

Дискретна математика

Осінь-зима 2019

Лекція 3
Алгебра логіки

Новогрудська Ріна Леонідівна
**к.т.н., доцент кафедри інформаційно-
телекомунікаційних мереж**

Мета лекції

Отримання знань щодо алгебри логіки

Питання, що будуть розглянуті

1. Логічні (булеві) функції.
2. Алгебра логіки.
3. Повні набори функцій
4. Канонічні форми булевих функцій.
5. Спрощення формул. Утворення скороченої ДНФ методом Квайна



1. Логічні (булеві) функції

Вступ до алгебри логіки

Порівняння основних властивостей множин та логіки висловлювань показало, що ці властивості мають багато спільного.

Як результат з'явилась Булева алгебра, яка є частиною математичної логіки.

Вступ до алгебри логіки

Математична логіка є сучасний вид формальної логіки, науки, що вивчає умовиводи з точки зору їхнього формального створення.

Основи математичної логіки закладено в таких працях англійського математика **Джорджа Буля** (1815 – 1864) як «Математичний аналіз логіки» (1847) і «Закони мислення» (1854), де він уперше виклав алгебру логіки – алгебру Буля.

Логічні (булеві) змінні

Означення 1.1. *Логічними (булевими) змінними в булевій алгебрі називають величини, які незалежно від їхньої конкретної суті можуть набувати лише двох значень.*

Логічні (булеві) змінні

Ці значення будемо позначати нулем (0) й одиницею (1), маючи на увазі, що 0 і 1 це формальні символи, що не мають арифметичного змісту, а зображують будь-які змінні, що набувають лише двох значень, наприклад „ТАК” і „НІ”, „ІСТИННО” (I) – „ХИБНО” (X) і т.д.

Якщо змінна має одиничне значення, то записуємо $x=1$, а якщо нульове, то $x=0$.

Булева функція

Як у звичайній алгебрі будуються функції від дійсних чисел, так і від булевих змінних можна будувати функції.

Означення 1.2. Булевою, або логічною, функцією називають функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка, як і її n аргументів, може набувати лише двох значень: 0 або 1.

Сфери застосування булевих функцій

- В обчислювальній техніці булеві функції застосовуються для:
 - опису алгоритмів,
 - засобів цієї техніки – дискретних пристроїв, які призначаються для перетворення дискретної інформації, що розкладається на елементарні одиниці – біти, які в пристроях реалізуються сигналами, що описуються двійковими змінними – булевими.
- Для вирішення деяких економічних задач
- Для вирішення задач цілочисельного програмування

Кортеж

Означення 1.3. Сукупність значень аргументів (x_1, x_2, \dots, x_n) називається **кортежем** або набором.

Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежить від n аргументів, називається **n -місною** і є повністю визначеною, якщо задано її значення для всіх наборів (x_1, x_2, \dots, x_n) (кортежів) значень аргументів.

Терм

Кожному кортежу можна поставити у відповідність терм - довільний елементарний добуток двійкових змінних

$t = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_{m-1} \tilde{x}_m$. Якщо в кортежі $x_j = 1$, то в термі замість \tilde{x}_j записується змінна x_j , а якщо $x_j = 0$, то \bar{x}_j .

Терм.Приклад

Терму $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5$ відповідає кортеж, в якому
 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$.

Терм. Додаткова інформація

Будь-яке ціле невід'ємне число можна записати у вигляді суми

$$N = g_1 r^{n-1} + g_2 r^{n-2} + \dots + g_{n-1} r^1 + g_n r^0,$$

де r – основа системи числення; g_i – співмножник, що набуває значень від 0 до $r - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Кількість доданків визначається розрядністю чисел.

Терм. Додаткова інформація

Кортеж значень аргументів логічної функції можна розглядати як запис цілого додатного числа у двійковій системі числення ($r = 2$); тоді x_0 – розряд одиниць, x_1 – розряд двійок, x_2 – розряд четвірок.

$$5_{10} = 101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$15_{10} = 1111_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$16_{10} = 10000_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Терм. Додаткова інформація

$$5_{10} = 101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 1^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$15_{10} = 1111_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$16_{10} = 10000_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Десятковий еквівалент двійкового подання числа називається номером кортежу. Таким чином, перше число має номер кортежу 5, друге – 15, а третє – 16.

Основні способи подання булевих функцій

- **вербальний** (або словесний)– це словесний опис значень, яких набуває функція на певному кортежі змінних,
- **аналітичний**–опис її аналітичним виразом (формулою),
- **табличний**–подання за допомогою таблиці відповідності (істинності).

Аналітичний спосіб. Приклад

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2(\bar{x}_3 + x_1); \quad f_2(abc) = abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Табличний спосіб. Приклад

В лівій частині Таблиці переписані всі можливі значення її аргументів x_1, x_2, \dots, x_n , тобто всі можливі кортежі, а правою частиною є стовпець значень функції, який відповідає цим наборам

Таблиця 1.1

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Набір функції

Означення 1.4. *Набір значень змінних (кортеж), на якому функція набуває значення $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, називається одиничним набором функції f , множина усіх одиничних наборів, називається одиничною множиною функції f .*

Так саме набір аргументів, на якому $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, називається нульовим набором функції f , а множина нульових наборів – нульовою множиною.

Булеві функції однієї змінної

Загальна таблиця істинності (відповідності) для булевих функцій однієї змінної має вигляд табл.1.2.

Виходячи з того, що на кожному з двох можливих значень змінної функція набуває одного з двох можливих значень, очевидно, що існують $2^2 = 4$ різних булевих функцій від однієї булевої змінної. Всі вони наведені в табл.1.2.

Таблиця 1.2

x	$y_1 = f_1(x)$	$y_2 = f_2(x)$	$y_3 = f_3(x)$	$y_4 = f_4(x)$
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Булеві функції однієї змінної

Таблиця 1.2

x	$y_1 = f_1(x)$	$y_2 = f_2(x)$	$y_3 = f_3(x)$	$y_4 = f_4(x)$
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Функції y_1 та y_2 є функціями - константами: $f_1(x)$ – абсолютно істинна (константа одиниці); $f_2(x)$ – абсолютно хибна (константа нуль), $f_3(x)$ – логічне заперечення, або НІ, або інверсія x (читається як «не x », зображається як \bar{x} або $\neg x$), це єдина нетривіальна функція; $f_4(x)$ – змінна x (повторює значення змінної x і тому збігається з нею).

Область визначення логічної функції

Областю визначення логічної (булевої) функції n аргументів є сукупність 2^n булевих кортежів.

Це положення очевидне з погляду інтерпретації набору двійковим поданням n -розрядного числа (кількість додатних n -розрядних двійкових чисел дорівнює 2^n).

Область визначення логічної функції.

Приклад

Булева функція двох аргументів є повністю визначеною, якщо задано її значення в кожному з чотирьох можливих наборів ($2^2 = 4$), тобто на наборах 00, 01, 10, 11 або на кортежах з номерами 0, 1, 2, 3.

Булева функція трьох аргументів ($2^3 = 8$) у восьми наборах також буде повністю визначеною, тобто на кортежах з номерами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Булева функція n аргументів є повністю визначеною, якщо задано всі її значення в кожному з 2^n наборів.

Кількість булевих функцій.

Можна довести, що число усіх функцій $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежать від n змінних x_1, x_2, \dots, x_n дорівнює 2^{2^n} .

Всього булевих функцій від двох аргументів – 16, від трьох – 256, від чотирьох – 65536.

Елементарні функції алгебри логіки

Функції двох змінних відіграють важливу роль, тому що з них може бути побудована будь-яка логічна функція.

Функції однієї і двох змінних називаються елементарними.

Елементарні функції алгебри логіки

Приклади елементарних функцій однієї змінної наведено в табл.1.2.

У табл.1.3. подано 16 функцій двох змінних, з яких шість $f_{16}(a,b) = 0$, $f_{11}(a,b) = a$, $f_{13}(a,b) = b$, $f_{12}(a,b) = \bar{a}$, $f_{14}(a,b) = \bar{b}$, $f_{15}(a,b) = 1$, є константами або функціями одного аргументу.

Інші 10 функцій залежать від двох аргументів і мають свої загальноприйняті позначення та назви, зазначені в табл.1.3.

Функції двох змінних

Таблиця 1.3

Позначення функції	Найменування функції	a			
		0	0	1	1
		b			
		0	1	0	1
$f_1 = a \wedge b = ab = a \& b$	Кон'юнкція (логічне множення)	0	0	0	1
$f_2 = a \vee b = a + b$	Диз'юнкція (логічне додавання)0	0	1	1	1
$f_3 = a \rightarrow b$	Імплікація (від a до b)	1	1	0	1
$f_4 = a \leftarrow b$	Обернена імплікація (від b до a)	1	0	1	1

Функції двох змінних

Таблиця 1.3

Позначення функції	Найменування функції	a			
		0	0	1	1
		b			
		0	1	0	1
$f_5 = a \sim b = a \Leftrightarrow b$	Рівносильність	1	0	0	1
$f_6 = a \approx b = a \oplus b$	Нерівносильність (додавання за модулем 2)	0	1	1	0
$f_7 = \overline{a \wedge b} = a b$	Функція Шеффера (інверсія кон'юнкції)	1	1	1	0
$f_8 = \overline{a \vee b} = a \downarrow b$	Функція стрілка Пірса – Вебба (інверсія диз'юнкції)	1	0	0	0

Функції двох змінних

Таблиця 1.3

Позначення функції	Найменування функції	a			
		0	0	1	1
		b			
		0	1	0	1
$f_9 = a \overrightarrow{b}$	Інверсія імплікації (функція заборони за b)	0	0	1	0
$f_{10} = a \overleftarrow{b}$	Інверсія оберненої імплікації (функція заборони за a)	0	1	0	0
$f_{11} = a$	Повторення a (змінна a)	0	0	1	1
$f_{12} = \bar{a}$	Інверсія a	1	1	0	0

Функції ДВОХ ЗМІННИХ

Таблиця 1.3

Позначення функції	Найменування функції	a			
		0	0	1	1
		b			
		0	1	0	1
$f_{13} = b$	Повторення b (змінна b)	0	1	0	1
$f_{14} = \bar{b}$	Інверсія b	1	0	1	0
$f_{15} = 1$	Одинична функція (константа 1)	1	1	1	1
$f_{16} = 0$	Нульова функція (константа 0)	0	0	0	0

Функція Шеффера (штрих Шеффера)

Функція Шеффера (штрих Шеффера) – це функція $f_7(a, b)$, яка є хибною тоді і тільки тоді, коли a і b є істинними. Умовне позначення цієї функції $f_7(a, b) = a | b = a \bar{\wedge} b$.

Німецький математик Д.Шеффер на основі цієї функції створив алгебру, названу алгеброю Шеффера.

Функція $f_7(a, b)$ є універсальною (або складає повну систему функцій), тобто функцією, за допомогою якої можна представити будь-яку логічну функцію двох змінних.

Функція (стрілка) Пірса-Вебба

Функція стрілка Пірса-Вебба – це функція $f_8(a, b)$, що є істинною тоді і тільки тоді, коли a і b є хибними. Умовне позначення цієї функції $f_8(a, b) = a \downarrow b$.

Математики Ч.Пірс та Д.Вебб, які незалежно один від одного вивчали властивості цієї функції, створили алгебру, названу алгеброю Пірса – Вебба.

Функція $f_8(a, b)$ також є універсальною.

2. Алгебра логіки

Поняття формули в алгебрі логіки

Як і в алгебрі висловлень, так і в алгебрі логіки, виходячи з елементарних функцій, можна будувати формули.

Літери, якими позначаються булеві змінні, позначки логічних операцій та дужки складають алфавіт алгебри логіки. За допомогою елементів алфавіту можна будувати формули алгебри логіки.

Поняття формули в алгебрі логіки

Означення 1.5. Вираз, який складається з літер булевих змінних, позначок логічних операцій та дужок є формулою алгебри логіки, якщо він задовольняє наступним умовам:

- 1) Будь-яка логічна змінна x є формулою;
- 2) Якщо x і y - формули, то $((x \wedge y)), ((x \vee y))$ а також x і y , які з'єднані будь-якою операцією з табл. 1.3, є формулою;
- 3) Інших формул немає.

Приклади формул в алгебрі логіки

Приклад 1.2. Такі вирази є формулами:

- $((x_1 x_2) + x_1) + x_2$,
- $(\bar{x}_1(x_1 + x_3))$,
- $(x_1 \vee ((x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_2)))$,

а ці вирази не є формулами:

- $(AB(xy$ – незакриті дужки;
- $\wedge \bar{b} \wedge y$ – відсутній символ булевої змінної;
- $x \rightarrow \rightarrow y$ – відсутній символ булевої змінної.

Приклади формул в алгебрі логіки

Приклад 1.3. Функція, яку реалізує формула $F_1 = (((x_1x_2) + x_1) + x_2)$ будується за три кроки (табл.1.5):

1. (x_1x_2) ;
2. $((x_1x_2) + x_1)$;
3. $((x_1x_2) + x_1) + x_2 = F_1$.

Таблиця 1.5

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2) + x_1$	$F_1 = (((x_1x_2) + x_1) + x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Зв'язок між функцією та формулою в алгебрі логіки

Означення 1.6. Якщо формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ описує функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то кажуть, що формулі $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відповідає функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або формулі F зіставлена функція f .

Якщо функція f відповідає формулі F , то кажуть також, що формула F реалізує функцію f .

Зв'язок між функцією та формулою в алгебрі логіки

Формула $F_1(a, b) = ab$ реалізує функцію $f_1(a, b)$.
Це видно з табл. 1.7 а.

Таблиця 1.7 а

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Зв'язок між функцією та формулою в алгебрі логіки. Приклад

Формула $F_1(a, b) = ab$ реалізує функцію $f_1(a, b)$. Це видно з табл. 1.7 а. Таку ж таблицю істинності має й функція, яка відповідає формулі $F_2(a, b) = (((a + b)a)b)$, тобто й формула $F_2(a, b)$ реалізує функцію $f_2(a, b)$, (див. табл. 1.7 б.).

Таблиця 1.7 а

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблиця 1.7 б

a	b	$(((ab)a)b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рівносильні формули

Таким чином, різні формули можуть реалізувати одну й ту ж саму функцію. Більш того, таких формул чимала кількість.

Адже, наприклад, всього функцій від двох змінних існує 16, а формул, які їм відповідають, велика кількість.

Проте, всі формули, які відповідають одній і тій самій функції, мають одну і ту саму таблицю істинності.

Про такі формули кажуть, що вони рівносильні.

Еквівалентність формул

Означення 1.7. *Формули $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називаються еквівалентними (або тотожними, або рівносильними), якщо є рівними функції f_1 та f_2 , що реалізовані відповідно формулами F_1 і F_2 , тобто $f_1 = f_2$. Тоді запис $F_1 = F_2$ означає, що F_1 й F_2 – еквівалентні формули.*

Закони булевої алгебри

Закони булевої алгебри аналогічні законам алгебри висловлень.

Універсальність функції Шефера

Функція Шефера – це функція, що може бути виражена співвідношенням $x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$.

Для цієї функції справджуються такі властивості:

1. $x | x = \bar{x}$;

3. $x | \bar{x} = 1$;

5. $x | 0 = 1$;

2. $x | 1 = \bar{x}$;

4. $\bar{x} | 0 = 1$;

6. $\bar{x} | 1 = x$.

Універсальність функції Шеффера

Для функції Шеффера справджується тільки властивість комутативності

$$x_1 | x_2 = x_2 | x_1$$

і не справджується властивість асоціативності:

$$x_1 | (x_2 | x_3) \neq (x_1 | x_2) | x_3.$$

Універсальність функції Шеффера

З основних властивостей функції Шеффера можна дістати такі формули перетворення:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \overline{x_1 | x_2} = (x_1 | x_2) | (x_1 | x_2) \\ \bar{x} = x | x \\ x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 x_2}} = \overline{x_1} | \overline{x_2} = (x_1 | x_1) | (x_2 | x_2) \end{cases}$$

Універсальність функції стрілки Пірса-Вебба

Функція стрілка Пірса-Вебба – це функція, що описується виразом $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \bar{x}_2$

Для цієї функції легко показати справедливості таких аксіом:

1. $x \downarrow x = \bar{x}$;

2. $x \downarrow 0 = \bar{x}$;

3. $x \downarrow \bar{x} = 0$;

4. $x \downarrow 1 = 0$.

Універсальність функції стрілки Пірса-Вебба

На підставі цих аксіом можна встановити, що для функції стрілка Пірса-Вебба справджується тільки властивість комутативності: $x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$.

Універсальність функції стрілки Пірса-Вебба

Функції І, АБО, НІ виражаються через функцію стрілка Пірса-Вебба таким чином:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2); \\ x_1 + x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2); \\ \bar{x} = x \downarrow x. \end{cases}$$



3. Повні набори функцій

Повні набори функцій

Як видно з вищенаведеного, одна й теж сама логічна функція може бути задана декількома формулами, які містять різні набори логічних операцій.

Існують набори логічних функцій, за допомогою яких можна виразити будь-яку іншу функцію алгебри логіки .

Такі набори (системи) називаються повними системами функцій алгебри логіки, або базисами.

Повні набори функцій

Означення 1.12. Система булевих функцій називається функціонально повною, якщо будь-яка булева функція може бути записана у вигляді формули через функції цієї системи.

Як приклад повної системи, можна навести систему, яку складають всі булеві функції. Кількість функцій – 2^{2^n} .

Так, усі 16 функцій двох змінних утворюють повну систему.

Повні набори (системи) функцій характеризуються певним набором властивостей функцій, які є її складовими.

Повні набори функцій

Твердження :

Будь-яка функція алгебри логіки може бути задана формулою за допомогою диз'юнкції та заперечення, або кон'юнкції та заперечення, причому в будь-якому випадку необхідні дві операції.

Повні набори функцій

Таким чином, для доведення функціональної повноти будь-якої системи функцій достатньо показати, як можна виразити за допомогою функцій цієї системи.

Повні набори функцій

Система, яка складається із однієї операції штрих Шиффера є повною.

Система, яка складається із однієї операції стрілка Пірса є повною.



4. Канонічні форми булевих функцій

Тотожно істинна формула

Означення 1.13. Формула називається тотожно істинною, якщо вона при всіх значеннях змінних, що входять у неї, набуває значення 1.

Приклади тотожно істинних формул:

$$F_1(x) = x \vee \bar{x}; \quad F_2(x, y) = x \rightarrow (y \rightarrow x); \quad F_3(x, y) = x(x \rightarrow y) \rightarrow y.$$

Тотожно хибна та здійсненна формули

Означення 1.14. *Формула називається тотожно хибною, якщо вона при всіх значеннях змінних, що входять у неї, набуває значення 0.*

Приклади тотожно хибної формули є $F(x) = x\bar{x}$

Означення 1.15. *Формула називається здійсненою (нейтральною), якщо вона не є тотожно істинною або тотожно хибною.*

Проблема розв'язуваності

Проблема розв'язуваності: задати єдиний спосіб (алгоритм), який дає змогу для кожної формули з'ясувати, чи є вона здійсненою, тобто чи не є вона тотожною 0 або 1.

Проблема розв'язуваності

Нехай формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що виражає деяку функцію n змінних x_1, x_2, \dots, x_n .

При цьому як змінні x_1, x_2, \dots, x_n так і функція F можуть набувати лише двох значень, число ж можливих комбінацій значень змінних є скінченим і дорівнює 2^n .

Для кожної такої комбінації можна визначити значення формули F .

Знаючи ці її значення для кожної комбінації змінних x_1, x_2, \dots, x_n можна встановити, здійсненна чи ні функція.

Проблема розв'язуваності

Викладений спосіб, дає принципове вирішення проблеми розв'язуваності, але при великій кількості змінних він практично нездійсненний через величезне число можливих наборів значень змінних.

Існує інший спосіб, що ґрунтується на зведенні формул до нормальної форми. Якщо у процесі такого зведення формула не перетворюється на тотожні 0 або 1, то це свідчить про її здійсненність.

ДДНФ і ДКНФ

Методи, які дають змогу для будь-якої логічної функції записати булевий вираз, ґрунтуються на тому, що вводяться вирази певного типу - **канонічні форми**, а потім формуються досить прості правила запису будь-якої функції у цих формах.

Як канонічні звичайно використовуються досконалі **диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми** (ДДНФ і ДКНФ).

Елементарна кон'юнкція

Означення 1.16. *Логічний добуток будь-якої кількості різних змінних (символів), що входять із запереченням або без нього, називається елементарною кон'юнкцією.*

Звідси випливає, що $x_1x_2\bar{x}_3$, наприклад, є, а $x_1x_2 + \bar{x}_3$ – не є елементарною кон'юнкцією.

Якщо функція $F = x_1x_2 \boxtimes x_r$ - елементарна кон'юнкція, то r називається її рангом.

Диз'юнктивна нормальна форма

Означення 1.17. Якщо функцію подано формулою у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій, то кажуть, що її подано диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).

Наприклад, нехай деяка функція $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ реалізована формулою в вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій

$$F_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_3.$$

Диз'юнктивна нормальна форма

Будь-яку логічну функцію можна представити у вигляді ДНФ, тому що ДНФ утворюється за допомогою системи операцій $\{\wedge, \vee, \neg\}$, яка є повною.

Будь-яка логічна функція має не єдину ДНФ.

Диз'юнктивна нормальна форма.

Приклад

Розглянемо вище наведену формулу і застосуємо закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції, але справа наліво, тобто $ab + ac = a(b + c)$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} F_2(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_0 \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + x_0 x_3 = \\ &= x_0 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_0 x_3 (\overline{x_1} \overline{x_2} + 1) = x_0 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_0 x_3 \end{aligned}$$

Ми отримали ще одну ДНФ функції $f(x)$, яка є коротшою за попередню.

Диз'юнктивна нормальна форма.

Приклад

Можна отримати і інші ДНФ тієї самої функції f :

$$\begin{aligned} F_2(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0 x_2 \bar{x}_3 + x_0 x_3 = x_0 x_2 \bar{x}_3 \cdot 1 + x_0 x_3 \cdot 1 + 0 = \\ &= x_0 x_2 \bar{x}_3 (x_1 + \bar{x}_1) + x_0 x_3 (x_1 + \bar{x}_1) + x_1 \bar{x}_1 = \\ &= x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 x_1 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_1 \end{aligned}$$

Це ще одна ДНФ однієї і тієї самої функції. Цей процес можна продовжувати.

Диз'юнктивна нормальна форма

Як бачимо, для будь-якої логічної функції можна утворити велику кількість формул у вигляді ДНФ.

Але є така ДНФ, яка єдина для будь-якої логічної функції.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма

Означення 1.18. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) формули, що містить n різних змінних, називається ДНФ, яка має такі властивості:

- 1) в ній немає однакових доданків;
- 2) жоден із доданків не містить двох однакових співмножників;
- 3) жоден із доданків не містить змінну разом з її запереченням;
- 4) в кожному окремому доданку є як співмножник або змінна або її заперечення для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n$.

Досконала диз'юнктивна нормальна форма

Будь-яка логічна функція, за виключенням константи «0», має одну ДДНФ і кілька ДНФ.

Будь-яка ДНФ утворюється внаслідок більшого або меншого скорочення ДДНФ, причому від будь-якої ДНФ можна перейти до ДДНФ.

Такий перехід називається «розгортанням».

Досконала диз'юнктивна нормальна форма. Приклад

Отримаємо ДДНФ розглянутої функції:

$$\begin{aligned} F_4(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_3 = x_0 x_2 \bar{x}_3 (x_1 + \bar{x}_1) + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + \\ &+ x_0 x_3 (x_1 + \bar{x}_1) = x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_1 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_3 = \\ &= x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_1 x_3 (x_2 + \bar{x}_2) + x_0 \bar{x}_1 x_3 (x_2 + \bar{x}_2) = \\ &= x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 x_3 + \\ &+ x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Спосіб «розгортання» ДНФ до вигляду ДДНФ деякої функції, що залежить від n змінних

Він полягає в наступному:

1. Виділити всі доданки (елементарні кон'юнкції), в яких менше за n співмножників.
2. Кожний з цих доданків помножити на співмножник $(x_i + \bar{x}_i)$, який дорівнює одиниці, де x_i – відсутня в доданку змінна.
3. Повторювати п.2, доки всі доданки не задовольнятимуть умові наявності n співмножників.

Цей принцип отримання ДДНФ застосовний тільки до формул, які мають вигляд ДНФ.

Ще один спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення

Він містить кроки:

1. Побудова таблиці істинності функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
2. Для кожного набору значень аргументів (кортежу),

на якому $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, в ДДНФ додається елементарна кон'юнкція $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$, де

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{якщо в кортежі } x_i = 1; \\ \bar{x}_i, & \text{якщо в кортежі } x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Тобто ДДНФ має стільки доданків у вигляді елементарних кон'юнкцій, скільки одиниць є в стовпці функції.

Спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення. Приклад

Повернемось до розглянутої нами функції

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_3.$$

Побудуємо її таблицю істинності (табл.1.21).

Таблиця 1.21

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0 x_2 \bar{x}_3$	$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$x_0 x_3$	f
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0

Спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення. Приклад

(Продовження) Таблиця 1.21

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0 x_2 \bar{x}_3$	$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$x_0 x_3$	f
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1

Спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення. Приклад

(Продовження) Таблиця 1.21

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0 x_2 \bar{x}_3$	$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$x_0 x_3$	f
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1

Спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення. Приклад

Будуємо ДДНФ за «одиницями» в стовпці функції (останньому стовпці). Це кортежі з номерами 0, 10, 11, 13, 14, 15(винесені в табл. 1.21_1)

Таблиця 1.21 1

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0x_2\bar{x}_3$	$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$x_0x_2\bar{x}_3$	f
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

Спосіб «розгортання», виходячи з табличного представлення. Приклад

Таблиця 1.21 1

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0 x_2 \bar{x}_3$	$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$x_0 x_2 \bar{x}_3$	f
<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

Отримуємо:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_0 x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_0 x_1 x_2 x_3$$

Вона збігається з отриманою раніше в прикладі.

Елементарна диз'юнкція

Означення 1.19. Логічна сума будь-якої кількості різних незалежних змінних, що входять із запереченням або без нього, називається елементарною диз'юнкцією.

Звідси випливає, що $(x_0 + x_2 + \bar{x}_3)$, $(x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$ й $(x_0 + x_1 + \bar{x}_0)$ – елементарні диз'юнкції.

Аналогічно до попереднього $F = x_1 + x_2 + \dots + x_r$ – елементарна диз'юнкція рангу r .

Кон'юктивна нормальна форма

Означення 1.20. *Якщо яку-небудь функцію задано формулою у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій, то функцію задано її кон'юктивною нормальною формою (КНФ).*

Наприклад КНФ функції:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_3).$$

Будь-яка логічна функція, за виключенням рівної константі 1, може бути задана і своєю довершеною кон'юктивною нормальною формою (ДКНФ).

Довершена кон'юнктивна нормальна форма

Означення 1.21. ДКНФ логічної функції називається її КНФ, що задовольняє такі умови:

- 1) в ній немає двох однакових співмножників;
- 2) жоден зі співмножників не містить двох однакових доданків;
- 3) жоден зі співмножників не містить якої-небудь змінної разом з її запереченням;
- 4) кожен співмножник містить як складову x_i або \bar{x}_i для будь-якого $i = 1, 2, \dots, n$.

Довершена кон'юнктивна нормальна форма

Все сказане стосовно ДДНФ можна аналогічно застосувати і для ДКНФ.

Будь-яка логічна функція має єдину ДКНФ.

Цю ДКНФ можна отримати двома способами:

- способом „розгортання”;
- за допомогою таблиць істинності.

Спосіб «розгортання» КНФ деякої функції до вигляду ДКНФ

Він полягає в наступному:

1. Виділити всі співмножники (елементарні диз'юнкції), в яких менше за n доданків.
2. До кожного з цих співмножників додати доданок $x_i \bar{x}_i$, який дорівнює нулю і не змінює значення початкового співмножника, де x_i – відсутня в початковому співмножнику змінна.
3. Повторювати п.2, поки всі співмножники не задовольнятимуть умову наявності n доданків.

Підкреслимо, що цей спосіб отримання ДКНФ застосовний тільки до формул, які мають вигляд КНФ.

Спосіб «розгортання» КНФ деякої функції до вигляду ДКНФ. Приклад

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (x_0 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_3) = \\ &= (x_0 + x_2 + \bar{x}_3 + 0)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_3 + 0) = \\ &= (x_0 + x_2 + \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_1)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_3 + x_1\bar{x}_1) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot \\ &\quad \cdot (x_0 + x_1 + x_3 + x_2\bar{x}_2)(x_0 + \bar{x}_1 + x_3 + x_2\bar{x}_2) = (x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot \\ &\quad \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot \\ &\quad \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + x_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3). \end{aligned}$$

Спосіб «розгортання» за табличним поданням функції

Він містить такі кроки:

1. побудова таблиці істинності $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

2. для кожного набору значень аргументів (кортежу), на якому $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ в ДКНФ додається елементарна диз'юнкція вигляду: $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n$, де

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{якщо в кортежі } x_i = 0; \\ \bar{x}_i, & \text{якщо в кортежі } x_i = 1; \end{cases} i = 1, 2, \dots, n.$$

Спосіб «розгортання» за табличним поданням функції. Приклад

Розглянемо ту саму функцію, що і в попередньому прикладі
Побудуємо її таблицю істинності (табл.1.22)

Таблиця 1.22

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0+x_2+\bar{x}_3$	$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2+x_3$	x_0+x_3	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Спосіб «розгортання» за табличним поданням функції. Приклад

(Продовження) Таблиця 1.22

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0 + x_2 + \bar{x}_3$	$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_3$	$x_0 + x_3$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

Спосіб «розгортання» за табличним поданням функції. Приклад

Будуємо ДКНФ за „нулями” функції(табл.1.22_1):

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 + x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + x_3)(x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3).$$

Таблиця 1.22 1

x_0	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_0+x_2+\bar{x}_3$	$x_0+\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$	x_0+x_3	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0



5. Спрощення формул

Спрощення формул

Розглянуті досконалі форми (ДДНФ і ДКНФ) є **найбільшими** (найдовшими) з усіх ДНФ і КНФ певної функції.

ДНФ і ДКНФ самі по собі **не застосовні** ні в мікросхемотехніці, ні в інших галузях.

Їх **основне призначення** в тому, що **всі основні алгоритми скорочення ДНФ і КНФ починаються з побудови ДДНФ і ДКНФ** відповідно.

А саме **скорочення** будь-якої логічної функції є **основною метою перетворень формул** булевої алгебри.

Утворення скороченої ДНФ методом Квайна

При скороченні за методом Квайна передбачається, що початкова функція надається у вигляді ДДНФ.

Використовується перетворення ДДНФ за допомогою операцій склеювання й поглинання.

Операції повного склеювання та поглинання

Операція повного склеювання:

$$xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x,$$

де два члени xy і $x\bar{y}$ склеюються за змінною y .

Операція поглинання:

$$x + xy = x(1 + y) = x,$$

член xy поглинається членом x .

Теорема Квайна

Теорема Квайна. Якщо в ДДНФ логічної функції провести всі операції склеювання, а потім усі операції поглинання, то отримаємо скорочену ДНФ.

Метод Квайна виконується в декілька етапів (підкреслимо, що перетворення треба починати, виходячи з ДДНФ).

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули.

Цей етап містить три кроки:

1. Провести в ДДНФ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ всі можливі операції попарного склеювання за однією змінною її доданків. У результаті утворяться добутки – кон'юнкції $(n-1)$ -го рангу. Після цього виконати операції поглинання.
2. Провести можливі склеювання членів $(n-1)$ -го рангу, потім поглинання. Утворяться кон'юнкції $(n-2)$ -го рангу.
3. Виконати операції склеювання членів $(n-2)$ -го рангу, одержати кон'юнкції $(n-3)$ -го рангу і т.д.

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули. Приклад

Скоротимо функцію, яку подано в вигляді ДДНФ:

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Кон'юнкціями 4-го рангу є (див. табл.1.23):

$$\begin{array}{cccc} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 & \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 \bar{x}_4 & \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 & \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \\ x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 & x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 & x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 & x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4. \end{array}$$

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули. Приклад

Таблиця 1.23

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	1			$\bar{x}_1 x_3 x_4$		$\bar{x}_2 x_3 x_4$		
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$		1	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$				$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$		$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	1	$\bar{x}_1 x_2 x_4$				$x_2 \bar{x}_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_3 x_4$		$x_1 x_2 x_4$	1				
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$					1	$x_1 \bar{x}_2 x_4$		$x_1 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_2 x_3 x_4$				$x_1 \bar{x}_2 x_4$	1		
$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$		$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$					1	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$			$x_2 \bar{x}_3 x_4$		$x_1 \bar{x}_3 x_4$		$x_1 x_2 \bar{x}_3$	1

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули. Приклад

Проведення всіх можливих склеювань за однією змінною наведено в табл.1.23, в результаті отримаємо кон'юнкції 3-го рангу:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 x_3 x_4 \quad \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \quad x_2 \bar{x}_3 x_4 \quad \bar{x}_1 x_2 x_4 \quad x_1 \bar{x}_2 x_4 \\ &\bar{x}_2 x_3 x_4 \quad x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \quad x_1 x_2 \bar{x}_3 \quad x_1 \bar{x}_3 x_4. \end{aligned}$$

Виконання операцій склеювання та поглинання приводить до вилучення всіх кон'юнкцій четвертого рангу.

Кон'юнкції 3-го рангу залишаються.

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули. Приклад

Проведення всіх можливих склеювань кон'юнкцій 3-го рангу наведено в табл.1.24. В результаті отримаємо кон'юнкцію 2-го рангу $x_2\bar{x}_3$.

Виконання операцій поглинання приводить до вилучення кон'юнкцій 3-го рангу $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$, $x_2\bar{x}_3x_4$, $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $x_1x_2\bar{x}_3$.

Залишаються кон'юнкції 3-го рангу $\bar{x}_1x_3x_4$, $\bar{x}_1x_2x_4$, $x_1\bar{x}_2x_4$, $\bar{x}_2x_3x_4$, $x_1\bar{x}_3x_4$.

Для єдиної кон'юнкції 2-го рангу $x_2\bar{x}_3$ виконати операції склеювання неможливо.

Метод Квайна. 1 етап. Початкове скорочення формули. Приклад

Оскільки подальше склеювання неможливе, то етап початкового скорочення закінчений. Ми утворили ДНФ. Її доданками є елементарні кон'юнкції:

$$\bar{x}_1 x_3 x_4, \bar{x}_1 x_2 x_4, x_1 \bar{x}_2 x_4, \bar{x}_2 x_3 x_4, x_1 \bar{x}_3 x_4, x_2 \bar{x}_3.$$

Але на цьому процес скорочення формули за методом Квайна не закінчено. Ми скоротили ДДНФ до доданків рангом не більше за три.

Метод Квайна. 2 етап.

Розставлення міток.

На етапі розставлення міток складається таблиця, число рядків якої дорівнює числу отриманих кон'юнкцій функції.

Число стовпців співпадає з числом кон'юнкцій ДДНФ.

Якщо в деяку кон'юнкцію ДДНФ входить яка-небудь із кон'юнкцій отриманої ДНФ, то на перерізі відповідного стовпця й рядка ставиться мітка (див. таблицю 1.25).

Метод Квайна. 2 етап.

Розставлення міток. Приклад

Таблиця 1.25

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	✓			✓				
$\bar{x}_1 x_2 x_4$			✓	✓				
$x_1 \bar{x}_2 x_4$					✓	✓		
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	✓					✓		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$					✓			✓
$x_2 \bar{x}_3$		✓	✓				✓	✓

Метод Квайна. 3 етап.

Знаходження суттєвих доданків.

Якщо в якому-небудь із стовпців складеної таблиці існує тільки одна мітка, то добуток – кон'юнкція, що стоїть у відповідному рядку, називається суттєвою.

Це означає, що відповідна кон'юнкція ДДНФ поглинається тільки даною кон'юнкцією ДНФ.

Метод Квайна. 3 етап.

Знаходження суттєвих доданків.

Суттєва кон'юнкція не може бути вилучена з правої частини початкового рівняння, оскільки без неї не буде отримане покриття всієї множині доданків даної функції.

Тому з таблиці міток виключаються рядки, відповідні суттєвим кон'юнкціям, і стовпці кон'юнкцій ДДНФ, що покриваються цими суттєвими кон'юнкціями.

Всі суттєві кон'юнкції увійдуть в кінцеву скорочену ДНФ.

Метод Квайна. 3 етап.

Розставлення міток. Приклад

Для нашої функції суттєвою кон'юнкцією є: $x_2\bar{x}_3$. Вона покриває доданки ДДНФ $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$, $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $x_1x_2\bar{x}_3x_4$ (тобто поглинає їх). При переході до наступного етапу вони мають бути викреслені.

Таблиця 1.25 1

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$	✓			✓				
$\bar{x}_1x_2x_4$			✓	✓				
$x_1\bar{x}_2x_4$					✓	✓		
$\bar{x}_2x_3x_4$	✓					✓		
$x_1\bar{x}_3x_4$					✓			✓
$x_2\bar{x}_3$		✓	✓				✓	✓

Метод Квайна. 4 етап.

Викреслювання зайвих стовпців.

Досліджується таблиця, отримана після 3-го етапу. (у нашому прикладі таблиця 1.26) **Якщо в ній існують 2 стовпці, в яких існують мітки в однакових рядках, то один із них викреслюється.**

У даному прикладі однакових стовпців немає.

Таблиця 1.26

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	✓	✓		
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	✓			✓
$\bar{x}_1 x_2 x_4$		✓		
$x_1 \bar{x}_2 x_4$			✓	✓
$x_1 \bar{x}_3 x_4$			✓	

Метод Квайна. 5 етап. Викреслювання зайвих кон'юнкцій скороченої ДНФ.

Якщо після викидання деяких зайвих стовпців на 4-ому етапі в таблиці з'являються рядки, в яких немає жодної мітки, то дані кон'юнкції, відповідні цим рядкам, виключаються з подальших розглядів.

В нашому прикладі таких рядків немає.

Метод Квайна. 6 етап. Вибір мінімального покриття.

Досліджується отримана таблиця.

Вибирається така сукупність кон'юнкцій ДНФ, яка включає мітки у всіх стовпцях (принаймні одну мітку в кожному стовпці).

При декількох можливих варіантах такого вибору віддається перевага варіанту покриття з мінімальним сумарним числом літер у кон'юнкціях ДНФ.

Метод Квайна. 6 етап. Вибір мінімального покриття. Приклад

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	✓	✓		
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	✓			✓
$\bar{x}_1 x_2 x_4$		✓		
$x_1 \bar{x}_2 x_4$			✓	✓
$x_1 \bar{x}_3 x_4$			✓	

Вибираємо покриття з кон'юнкцій $\bar{x}_1 x_3 x_4$ і $x_1 \bar{x}_2 x_4$, оскільки вони спільно покривають всі ті терми, що залишилися після 4-го етапу. Додаємо суттєву кон'юнкцію $x_2 \bar{x}_3$.

Скорочена ДНФ для цієї функції має кінцевий вигляд:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_2 \bar{x}_3.$$

Питання, що були розглянуті

1. Логічні (булеві) функції.
2. Алгебра логіки.
3. Повні набори функцій
4. Канонічні форми булевих функцій.
5. Спрощення формул. Утворення скороченої ДНФ методом Квайна



Дякую за увагу!!!

ПИТАННЯ?