha + \beta < 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

***Задача имеет одно решение***

## Решаем задачу 2

Решить треугольник ABC, если  $\angle A=60^\circ$   $\angle B=40^\circ$ , c

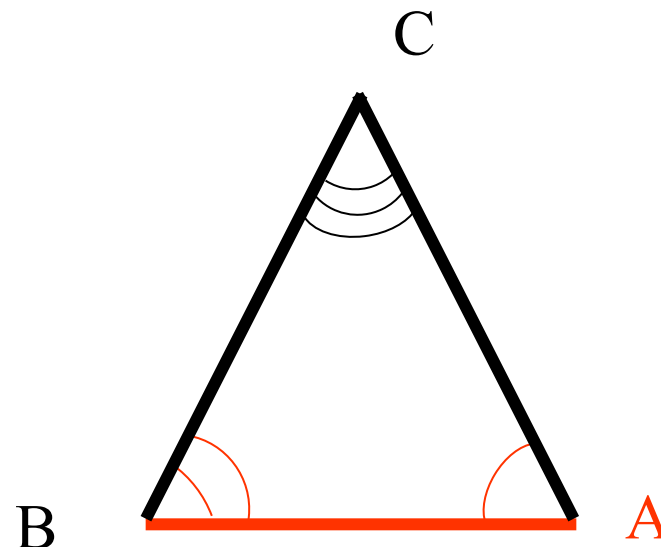
=14см.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle A=60^\circ$ ,

$\angle B=40^\circ$ , c=14см.

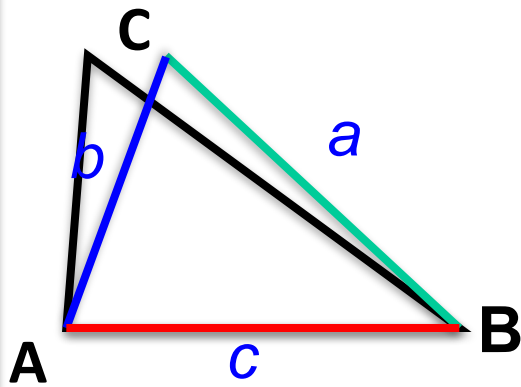
Найти: a, b,  $\angle C$ .

Ответ





Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$   
Решение: **Треугольника**  
по трем сторонам.



**Что можно  
найти???**

1.  $AB$  по теореме косинусов
2.  $\angle A$  и  $\angle B$  по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

## Решение

Пусть  $a$  – наибольшая сторона треугольника,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ значит}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

**Задача имеет одно решение** <sub>16</sub>



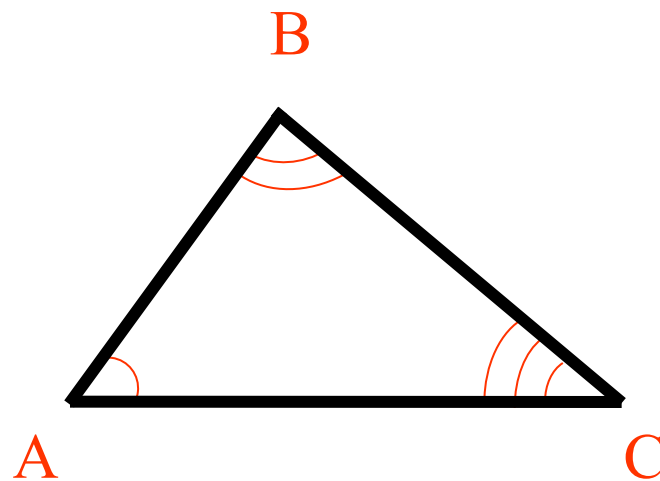
## Решаем задачу 3

Решить треугольник ABC, если  $a=6$  см,  $b=7,7$  см,  $c=4,8$  см.

Дано:  $a=6$  см,  $b=7,7$  см,  
 $c=4,8$  см.

Найти:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ .

Ответ



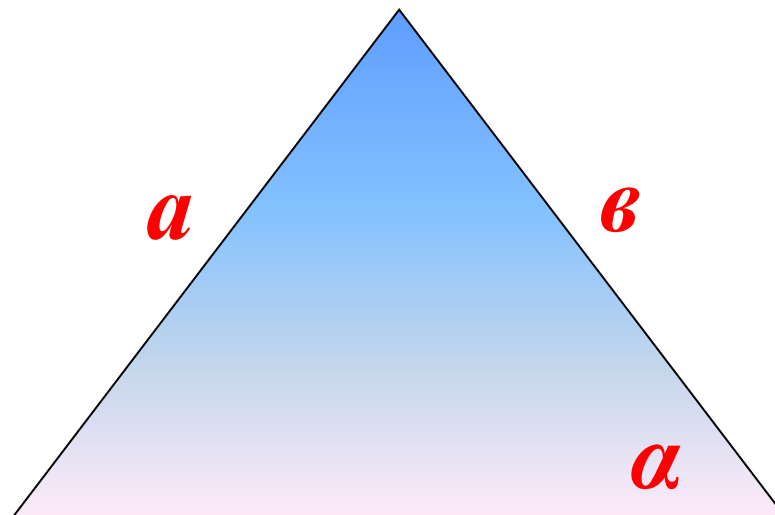
***IV тип задач  
по двум сторонам и углу,  
лежащему против одной из них***

***Дано:***

***$\Delta ABC$***

***$a, b, \alpha$***

***Найти:  $c, \gamma, \beta$***



## Решение

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ значит } \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

1. Если  **$b$**  намного больше  **$a$** , то  $\sin \beta > 1$  и задача не имеет решений.

2. Если  $\sin \beta = 1$ , то  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ - \alpha$ ,

$$c = b \cos \alpha$$

в этом случае задача имеет единственное решение

**3. Если  $0 < \sin \beta < 1$ , то  $\beta$  может быть и острым и тупым углом**

**Сравниваем  $a$  и  $b$**

**Если  $a < b$ , то**

существуют два угла  $\beta$

$\beta_1$  -острый, значит  
треугольник-  
остроугольный

$\beta_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1)$ -тупой,  
значит треугольник-  
тупоугольный

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta_1)$$

$$\gamma_2 = 180 - (\alpha + \beta_2)$$

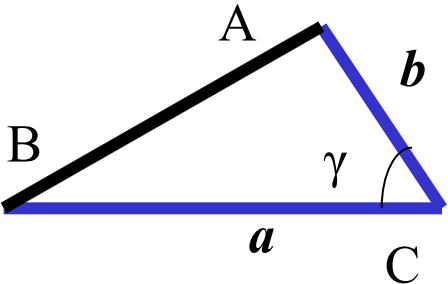
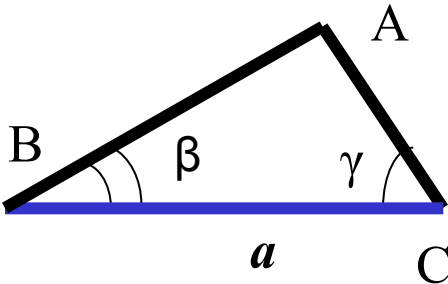
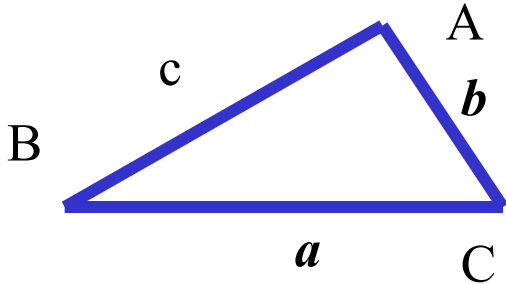
$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$$

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha}$$

**В этом случае задача имеет два решения**

# Таблица – памятка



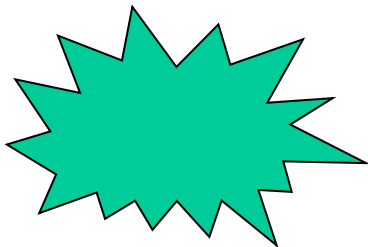
| Решение<br>треугольника по двум<br>сторонам и углу<br>между ними  | Решение<br>треугольника по<br>стороне и<br>прилежащим к ней<br>углам                                       | Решение треугольника по<br>трем сторонам   |
|---|--|--|
|    |                          |   |
| $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ | $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ | $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$ |

# Ответ к примеру 1

$$\angle A = 63^\circ$$

$$\angle B = 63^\circ$$

$$c \approx 5,7 \text{ см}$$

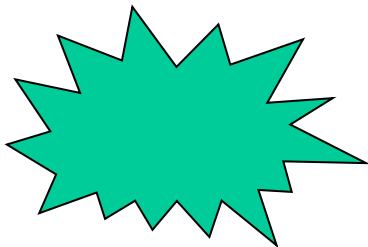


# Ответ к примеру 2

$$\angle C = 80^\circ$$

$$a \approx 12,3 \text{ см}$$

$$b \approx 9,1 \text{ см}$$

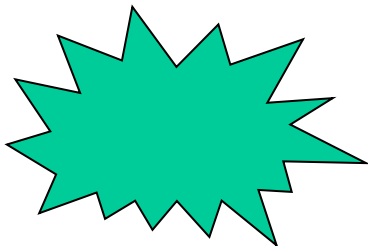


# Ответ к примеру 3

$$\angle A = 54^{\circ}52'$$

$$\angle B = 84^{\circ}16'$$

$$\angle C = 40^{\circ}52'$$





# Найди ошибку

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2R = \frac{\sin A}{a}$$

$$a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \alpha$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2r$$