



ЛЕКЦИЯ №3

*Решение систем линейных уравнений
методом Крамера. Матричный метод
решения систем линейных уравнений.
Метод Гаусса*

Системой линейных уравнений, содержащих m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ называются коэффициентами системы; b_i - свободными членами; x_1, \dots, x_n - неизвестные.

Матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет множество решений. В этом случае каждое её решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Две системы называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение. Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются только над строками системы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым решением*.

Решить систему уравнений – значит выяснить, совместна она или несовместна, если совместна – найти её общее решение.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений дает *теорема Кронекера – Капелли*.

Для того, чтобы система m линейных уравнений относительно n неизвестных была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы A был равен рангу расширенной матрицы системы B : т.е. $r(A) = r(B)$

Если $r(A) = r(B) = n$ (числу неизвестных), то система имеет единственное решение.

Если $r(A) = r(B) < n$, то система имеет множество решений.

Методы решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Решение системы такого вида можно найти:

- 1) по методу Крамера,
- 2) матричным способом,
- 3) методом Гаусса.

1.Метод Крамера.

Если определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

где Δ - главный определитель системы, а Δx_i ($i=1,2,\dots,n$) – определитель, полученный из главного определителя системы заменой i -того столбца столбцом свободных членов.

Если определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_i отличен от нуля, то система не имеет решения.

Если определитель системы $\Delta = 0$, и все $\Delta_i = 0$, то система имеет множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители Δ и $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -24 + 45 - 1 - 10 - 6 - 18 = -14$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 36 - 3 - 8 + 3 - 54 = -14$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 15 - 4 + 15 + 6 - 24 = 14$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 45 - 1 - 10 - 6 - 12 = 0$$

Используя формулы Крамера, находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-14} = 0.$$

2. Матричный метод.

Введем обозначения: матрицу системы обозначим через A , матрицу-столбец неизвестных через X , матрицу-столбец свободных членов через B

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тогда систему линейных уравнений можно записать в виде:

$$A \cdot X = B.$$

Для решения этого матричного уравнения умножим обе части равенства слева на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$$

Так как

$$A^{-1} \cdot A = E,$$

то

$$E \cdot X = A^{-1}B$$

Откуда решение системы – матрица-столбец неизвестных находится по формуле:

$$X = A^{-1}B, \quad \text{где } A^{-1} \text{ – обратная матрица к матрице } A.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Находим обратную матрицу к матрице A по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Определитель матрицы равен: det A = 18, присоединенная матрица равна:

$A^* = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$. Тогда обратная матрица будет равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Теперь находим матрицу X по формуле $X = A^{-1}B$, получим:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -25+42+1 \\ 5-30+7 \\ 35+6-5 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Т.е. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.

3. Метод Гаусса.

Это метод последовательного исключения неизвестных. Он заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система линейных уравнений приводится к треугольному виду. Решая полученную систему уравнений с конца, находим все неизвестные.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8 \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

Решение. Для удобства преобразования будем выполнять не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Составим матрицу из коэффициентов и свободных членов, и приведем ее к треугольному виду:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

По полученной матрице составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2 \\ -x_2 - 6x_3 = -3 \\ 5x_3 - x_4 = 2 \\ 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Начиная с последнего уравнения находим все неизвестные:

$$x_3 = 0, x_4 = -2, x_2 = 3, x_1 = 1.$$

Т.е. решение системы имеет вид: $(1, 3, 0, -2)$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, и приведем ее к треугольному виду.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

Составляем систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим переменную x_2 через x_3 :

$$x_2 = \frac{3 + 8x_3}{7} \text{ и подставим в первое уравнение.}$$

Откуда находим переменную x_1 :

$$x_1 = \frac{16 + 10x_3}{7}.$$

Т. е. решение системы примет вид:

$$\left(\frac{16 + 10x_3}{7}, \frac{3 + 8x_3}{7}, x_3 \right).$$

Придавая переменной x_3 различные числовые значения, получим множество решений системы.

Контрольные вопросы к лекции №3

1. Какая система называется совместной? Несовместной?
Определенной? Неопределенной?
2. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
3. В чем заключается метод Крамера?
4. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
5. Метод Гаусса.