Теорема Бернулли. Предельные теоремы

Формула Бернулли

Пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появление события А, либо противоположное ему событие Ấ. Проведем n независимых испытаний.

Обозначим вероятность P(A) появление события А в единственном испытании буквой p, т.е. $P(A)=p$, а вероятность P(Ấ) – буквой q, т.е P(Ấ)=1-p=q.

Найдем вероятность $\mathbf{P_n(k)}$ наступления события А ровно k раз в n независимых испытаниях.

Обозначим: A_i - появление события А в i – м опыте

i=1, 2, 3, …n.

Для n=1

События	А	$\bar{A}$
Вероятность	p	q

$P_1(1)=p$, $P_1(0)=q$, $p + q = 1$

Для n=2

События	АА	А$\bar{A}$	$\bar{A}$А	$\bar{A}\bar{A}$
Вероятность	p*p	p*q	p*q	q*q

$P_2(2)=p*p$, $P_2(1)=q*p + p*q=2p*q$, $P_2(0)=q*q$,

$$p^2 +2p*q + q^2 = (p+q)^2 = 1$$

Для n=3,

События	AAA	$\bar{A}AA$	$A\bar{A}A$	$AA\bar{A}$	$\bar{A}\bar{A}A$	$\bar{A}A\bar{A}$	$A\bar{A}\bar{A}$	$\bar{A}\bar{A}\bar{A}$
Вероятность	p^3	p^2q	p^2q	p^2q	pq^2	pq^2	pq^2	q^3

$P_3(3)=p^3$, $P_3(2)=3p^2q$, $P_3(1)=3pq^2$, $P_3(0)=q^3$,

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$$

Анализируя эти случаи, можно сделать общий вывод: вероятность $\mathbf{P_n(k)}$ пропорциональна произведению $p^k q^{n-k}$, причем коэффициент пропорциональности равен C_n^k. т.е.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Формула Бернулли

Задача 1.

Вероятность изготовления на станке нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажется

а) четыре нестандартные

б) более четырех стандартных

Решение

а)

Дано:

n=6

k=4

p=0.02

q=0.98

Найти:

$P_6(4)$

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}02^4 \cdot 0{,}98^{6-4} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot 0{,}00000016 \cdot 0{,}9604 =$$
$$= 15 * 0{,}00000015 = 0{,}00000225$$

Ответ: $P_6(4) = 0{,}0000023$

б)

Дано:

n=6

p=0.98

q=0.02

k>4

Найти:

$P_6(k>4)$

$$P_6(k>4)=P_6(5)+P_6(6)=$$

$$=C_6^5\cdot 0{,}98^5\cdot 0{,}02^{6-5}+C_6^6\cdot 0{,}98^6\cdot 0{,}02^{6-6}=$$

$$=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot 0{,}904\cdot 0{,}02+\frac{6!}{6!\cdot 0!}\cdot 0{,}886\cdot 1=$$

=0,108+0,886=0,994

Ответ: $P_6(k>4)=0{,}994$

Локальная теорема Муавра- Лапласа

Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность **$P_n(k)$** того, что в n испытаниях событие А наступит k раз, приближенно равна (чем больше n, тем точнее) значению функции $y = \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}$, где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

План нахождения $P_n(k)$ по локальной теореме Муавра-Лапласа

1. Вычислить $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$
2. По приложению 2 найти $f(x)$
3. Вычислить $P_n(k) = \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}$

Свойства *f(x)*:

1. $f(-x)=f(x)$
2. $f(-\infty) = f(\infty) = 0$

Примеры:

.f(1)=f(1.00)=0.24197

.f(-2.05)=f(2.05)=0.04879

.f(0.52)=0.34849

.f(5.21)=0

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Функция плотности вероятности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20327	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02533	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

0

Задача 2

Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся стандартными.

Решение.

Дано	
n=400	1. Вычисляем $x = \frac{k-np}{\sqrt{nhq}} = \frac{356-400*0.9}{\sqrt{400*0.9*0.1}} = -0.67$
k=356	2. По приложению 2: *f(-0.67)=f(0.67)=0.3188*
p=0.9	3. Вычисляем $P_{400}(356) = \frac{0,3188}{\sqrt{400*0,9*0,1}} = 0,0531$
q=0.1	

$P_{400}(356)$

Ответ: $P_{400}(356) = 0,0531$

Интегральная теорема Муавра- Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимом испытании равна отлична от нуля и единицы, то для вероятности $\mathbf{P_n(k_1, k_2)}$ того, событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, справедливо следующее соотношение:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

План нахождения $P_n(k_1, k_2)$ по интегральной теореме Муавра-Лапласа

1. Вычислить $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$
2. По приложению 3 найти $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$
3. Вычислить $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Свойства *Ф(х)*:

1. *$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$*
2. *$\Phi(-\infty) = 0$*
3. *$\Phi(\infty) = 1$*

Примеры:

1. Φ(1)=Φ(1.00)=0.84134
2. Φ(-2.05)=1-Φ(2.05)= =1-0,97982=0,02018
3. Φ(5.21)=1

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Функция распределения нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995

Задача 3

Известно, что при контроле бракуется 10% изделий. На контроль отобрано 625 изделий. Какова вероятность того, что среди отобранных не менее 550 и не более 575 стандартных изделий?

Решение

Дано

n=625

k_1=550

k_2=575

p=0.9

q=0.1

1. Вычисляем $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{nhq}} = \frac{550-625*0.9}{\sqrt{625*0.9*0.1}} = -1.67$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{nhq}} = \frac{575-625*0.9}{\sqrt{625*0.9*0.1}} = 1.67$$

2. По приложению 3: $\Phi(1.67)=0.9525$

$\Phi(-1.67)=1 - \Phi(1.67)=1 - 0.9525=0,0475$

3. Вычисляем $P_{625}(550 \le k \le 575) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$

$=0.9525-0.0475=0.905$

$P_{625}(550 \le k \le 575)$

Ответ: $P_{625}(550 \le k \le 575) = 0.905$

Формула Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np=\lambda<10$, то вероятность $\mathbf{P_n(k)}$ того, что в n испытаниях событие A наступит k раз, приближенно равна $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,т.е.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Формула Пуассона

План нахождения $P_n(k)$ по формуле Пуассона

1. Вычислить $n \cdot p = \lambda$
2. По приложению 1 найти $P_n(k)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0133	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0009	0033	0090	0194	0347
16						0003	0014	0045	0109	0217
17						0001	0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
										0001

Задача 4

Устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течении 1 ч. работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 ч. работы устройства придется пять раз менять микросхему?

Решение

Дано

n=1000

k=5

p=0.004

$P_{1000}(5)$

1. Вычисляем $\lambda = 1000 * 0.004 = 4$
2. По приложению 1: $P_{1000}(5) = 0.1563$

Ответ: $P_{1000}(5) = 0.1563$

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0009	0033	0090	0194	0347
16						0003	0014	0045	0109	0217
						0001	0006	0021	0058	0128