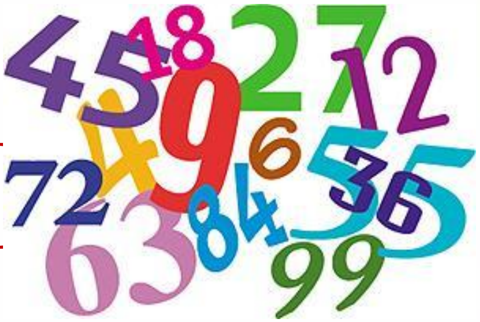
НАТУРАЛЬН



И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

Числа, используемые для счёта предметов называют <u>натуральными</u>:

$$1;\ 2;\ 3;\ \ldots \in N$$

Натуральные числа можно складывать и умножать – в результате получится натуральное число:

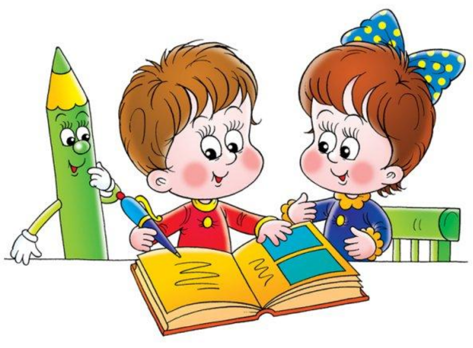
$$5 + 7 \in N$$

$$2 \cdot 6 \in N$$

Операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел выполнимы не всегда:

$$5 - 7 \in N \ -?$$

$$2 : 6 \in N \ -?$$



Более широкий класс чисел составляют *целые числа*. К ним относят натуральные числа, число 0 и числа $-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$. Над целыми числами выполнимы операции сложения, умножения и вычитания.

Натуральные числа называют также *целыми положительными числами*, а если к множеству натуральных чисел добавить число 0, то получим *множество неотрицательных целых чисел*.

…; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; … є Z

Делимость натуральных чисел.

Определение 1. Пусть даны два натуральных числа — a и b. Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что **число a делится на число b**. При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, q — *частным*. Число a называют также *кратным числа* b.

Вместо фразы «a делится на b» часто используют запись $a \,\vdots\, b$.

Делимость натуральных чисел.

<u>Свойство 1.</u>

Если $a \vdots c$ *и* $c \vdots b$, *то* $a \vdots b$.

Например, из того, что $48 \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $48 \vdots 3$.

<u>Свойство 2.</u>

Если $a \vdots b$ *и* $c \vdots b$, *то* $(a + c) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) \vdots 3$.

Делимость натуральных чисел.

Свойство 3.

Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $(a + c)$ не делится на b.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что $(12 + 22)$ не делится на 3. В то же время из того, что *каждое слагаемое* не делится *на b*, нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b. Например, 14 не делится на 3, 22 не делится на 3, но $(14 + 22) \vdots 3$.

Свойство 4.

Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$ можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

Делимость натуральных чисел.

Свойство 5.

Если $a \vdots b_1$ *и* $c \vdots b_2$, *то* $ac \vdots b_1 b_2$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $28 \vdots 7$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 28) \vdots (3 \cdot 7)$.

Свойство 6.

Если $a \vdots b$ *и* c *— любое натуральное число, то* $ac \vdots bc$; *если* $ac \vdots bc$, то $a \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$ и обратно.

Делимость натуральных чисел.

Свойство 7.

Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, т $ac \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots 3$.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что $ac \vdots b$, нельзя сделать вывод, что или a, или c делится на b. Например, $45 \vdots 15$ и $45 = 9 \cdot 5$, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

Свойство 8.

Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(25 \cdot 12 + 271 \cdot 21) \vdots 3$.

Делимость натуральных чисел.

Свойство 9.

Среди n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.

Признаки делимости.

Признак делимости на 2. *Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.*

Признак делимости на 5. *Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т. е. цифра единиц либо 0, либо 5).*

Признак делимости на 10. *Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.*

Признак делимости на 4. *Для того чтобы натуральное число р, содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа р.*

Признаки делимости.

Признак делимости на 25. *Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p.*

Признак делимости на 8. *Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа p.*

Признак делимости на 125. *Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p.*

Признаки делимости.

<u>**Признак делимости на 3.**</u> *Для того чтобы натуральное число p делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.*

<u>**Признак делимости на 9.**</u> *Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.*

<u>**Признак делимости на 11.**</u> *Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечетных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на четных местах, делилась на 11.*

Например, для числа 24 569 алгебраическая сумма, о которой идет речь в формулировке признака, имеет вид $9 - 6 + 5 - 4 + 2$, она равна 6; поскольку число 6 не делится на 11, то и число 24 569 не делится на 11.

Не выполняя деления, докажите, что число 86849796 делится на 11.

Признаки делимости.

Признак делимости на 7 (на 13). *Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для четных граней, делилась на 7 (на 13).*

Пример 4. Не выполняя деления, доказать, что число 254 390 815 делится на 7 и не делится на 13.

Решение. Разобьем число на грани 254, 390, 815. Составим алгебраическую сумму граней, начиная с последней грани и чередуя знаки «+» и «−»: $815 - 390 + 254 = 679$. Число 679 делится на 7 и не делится на 13, значит, и заданное число делится на 7 и не делится на 13. ■

ОПРЕДЕЛИТЕ, НА КАКИЕ ИЗ ЧИСЕЛ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 18, 20 ДЕЛИТСЯ ЧИСЛО

562320

Сравнение

Если целые числа *a* и *b* при делении на натуральное число m дают равные остатки, то говорят, что эти числа *сравнимы по модулю m, и пишут* $a \equiv b \pmod{m}$

Таким образом, запись $a \equiv b \pmod{m}$ *означает, что разность* $a - b$ *делится на* m

В качестве остатков при делении натуральных чисел могут рассматриваться не только положительные, но и отрицательные остатки. 36:10=3 (ост.6) или 36:10=4 (ост. – 4)

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СРАВНЕНИЙ

Свойство 1.

Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$

Свойство 2.

Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$, $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$,

т.е. сравнения по одному модулю можно складывать, вычитать и перемножать.

Свойство 3.

Если $ak \equiv bk \pmod{m}$ $m \neq 1$, а числа k и m взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{m}$, т.е. обе части сравнения можно сокращать на общий множитель, если он и модуль m – взаимно простые числа

Задача 1. Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \bullet 73^{16}$, где $m = 10$;

2) $a = 64^{25} + 48^{17}$, $m = 7$;

3) $a = (38 \bullet 53)^{20} + (27 \bullet 64)^{15}$, $m = 13$;

4) $a = 2 \bullet 5^{21} + 3^{12} \bullet 2^{10}$, $m = 19$

Задача 1. Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a = 96^{19} + 32^{13} - 8 \bullet 73^{16}$, где $m = 10$;

2) $a = 64^{25} + 48^{17}$, $m = 7$;

3) $a = (38 \bullet 53)^{20} + (27 \bullet 64)^{15}$, $m = 13$;

4) $a = 2 \bullet 5^{21} + 3^{12} \bullet 2^{10}$, $m = 19$

1. Докажите, что число 257 + 572 делится на 11.
2. Найдите остаток от деления числа 2929 + 169169 + 3131 + 88 на 30.
3. Решите уравнение в целых числах: $7n + 5m = 1$.

Домашнее задание:

1. Найти остаток от деления 728362 на 4, не выполняя деления.
2. Найти последнюю цифру числа $9^{63}+2^{39}$.
3. Доказать, что число $2^{36}+4^{16}$ делится на 17.
4. Натуральные числа $6n+5$ и $7n+5$ делятся на натуральное число $m\neq 1$. Найти m.
5. Доказать, что уравнение $36x+45y=11$ не имеет целочисленных решений.
6. Доказать, что число $a=(x-y)^2(x+y+1)^2$ делится на 4 при любых целых x и y.

СПАСИБО ЗА УРОК!