ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Линейные функционалы

Определение линейного функционала

- **Определение 1.** Пусть L – линейное нормированное пространство. Отображение f, действующее из L в R, называется ***функционалом***.
- **Определение 2.** Функционал называется ***линейным***, если для всех l_1, l_2 из L

  а) $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$, ддитивность)

  б) $f(\lambda l) = \lambda f(l)$. (однородность)

Определение линейного функционала

- **Определение 3.** ***Ядром*** функционала f называется множество всех элементов x из L, которые оператор вереводит в число 0

$$ker f = \{x \in L : f(x) = 0\}$$

- **Определение 4.** Функционал f называется ***непрерывным*** в точке x_0 из L, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in L)$$

$$[\|x - x_0\|_L < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Линейный функционал

- **Предложение 1.** Функционал f является ***непрерывным*** в точке x_0 из L, если для любой последовательности $\{x_n\}$, схолящейся к x_0, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$

- **Определение 5.** Функционал f называется ***непрерывным*** на L, если он непрерывен в каждой точке пространства L.

Свойства линейных непрерывных функционалов

- **Предложение 2.** Если линейный функционал непрерывен в какой-либо одной точке $x_0 \in L$, то он непрерывен на L.

- **Предложение 3.** Если линейный функционал задан на конечномерном пространстве, то он непрерывен на L.

- **Предложение 4.** Пусть f – линейный функционал. Если,

$$|f(x)| \leq c\|x\|,$$

то f – непрерывный функционал.

Примеры

- **Пример 1.** Доказать, что функционал f, заданный на $C[-2, 2]$ и определяемый формулой

$$f(x) = x(2) + \int_{-2}^{2} t x(t) dt,$$

является непрерывным.

Пример 1

Решение.

1) Легко проверить (используя свойства интеграла), что это линейный функционал на L=$C[-2, 2]$.
2) Покажем, что функционал является непрерывным. Учитывая свойство линейного функционала (Предложение 2), достаточно проверить непрерывность в нуле.

Выберем любую последовательность $\{x_n\}$, такую, что, $\|x_n\|_L \to$o. Так как f(o) = o, то нам нужно доказать, что f(x_n) → o.

$$|f(x_n)| \le |x_n(2)| + \int_{-2}^{2} |t||x_n(t)|dt \le \|x_n\|_{C[-2,2]} + \left(\int_{-2}^{2} |t|dt\right) \|x_n\|_{C[-2,2]}.$$

Пример 1

В первом переходе использовали неравенство треугольника для чисел и свойство интеграла:

$$\left|\int_a^b g(x)dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|dx.$$

Во втором переходе учли определение нормы в пространстве *C*[*a*, *b*], из которого следует, что для любого *t* из отрезка [*a*, *b*],

$$|x(t)| \leq \|x\|_{C[a,b]}$$

Пример 1

- .

Вычислим интеграл и получим неравенство

$$|f(x_n)| \le 5\|x_n\|_{C[-2,2]}.$$

Так как

$$\|x_n\|_{C[-2,2]} \to 0, \text{ то } f(x_n) \to 0.$$

Мы доказали непрерывность функционала f.

.

Пример 2

Пример 2. Функционал *f* задан на l_3 и определяется формулой

$$f(x) = x_1 - 4x_2.$$

Доказать, что это непрерывный функционал.

Решение. Линейность функционала очевидна (проверить).
Докажем неравенство

$$|f(x)| \leq c\|x\|_{l_3}$$

Согласно неравенству Гельдера для p и q удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\ p, q \geq 1.$$

имеем:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пример 2

Возьмем

$$p = 3, q = \frac{3}{2},$$

$$a_1 = x_1, a_2 = x_2, b_1 = 1, b_2 = -4,$$

$$a_i = b_i = 0, i \geq 3,$$

В результате получим:

$$|f(x)| = |x_1 - 4x_2| \leq$$

$$\leq \left(|1|^{\frac{3}{2}} + |-4|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(|x_1|^3 + |x_2|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leq 9^{\frac{2}{3}} \|x\|_{l_3}.$$

Пример 3

Приведем пример линейного функционала, который не является непрерывным

Рассмотрим функционал $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$

заданный на подмножестве пространства *l*2, в которое входят такие последовательности, что .

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty.$$

Функционал *f* является линейным (док-ть).

Выберем последовательность

$$x^{(n)} = (\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0...).$$

Пример 3

Нетрудно проверить, что для

$$x^* = (0, 0, \ldots)$$

$$\|x^{(n)} - x^*\|_{l_2} = \sqrt{n^{-1}},$$

С другой стороны, $f(x^{(n)}) = 1 \nrightarrow 0.$

Свойства линейных непрерывных функционалов

- Если функционал задан на бесконечномерном пространстве, то из линейности функционала не всегда следует его непрерывность (пример 3).
- Чтобы это свойство выполнялось, на функционал нужно наложить дополнительные ограничения.
- **Определение 6.** Линейный функционал f заданный на нормированном пространстве L называется ***ограниченным***, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in L$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq c\|x\|_L$

Если указанной постоянной не существует, то f называется неограниченным функционалом.

Есть тесная связь между ограниченностью и непрерывностью функционала

Свойства линейных непрерывных функционалов

Есть тесная связь между ограниченностью и непрерывностью функционала

- **Предложение 5.** В нормированном пространстве линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
- **Предложение 6.** Функционал

$$f(x) = x'(0)$$

заданный на множестве дифференцируемых функций пространства $C[-1,1]$ является линейным и неограниченным

Свойства линейных непрерывных функционалов

- **Предложение 7.**

Пусть f_1, f_2 – линейные функционалы, заданные на L.

Если $\ker f_1 = \ker f_2$, *то* $f_1 = \lambda f_2$ *для некоторого числа* λ.

- **Предложение 8.** Линейный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве, непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.
- **Предложение 9.** Линейный функционал f, определенный на линейном нормированном пространстве *L*, непрерывен тогда и только тогда, когда множества

$$\{x \in L : f(x) < c\} \text{ и } \{x \in L : f(x) > c\}$$

- Открыты в L.

Преобразование Фурье

- **Определение.** Функцию f : R → R будем называть кусочно-гладкой, если она является кусочно-гладкой на любом конечном промежутке [a, b], т. е. если в [a, b] найдется конечное число точек

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

таких, что в каждом открытом промежутке

функция f(x) непрерывно дифференцируема, (x_j, x_{j+1}) й точке x_j у функции f существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_j - 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h \to +0} f(x_j + h),$$

а также существуют и конечны следующие пределы, похожие на левую и правую производные:

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}.$$

Преобразование Фурье

- Преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции f(x) новую функцию

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dy,$$

называется прямым преобразованием Фурье и обозначается через F_+.

При этом функция

$$\widehat{f} = F_+[f]$$

называется прямым преобразованием Фурье функции f.

Преобразование Фурье

- Преобразование, сопоставляющее кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции f(x) новую функцию

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dy,$$

называется обратным преобразованием Фурье и обозначается через F_{-}. При этом функция

$$\check{f} = F_{-}[f]$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f.

Свойства преобразования Фурье

Функция	Преобразование Фурье
Формула обращения	
$f(x)$	$F_+[F_-[f(x)]] = f(x)$
$f(x)$	$F_-[F_+[f(x)]] = f(x)$
Связь между прямым и обратным преобразованиями Фурье	
$f(x)$	$F_-[f(x)](y) = F_+[f(x)](-y)$
$f(x)$	$F_+[f(x)](y) = F_-[f(x)](-y)$

Свойства преобразования Фурье

Линейность	
$af(x) + bg(x)$	$aF_{\pm}[f(x)](y) + bF_{\pm}[g(x)](y)$
Запаздывание (сдвиг)	
$f(x - x_0)$	$e^{\mp iay}F_{\pm}[f(x)](y)$

Свойства преобразования Фурье

Функция	Преобразование Фурье
Частотный сдвиг	
$e^{iax}f(x)$	$F_{\pm}[f(x)](y-a)$
$f(x)\cos ax$	$\frac{1}{2}(F_{\pm}[f(x)](y-a)+F_{\pm}[f(x)](y+a))$
$f(x)\sin ax$	$\frac{1}{2i}(F_{\pm}[f(x)](y-a)-F_{\pm}[f(x)](y+a))$
Подобие (изменение масштаба)	
$f(ax)$	$\lvert a\rvert^{-1}F_{\pm}[f(x)]\left(\frac{y}{a}\right)$

Свойства преобразования Фурье

Замена переменной	
$f(Ax+b)$	$\lvert det\, A\rvert^{-1} e^{\pm(y, A^{-1}b)} F_{\pm}[f(x)]((A^{-1})^{*}y)$
Свойство преобразования Фурье от n-ой производной	
$\dfrac{d^n f}{dx^n}$	$(\pm iy)^n F_{\pm}[f(x)](y)$

Свойства преобразования Фурье

Функция	Преобразование Фурье
Дифференцирование преобразования Фурье	
$x^n f(x)$	$(\pm i)^n D^n(F_\pm[f(x)](y)$
Теорема о свертке $(f,\ g \in S(\mathbb{R}^n))$	
$f * g$	$(2\pi)^{n/2} F_\pm[f] \cdot F_\pm[g]$
$f \cdot g$	$(2\pi)^{-n/2} F_\pm[f] * F_\pm[g]$

Свойства преобразования Фурье

Равенство Парсеваля $(f,\ g \in S(\mathbb{R}^n))$	
$f,\ g$	$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}\,dx$
Формула Пуассона $(f \in S(\mathbb{R}))$	
f	$\sqrt{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$

Уравнения математической физики

Обобщенные функции

Обобщенные функции

о

Необходимость во введении понятий, называемых обобщенными функциями, возникла при попытке дать строгое описание сосредоточенных (в точке, на поверхности, т.д.) объектов, которые являются удобными физическими идеализациями. С другой стороны, обобщенные функции позволяют также с единой точки зрения рассматривать производные гладких и разрывных функций, преобразование Фурье убывающих и растущих функций и др., т.е. в них имеется и чисто математическая потребность. По своим свойствам обобщенные функции мало похожи на “обычные” функции, поэтому за ними закрепился также термин “распределения” (distributions).

Пространство основных функций

- **Определение 1.1.** Функцию $\varphi(x)$ называют основной (пробной), если

 1) $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема $\varphi \in C^{\infty}(-\infty, \infty)$

 2) финита, т.е. $\varphi(x) \equiv 0$ вне некоторого интервала $[\, a, b\,]$,

Множество таких функций K назовем основным пространством.

Совокупность всех точек, в которых основная функция $\varphi(x) \neq 0$, называется ее носителем $\operatorname{supp} \varphi(x)$

Пространство основных функций

- Пример

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \exp -\frac{a^2}{a^2 - x^2}, & |x| < a \end{cases}$$

проверьте в ее непрерывную дифференцируемость

Пространство основных функций

Предложение 1. 1

K является линейным пространством;

$$\phi \in \mathcal{K} \Rightarrow \phi^{(l)} \in \mathcal{K} \ \forall\ l;$$

$$\phi \in \mathcal{K} \Rightarrow h(x)\phi \in \mathcal{K} \ \forall\ h(x) \in C^{\infty}$$

где *h(x)* не обязательно финитная.

Пространство основных функций

Определение 1.2. Последовательность функций $\phi_n(x)$ называется сходящейся в *K*,

$$\phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{K} \phi(x),$$

если

1) существует конечный интервал, содержащий носители всех функций $\phi_n(x)$,

2) на указанном интервале $\phi_n^{(l)}(x) \rightrightarrows \phi^{(l)}(x) \ \forall \ l.$

При этом предельная функция лежит в *K*.

Примеры

- Последовательность

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \frac{1}{n} \exp - \frac{a^2}{a^2 - x^2}, & |x| < a \end{cases}$$

стремится к нулю

- Последовательность

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant n \\ \frac{1}{n} \exp - \frac{n^2}{n^2 - x^2}, & |x| < n \end{cases}$$

не имеет предела в *K*.

Обобщенные функции над K

- **Определение 1.3.** ***Обобщенной функцией*** над $\mathcal{K}$ называется линейный непрерывный функционал, заданный на $\mathcal{K}$.

Число, сопоставляемое основной функции $\varphi(x)$ функционалом f, обозначается как (f, φ).

- **Определение 1.4.** ***Нулевой обобщенной функцией*** над $\mathcal{K}$ называется линейный непрерывный функционал, равный нулю для любой основной функции из $\mathcal{K}$.
- Две обобщенные функции f_1 и f_2 равны, если для каждой основной функции из $\mathcal{K}$ значения соответствующих функционалов $(f_1.\varphi) = (f_2, \varphi)$ равны.

Обобщенные функции над K

- **Определение 1.5.** Функция $g(x)$ называется ***локально-суммируемой***, если ее модуль интегрируем на любом конечном промежутке $[a, b]$, функция непрерывна, либо имеет разрывы первого рода или слабые степенные: $((x - x_0)^{\alpha},\ \alpha < 1)$

- **Определение 1.6.** ***Регулярной обобщенной функцией*** над $\mathcal{K}$ называется линейный непрерывный функционал, порожденный функцией $g(x)$ по формуле

$$(g, \varphi) = \int g(x) \cdot \varphi(x) dx$$

Обобщенные функции над *K*

- Сходимость интеграла обеспечивается на любом конечном интервале за счет предположений на функцию $g(x)$, а на бесконечности - за счет финитности пробных функций.

- Линейность и непрерывность выше определенного функционала легко проверяются.

Обобщенные функции над *K*. Примеры

Пример 1.2. Классическая функция Хэвисайда (функция единичного скачка) определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

и порождает функционал

$$(\theta, \phi) = \int\limits_0^\infty \phi(x)dx$$

Обобщенные функции над K

- Пространство обобщенных функций (K') не пусто и по крайней мере содержит регулярные обобщенные функции, которые, на первый взгляд, естественным образом отождествляются с обычными (локально-суммируемыми) функциями.

  Однако это отождествление не полное: две функции $g_1(x)$и $g_2(x)$, отличающиеся своими значениями хотя бы в одной точке, в обычном смысле считаются различными. Однако они порождают одну и ту же обобщенную функцию, поскольку изменение подинтегрального выражения в одной точке не изменяет величины интеграла (в примере 1,2 для функции Хэвисайда не важно, какое значение приписывается функции $\theta(x)$ в нуле)

Обобщенные функции над *K*

- Регулярная обобщенная функция соответствует множеству локально-суммируемых функций, отличающихся на счетном множестве точек.
- Принципиальное отличие понятия обобщенной функции от классического понимания функции: мы не можем говорить о значениях обобщенной функции в точках.
- Однако мы будем использовать обозначение $f(x)$ для обобщенной функции, смысл которого прояснится позже.

Обобщенные функции над *K*

- **Упражнение 1.**

  Докажите, что если регулярные функции $f_1, f_2 \in \mathcal{K}'$, порождаемые непрерывными функциями $f_1(x),\ f_2(x)$, совпадают, то стандартные функции равны

$$f_1(x) \equiv f_2(x).$$

- Пространство $\mathcal{K}'$ не исчерпывается регулярными обобщенными функциями.

  Важный пример — δ-функция Дирака.

Обобщенные функции над K

- **Определение 1.6.** $\boldsymbol{\delta}$ – функцией называется функционал, определяемый равенством

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

- (докажите его линейность и непрерывность)

- **Предложение 1.2.** $\boldsymbol{\delta}$ – функция не является регулярной обобщенной функцией

Обобщенные функции над *K*

- Предположим, что

$\exists\ g(x)$ такая, что $\forall\ \phi \in \mathcal{K}\ \phi(0) = (\delta, \phi) = \int g(x)\phi(x)dx.$

Выберем функцию $\phi_\varepsilon(x)$, которая получается из функции

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \exp -\frac{a^2}{a^2 - x^2}, & |x| < a \end{cases}$$

при $a = \varepsilon$ Тогда

$$e^{-1} = (\delta, \phi_\varepsilon) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) g(x)dx\,.$$

Правая часть по модулю не превосходит $\leqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(x)|dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$

а левая часть не зависит от ε, и не равна нулю.

Обобщенные функции над *K*

- **Определение 1.7.** Линейные непрерывные функционалы, не являющиеся регулярными обобщенными функциями, называются сингулярными обобщенными функциями.

Операции над обобщенными функциями

Показывается какое-либо равенство для регулярных обобщенных функций.

Затем принимается это равенство по определению для всех обобщенных функций.

Подобного рода наводящие соображения лежат в основе всех дальнейших определений операций над обобщенными функциями.

Операции над обобщенными функциями

- 1) Сложение

$$(f_1 + f_2, \phi) := (f_1, \phi) + (f_2, \phi);$$

- 2) Умножение на число

$$(\gamma f, \phi) := (f, \gamma\phi)$$

То есть, пространство $\mathcal{K}'$ является линейным

- 3) $\forall\ h(x) \in C^\infty\ (hf, \phi) := (f, h\phi)$

$$(hf, \phi) = \int (h(x)f(x))\,\phi(x)dx = \int f(x)\,(h(x)\phi(x))\,dx = (f, h\phi).$$

Операции над обобщенными функциями

- **Пример.**

$$(h\delta, \phi) = (\delta, h\phi) = h(0)\phi(0),$$

то есть

$$h\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} h(0)\delta.$$

В частности,

$$x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} 0; \quad e^x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} \cos x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} \delta.$$

Замечание 1.2. Не удается разумным образом определить произведение обобщенной функции на разрывную и, тем более, произведение обобщенных функций.

О возникающих трудностях дает представление следующий пример: ясно, что для любого n следует считать равными

$$\theta^n \text{ и } \theta;$$

но для такого произведения не могут выполняться обычные правила дифференцирования.

Операции над обобщенными функциями

- 4) производная ОФ: $(f', \phi) := (f, -\phi')$

- Восстановите наводящее соображение, приводящее к этому определению
- Докажите линейность и непрерывность функционала f'

- 5) Обобщенная функция имеет производную любого порядка, причем

$$(f^{(m)}, \phi) = (f, (-1)^m \phi^{(m)})$$

- **Пример:** $(\delta', \phi) = (\delta, -\phi') = -\phi'(0)$

Операции над обобщенными функциями

Свойства производной

- Производная суммы (разности)
- Вынос константы
- Производная произведения $(hf)' = hf' + h'f$

- **Пример:** $\theta' = \delta$

$$(\theta', \phi) = (\theta, -\phi') = \int_0^\infty (-\phi')dx = -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) = (\delta, \phi)$$

Теорема Л. Шварца

- Пусть $g(x)$ – классическая функция

$$g_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ g(x), & x > 0 \end{cases}$$

Значение в нуле не играет роли.

Теорема Шварца. Любая обобщенная функция из $\mathcal{K}'$ является обобщенной производной (какого-то порядка) от некоторой регулярной обобщенной функции, порождаемой непрерывной функцией.

Операции над обобщенными функциями

- **Предложение 1.3**. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме $x = 0$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв первого рода. Тогда обобщенная производная этой функции равна

$$\bar{f}' = \overline{f'(x)} + [f]_{x=0}\,\delta,$$

где $f'(x)$ классическая производная (определена всюду кроме $x = 0$);

$[f]_{x=0} = \lim\limits_{x\to+0} f(x) - \lim\limits_{x\to-0} f(x)$ - величина скачка в

точке $x = 0$.

Замена переменной обобщенной функции

- Говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках бессмысленно.

Однако, мы будем для обобщенной функции использовать обозначение $f(x)$ (вместо f) с тем, чтобы отличать обобщенную функцию f от другой обобщенной функции $f(t(x))$, которую мы введем следующим образом:

- **Определение 1.8.** Пусть $y = t(x) \in C^\infty$ — строго монотонная функция, т.е. существует обратная к ней: $x = \tau(y)$. Тогда под $f(t(x))$ понимается функционал, действующий по правилу:

$$(f(t(x)), \phi(x)) := \left(f(x), \frac{\phi(\tau(x))}{|t'(\tau(x))|}\right)$$

(данное определение также легко “оправдать” стандартными наводящими соображениями с использованием регулярных обобщенных функций).

Замена переменной обобщенной функции

В частности, при линейной замене переменной,

$$(f(ax+b),\phi) := \frac{1}{|a|}\left(f(x),\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right).$$

- **Пример 1.5.**

1) $(\delta(x-x_0),\phi) = \phi(x_0);$

2) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(в частности, $\delta(-x) = \delta(x)$).

Замена переменной обобщенной функции

- Предложение 1.3 можно обобщить, считая, что функция имеет конечное или счетное число разрывов первого рода в точках x_k. Вклад каждого из этих разрывов в обобщенную производную составит

$$[f(x)]_{x=x_k}\,\delta(x-x_k)$$

- **Пример.** Пусть $[x]$ означает целую часть числа x. Обобщенная производная этой функции есть

$$[x]' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

Сходимость в пространстве обобщенных функций

Определение 2.1. Последовательность обобщенных функций $f_n \in \mathcal{K}'$ сходится, если $\exists f \in \mathcal{K}'$ такая, что $\forall\ \varphi \in K$

$$(f_n, \phi) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \phi)$$

пишем

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{K}'} f$$

Такую сходимость назы ой”.

Ряд (слайд 52)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

сходится, если

$$\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), \phi\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) = \sum_{n=-N}^{N} \phi(n),$$

где

$$[-N, N] \supset \operatorname{supp} \phi$$

Сходимость в пространстве обобщенных функций

Определение 2.2. Последовательность функций называется δ-образной, если она сходится к δ-функции.

Упражнение. Докажите, что последовательность функций

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad x > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < x < \varepsilon \end{cases}$$

является δ-образной

Пример δ-образной последовательности: рассмотрим последовательность (гладких) функций

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$$

Докажем, что $(g_\varepsilon, \phi) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \phi(0)$, *т.е.* $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{K}'} \delta$

Сходимость в пространстве обобщенных функций

$$(g_\varepsilon, \phi) = \int g_\varepsilon(x)\phi(x)dx = \int g_\varepsilon(x)\left[\phi(x) - \phi(0)\right]dx + \phi(0)\int g_\varepsilon(x)dx$$

Последний интеграл справа равен единице. Достаточно сделать замену переменной $t = {}^{x}/_{\sqrt{\varepsilon}}$.

Покажем, что первый интеграл справа стремится к нулю при ε стремящейся к нулю. Заметим, что

$$\forall\ a > 0\ \text{и}\ 0 < \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\int_{a\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} - \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{O}\left(e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}}\right)$$

Сходимость в пространстве обобщенных функций

- Поэтому,

$$\left|\int \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) [\phi(\sqrt{\varepsilon}x) - \phi(0)]\, dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{-a\varepsilon^{-\delta}} + \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{a\varepsilon^{-\delta}} + \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const O}\left(e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}}\right) + \max_{[-a\varepsilon^{-\delta}, a\varepsilon^{-\delta}]} |\phi(\sqrt{\varepsilon}x) - \phi(0)|$$

где через const обозначены оценки $|\varphi(\sqrt{\varepsilon}x) - \varphi(0)|$ на полубесконечных интервалах. В силу непрерывности $\varphi(x)$ и с учетом $\delta < 1/2$ последнее слагаемое в этой оценке стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Сходимость в пространстве обобщенных функций

- **Замечание.** В обоих приведенных выше примерах δ-образной последовательности важным обстоятельством является единичная площадь под графиком функций $g_\varepsilon(x)$

Предложение 2.1. Сходящиеся последовательности (и ряды) из обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз.

Формула суммирования Пуассона

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле $f(x) = x/2\pi$ и продолженную за пределы этого отрезка с периодом 2π.

Как и всякая периодическая функция, она раскладывается в ряд Фурье (который, как известно, сходится к самой функции в точках непрерывности и к серединным значениям

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi} e^{-ikx}\,dx = \begin{cases} \frac{i}{2\pi k}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

Функция $f(x)$ локально-суммируема; соответствующую ей регулярную обобщенную функцию можно дифференцировать, и при этом применить почленное дифференцирование ряда Фурье.

Формула суммирования Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}-\sum_{k}\delta(x-2\pi k)=f'(x)=-\sum_{k\neq 0}\frac{1}{2\pi}e^{ikx}$$

Получаем один из вариантов формулы суммирования Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k}e^{ikx}=\sum_{k}\delta(x-2\pi k)$$

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Несмотря на то, что о значениях обобщенных функций в точках говорить бессмысленно, можно ввести понятие носителя обобщенной функции (т.е. множества точек, на которых она отлична от нуля) и, как следствие, можно сравнивать обобщенные функции на интервалах.

Определение 2.3. Обобщенная функция f называется равной нулю на интервале (a, b), если $(f, \varphi) = 0$ для всех основных функций φ, обращающихся в ноль **вне** интервала (a, b).

Обозначение: $f|_{(a,b)} = 0$ $\quad f|_I = 0$

Вместо интервала может быть произвольное множество I.

Определение 2.4. Две обобщенные функции совпадают на интервале (множестве I), если их разность равна нулю на этом интервале (множестве I).

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 2.5. Носителем обобщенной функции называется

$$\operatorname{supp} f := \mathbb{R} \setminus \bigcup \left\{ (a,b) : \ f|_{(a,b)} = 0 \right\}$$

Определение обобщенного носителя совпадает с классическим носителем регулярных обобщенных функций

Определение 2.6. Обобщенная функция называется финитной, если существует конечный интервал, содержащий внутри себя ее носитель.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

- **Предложение 2.2**. $\mathrm{supp}\,\delta(x) = \{0\}$

Для любой основной функции $\varphi(x)$, равной нулю в точке $x = 0$, получим: $(\delta(x), \varphi) = \varphi(0) = 0$. Поэтому

$$\delta(x)|_{\{x \neq 0\}} = 0$$

Можно сказать, что δ – функция сосредоточена в точке $x = 0$

Свойства носителя обобщенной функции

1) $\forall\ h(x) \in C^\infty \quad \operatorname{supp} h(x) f(x) \subseteq \operatorname{supp} f(x)$, причем

$h(x)|_I = 0 \Rightarrow \ h(x)f(x)|_I = 0$

2) $\operatorname{supp} f'(x) \subseteq \operatorname{supp} f(x)$

т.е. можно говорить об обобщенном дифференцировании как о локальной операции).

В частности, $\operatorname{supp}\ \delta^n = \{0\}$. Более того любая обобщенная функция, сосредоточенная в нуле (любой точке), представляется в виде линейной комбинации δ-функции и её производных.

Обобщенные решения уравнения

$$x^m f(x) = 0$$

Под обобщенным решением уравнения понимается такой функционал f, который анулирует действие левой части уравнения на любую основную функцию.

Предложение 2.3. Обобщенным решением уравнения

$$xf(x) = 0$$

является

$$f(x) = C\delta(x),$$

где C — произвольная постоянная.

Обобщенные решения уравнения

- Зафиксируем произвольную пробную функцию $\varphi_0(x)$, удовлетворяющую дополнительному условию $\varphi_0(0) = 1$, и составим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{x}\left[\phi(x) - \phi(0)\phi_0(x)\right] \ ,$$

где φ(x) — произвольная основная функция.

Проверим, что $\psi(x) \in K$. Действительно, финитность ψ вытекает из финитности φ, а существование производных — из возможности переписать $\psi(x)$ в виде интеграла

$$\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left[\phi'(t) - \phi(0)\phi_0'(t)\right] dt = \int_0^1 \left[\phi'(xt) - \phi(0)\phi_0'(xt)\right] dt$$

который, очевидно, можно дифференцировать по x любое число раз.

Обобщенные решения уравнения

- С помощью функции ψ действие функционала f, удовлетворяющего уравнению

$$xf(x) = 0,$$

на произвольную пробную φ, записывается как:

$$(f, \phi) = (f, x\psi + \phi(0)\phi_0) = (xf, \psi) + \phi(0)(f, \phi_0) = C(\delta, \phi)$$

где $C = (f, \phi_0)$,

$\varphi_0(x)$ выбрана произвольно,

$\psi \in K$ и $(xf, \psi) = 0$.

Таким образом,

$$f(x) = C\delta(x)$$

Обобщенные решения уравнения

- **Предложение 2.4.** Общим решением уравнения

$$xf(x) = g(x)$$

является

$$f(x) = f_0(x) + C\delta(x),$$

где $f_0(x)$ — какое-либо частное решение этого уравнения

Разность $f - f_0$ удовлетворяет уравнению

$$x(f - f_0) = 0$$

и поэтому равна $C\delta(x)$

Следствие. Обобщенным решением уравнения

$$x^2 f(x) = 0$$

является $C_1\delta(x) + C_2\delta'(x)$.

Обобщенные решения уравнения

- По доказанному ранее

$$xf(x) = C\delta(x).$$

Частное решение последнего уравнения легко угадать:

$$(x\delta', \phi) = (-\delta, x\phi' + \phi) = -\phi(0) = (-\delta, \phi)$$

Используя предложение 2.4. после переобозначения произвольных постоянных получаем искомую формулу.

Упражнение. Докажите (по индукции), что обобщенным решением уравнения

$$x^m f(x) = 0$$

Является

$$f(x) = C_0\delta(x) + \cdots + C_{m-1}\delta^{(m-1)}(x)$$

Обобщенные решения уравнения

Пример. Уравнение

$$x^3(x-1)^2y(x) = 0$$

имеет общее решение

$$A_0\delta(x) + A_1\delta'(x) + \quad A_2\delta''(x) + B_0\delta(x-1) + B_1\delta'(x-1)$$

Степенные особенности

- **Регуляризация степенных особенностей**

Определение 2.7. Регуляризацией функции $f(x)$, имеющей неинтегрируемую особенность вида

$$\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$$

называется функционал (f, φ), который для основных функций $\varphi(x)$, равных нулю в окрестности точки x_0, выражается интегралом

$$\int f(x)\phi(x)dx .$$

Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

Какой функционал отвечает классической функции $1/x$?

Интеграл

$$\int \frac{\phi(x)}{x}dx$$

не имеет смысла из-за расходимости в нуле. Смысл имеют, например, такие (но не только!) интегралы:

$$\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)}{x}dx\,, \quad \int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx\,,$$

где supp $\varphi(x) \subset [-R, R]$.

Определение 2.8.

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi\right) := \mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)}{x}dx$$

Степенные особенности

Отметим, что функционал

$$\int_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} dx$$

не зависит от R: действительно, $\forall$ R1, R2 таких, что supp φ(*x*) ⊂ [−R1, R2],

$$\left(\int_{-R_2}^{-R_1} + \int_{R_1}^{R_2} \right) \frac{\phi(0)}{x} dx = 0.$$

Степенные особенности

Замечание.

Понятно, что если функция $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности нуля, то знак главного значения можно убрать; поэтому написанное выражение является регуляризацией функции $1/x$ в смысле определения 2.7. Предельный переход под знаком интеграла в смысле главного значения нуждается в дополнительном обосновании, поэтому в непрерывности этого функционала проще убедиться показав, что:

Предложение 2.5.

$$\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)}{x}dx = \int_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$$

Степенные особенности

Доказательство.

$$\mathrm{V.p.} \int \frac{\phi(x)}{x} dx = \mathrm{V.p.} \int_{-R}^{R} \frac{\phi(x)}{x} dx =$$

$$= \mathrm{V.p.} \int_{-R}^{R} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \phi(0)\, \mathrm{V.p.} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x} dx\,,$$

причем в первом интеграле справа знак главного значения можно убрать, а второй — равен нулю.

Непрерывность функционала $\int_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} dx$,

следует из

Степенные особенности

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi_n(x) - \phi_n(0)}{x}dx \underset{\xi_n \in (0,x) \subset (-R,R)}{=} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\phi_n(\xi_n)}{x}dx \underset{n\to\infty}{\to} 0\,,$$

если $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{K}} 0.$

Законы больших чисел

Сходимость последовательностей случайных величин
Неравенства теории вероятностей
Законы больших чисел
Центральная предельная теорема