ЛЕКЦИЯ №3

Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса

Системой линейных уравнений, содержащих m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа $a_{ij},\ \ i = 1,\ldots,m;\ \ \ j = 1,\ \ldots,n$ называются коэффициентами системы; b_i - свободными членами; $x_1,\ldots\ldots,x_n$ - неизвестные.

Матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет множество решений .В этом случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение. Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются только над строками системы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = ..., = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым решением.*

Решить систему уравнений – значит выяснить, совместна она или несовместна, если совместна – найти её общее решение.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений дает *теорема Кронекера – Капелли.*

Для того, чтобы система m линейных уравнений относительно n неизвестных была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы A был равен рангу расширенной матрицы системы B: т.е. r (A) = r (B)

Если r (A) = r (B) = n (числу неизвестных), то система имеет единственное решение.

Если r (A) = r (B) < n, то система имеет множество решений.

Методы решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Решение системы такого вида можно найти:

1) по методу Крамера,
2) матричным способом,
3) методом Гаусса.

1.Метод Крамера.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

где Δ - главный определитель системы, а Δx_i (i=1,2,…,n) – определитель, полученный из главного определителя системы заменой i-того столбца столбцом свободных членов.

Если определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_I отличен от нуля, то система не имеет решения.

Если определитель системы $\Delta = 0$, и все $\Delta_I = 0$, то система имеет множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители Δ и $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24 + 45 - 1 - 10 - 6 - 18 = -14$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 36 - 3 - 8 + 3 - 54 = -14$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 15 - 4 + 15 + 6 - 24 = 14$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 45 - 1 - 10 - 6 - 12 = 0$$

Используя формулы Крамера, находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-14} = 0\,.$$

2.Матричный метод.

Введем обозначения: матрицу системы обозначим через A, матрицу-столбец неизвестных через X, матрицу-столбец свободных членов через B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix} \ .$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в виде:

$$A \cdot X = B \ .$$

Для решения этого матричного уравнения умножим обе части равенства слева на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$$

Так как

$$A^{-1} \cdot A = E \, ,$$

то

$$E \cdot X = A^{-1} B$$

Откуда решение системы – матрица-столбец неизвестных находится по формуле:

$X = A^{-1} B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице A.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Имеем $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Находим обратную матрицу к матрице А по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Определитель матрицы равен: detA = 18, присоединенная матрица равна:

$A^* = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Тогда обратная матрица будет равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Теперь находим матрицу X по формуле $X = A^{-1}B$, получим:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -25+42+1 \\ 5-30+7 \\ 35+6-5 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

3. Метод Гаусса.

Это метод последовательного исключения неизвестных. Он заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система линейных уравнений приводится к треугольному виду. Решая полученную систему уравнений с конца, находим все неизвестные.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

Решение. Для удобства преобразования будем выполнять не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Составим матрицу из коэффициентов и свободных членов, и приведем ее к треугольному виду:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&7&-2&2\\2&-3&8&-4&1\\4&2&19&1&8\\6&-5&11&-3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&6&-9&9&0\\0&1&-31&9&-15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&0&-45&9&-18\\0&0&-37&9&-18\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&0&5&-1&2\\0&0&-37&9&-18\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&0&5&-1&2\\0&0&8&0&0\end{bmatrix}$$

По полученной матрице составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1-x_2+7x_3-2x_4=2\\ -x_2-6x_3=-3\\ 5x_3-x_4=2\\ 8x_3=0\end{cases}$$

Начиная с последнего уравнения находим все неизвестные:
$x_3=0$, $x_4=-2$, $x_2=3$, $x_1=1$.

Т.е. решение системы имеет вид:(1,3,0,-2).

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x \ + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}.$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, и приведем ее к треугольному виду.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

Составляем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения выразим переменную x_2 через x_3:

$x_2 = \frac{3+8x_3}{7}$ и подставим в первое уравнение.

Откуда находим переменную x_1:

$$x_1 = \frac{16+10x_3}{7}.$$

Т. е. решение системы примет вид:

$$\left(\frac{16+10x_3}{7}, \frac{3+8x_3}{7}, x_3\right).$$

Придавая переменной x_3 различные числовые значения, получим множество решений системы.

Контрольные вопросы к лекции №3

1. Какая система называется совместной? Несовместной? Определенной? Неопределенной?
2. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
3. В чем заключается метод Крамера?
4. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
5. Метод Гаусса.

.