Лекция 6. Простейшие формулы из геометрии. Прямая на плоскости

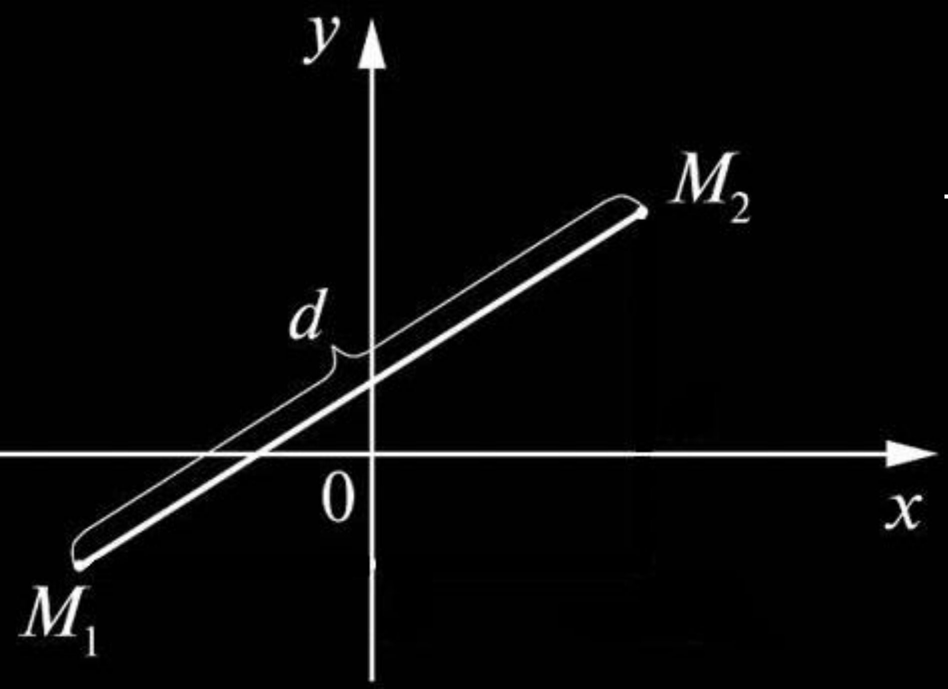
1. Метод координат на плоскости.
2. Уравнение линии.
3. Различные виды уравнения прямой.
4. Угол между двумя прямыми на плоскости.
5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

п.1. Метод координат на плоскости.

Суть метода: замена геометрических понятий и фактов алгебраическими соотношениями через координаты.

Основные формулы

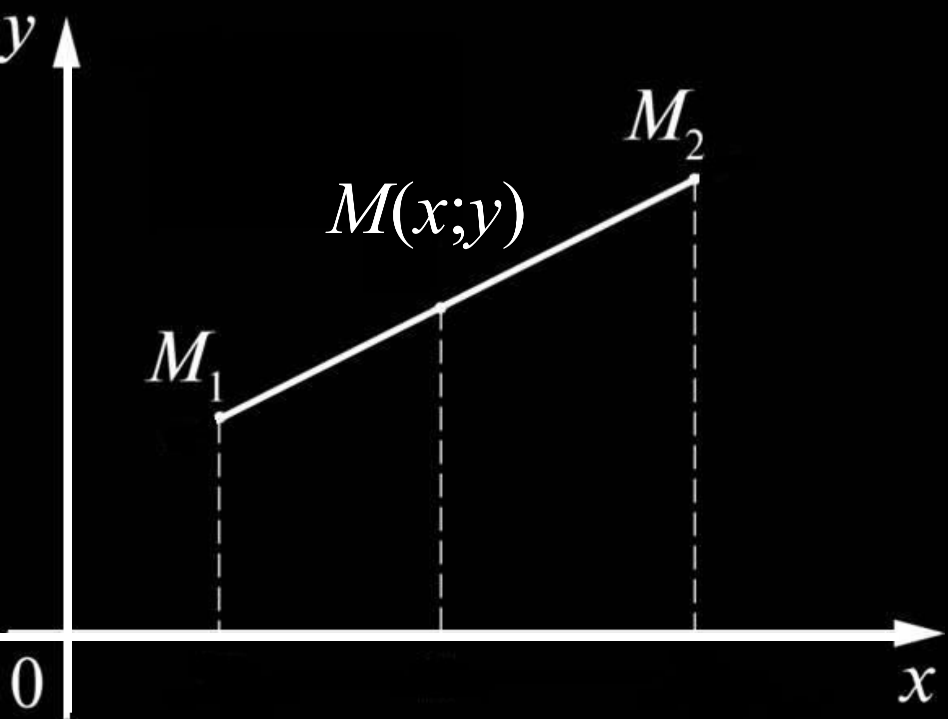
1) Расстояние между двумя точками на плоскости.



$$M_1(x_1; y_1), \quad M_2(x_2; y_2).$$

$$\boxed{d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

2) Деление отрезка в данном отношении.



$$M_1(x_1; y_1), \quad M_2(x_2; y_2),$$

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.}$$

Доказательство с помощью теоремы Фалеса.

Если $M_1M = MM_2$, т.е. M — середина отрезка

M_1M_2, то $\lambda =$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

п.2. Уравнение линии.

Уравнение

$$\boxed{F(x, y) = 0,}$$

связывающее x и y, называется ***уравнением некоторой линии*** L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на L.

Замечание 1. Чтобы определить, принадлежит ли некоторая точка $M(x_0; y_0)$ заданной линии $L: F(x, y) = 0$, следует подставить координаты точки M в уравнение линии L.

Если $F(x_0, y_0) = 0$, то M принадлежит L, иначе M не принадлежит L.

Пример. Определите, лежит ли точка $M(3;4)$ на окружности

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9.$$

Решение. Так как

$$(3-1)^2+(4+2)^2=4+36=40\neq 9,$$

то M не лежит на данной окружности.

Замечание 2. Чтобы определить координаты точки пересечения двух линий $L_1 : F_1(x, y) = 0$ и $L_2 : F_2(x, y) = 0$, следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пример. Найти количество точек пересечения прямой $y = 2x$ и окружности

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Решение. Решим систему уравнений

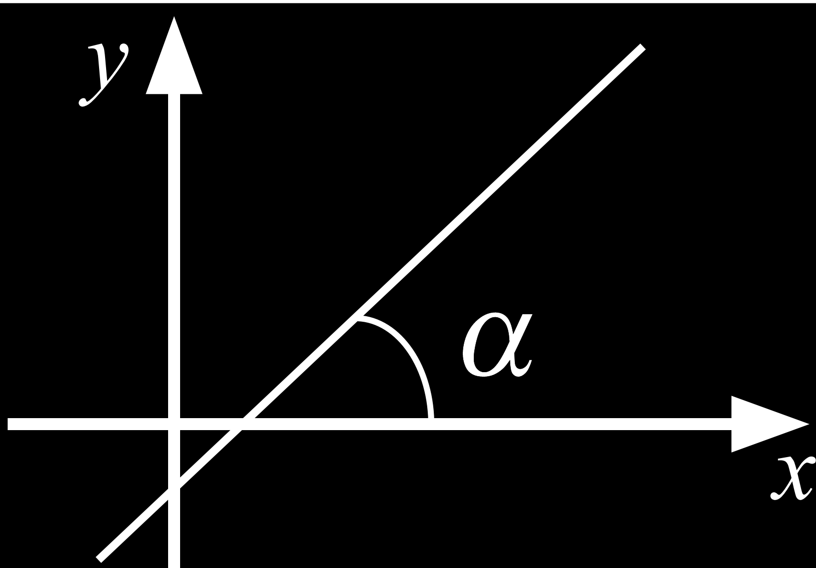
$$\begin{cases} y = 2x, \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9; \end{cases} \Longrightarrow (x-1)^2 + (2x+2)^2 = 9;$$

$$\Longrightarrow 5x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Т.к. *D*>0, то система имеет два решения, т.е. линии пересекаются в двух точках.

п.3. Различные виды уравнения прямой.

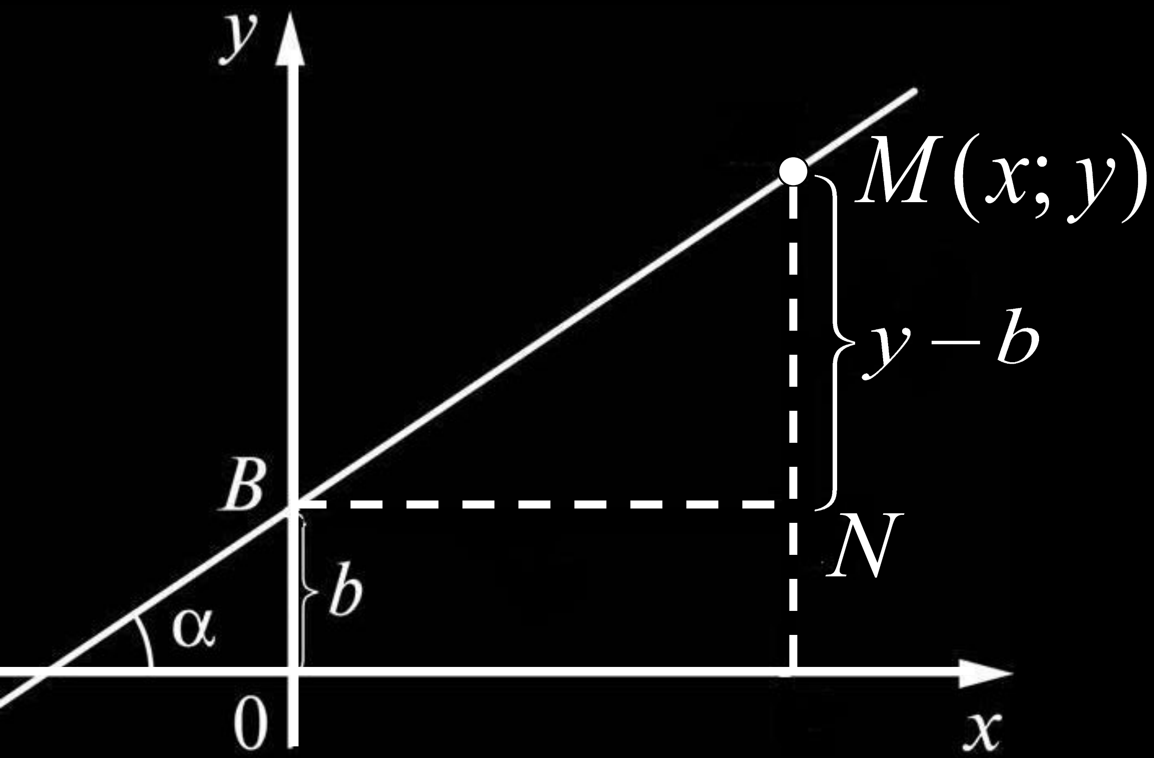
Угол наклона прямой — это угол, на который нужно повернуть ось Ох, чтобы положительное направление совпало с одним из направлений прямой.



Угловой коэффициент:

$$\boxed{k = \operatorname{tg} \alpha}$$

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

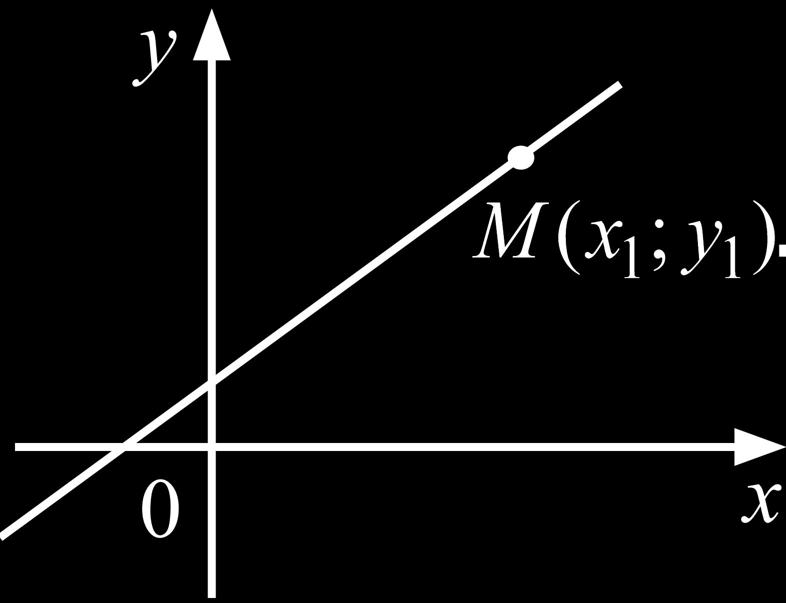


$$\frac{NM}{BN} = tg\,\alpha$$

$$\frac{y-b}{x} = k$$

$$\boxed{y = kx + b}$$

2) Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом.

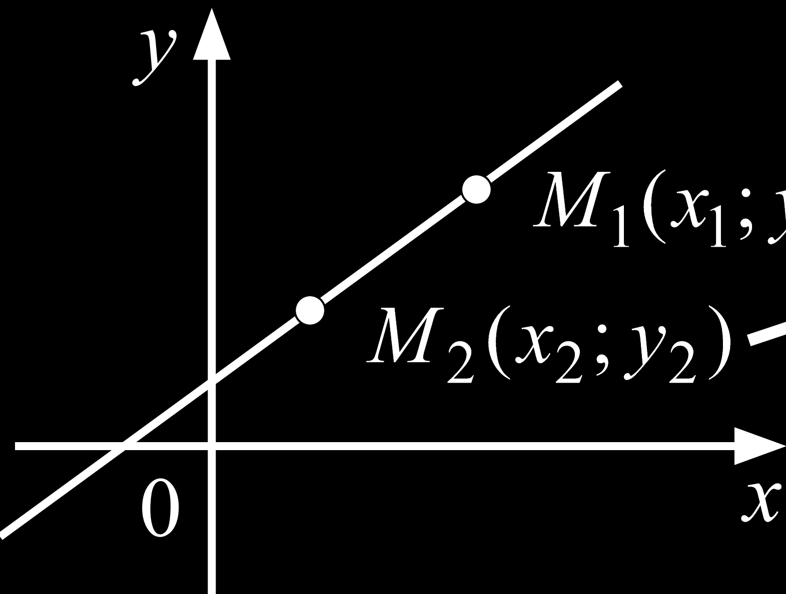


$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b \quad \Rightarrow \quad b = y_1 - kx_1$$

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

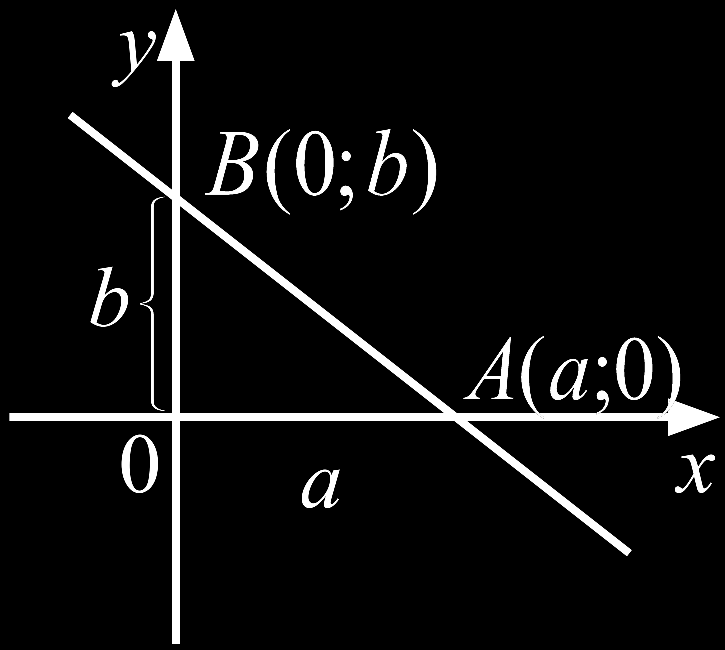
$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

Замечание 1.

Если $y_1 = y_2$, то $y = y_1 \parallel Ox$.

Если $x_1 = x_2$, то $x = x_1 \parallel Oy$.

4) Уравнение прямой «в отрезках».



$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

5) Общее уравнение прямой.

Теорема. В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \qquad (1)$$

и, обратно, уравнение (1) при произвольных коэффициентах *A*, *B*, *C* (*A* и *B* одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат *Oxy*.

Замечание 3. Вектор, параллельный данной прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Если прямая задана общим уравнением

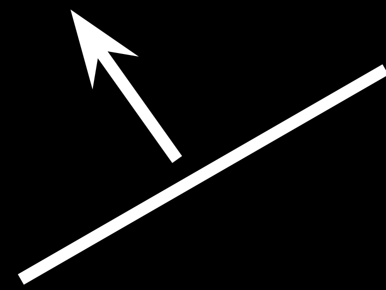
$$Ax + By + C = 0,$$

то вектор

$$\vec{l} = (-B, A)$$

является направляющим вектором этой прямой.

Замечание 4. Вектор, перпендикулярный данной прямой, называется нормальным вектором этой прямой.



Если прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

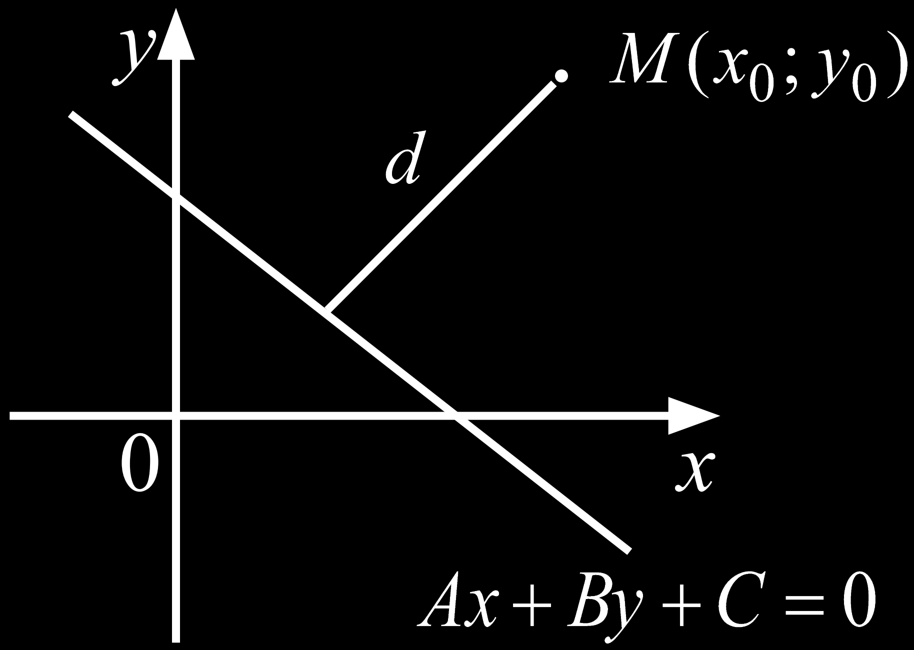
то вектор $\vec{n} = (A, B)$

является нормальным вектором этой прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

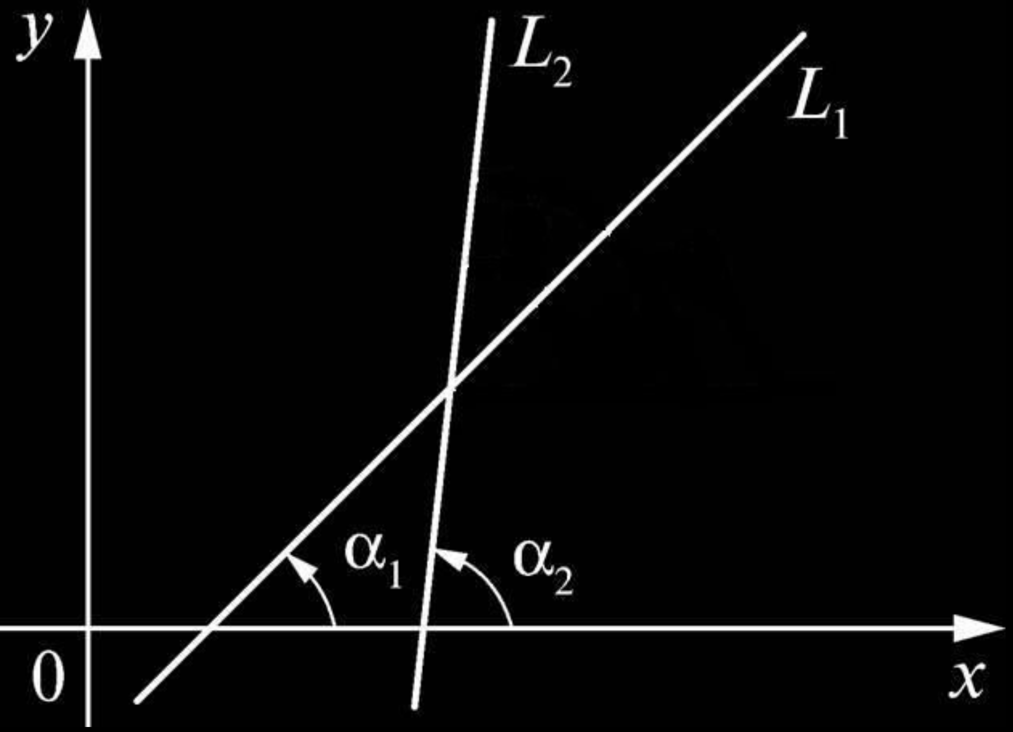
— уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

6) Расстояние от точки до прямой.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

п.4. Угол между двумя прямыми на плоскости.

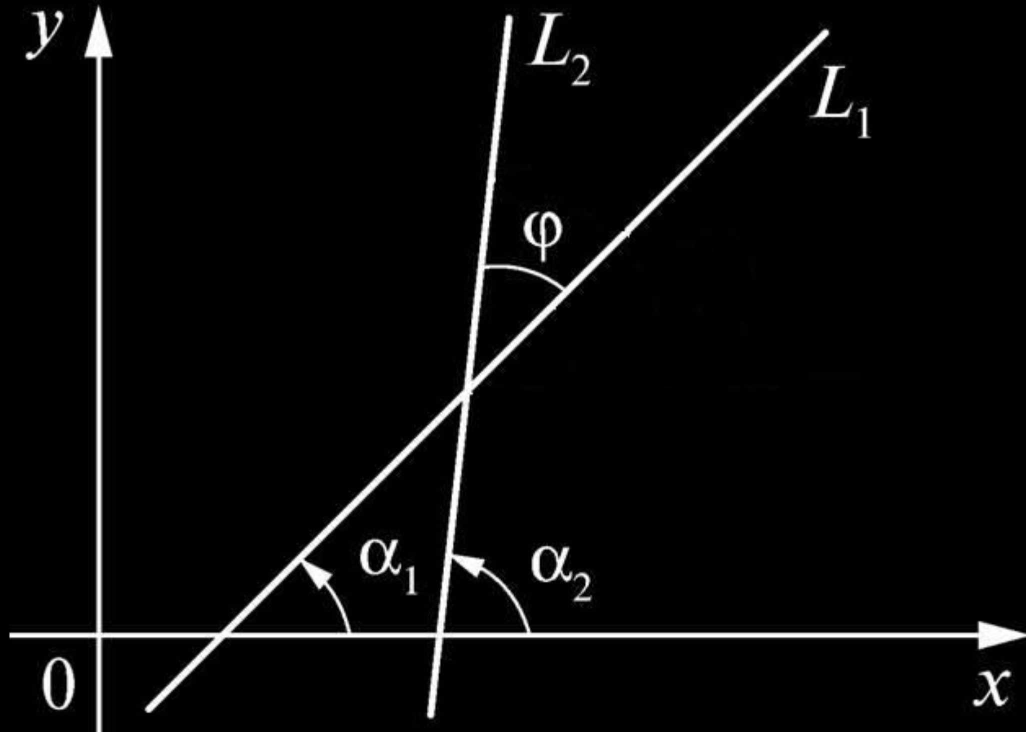


$$L_1: \; y = k_1 x + b_1$$

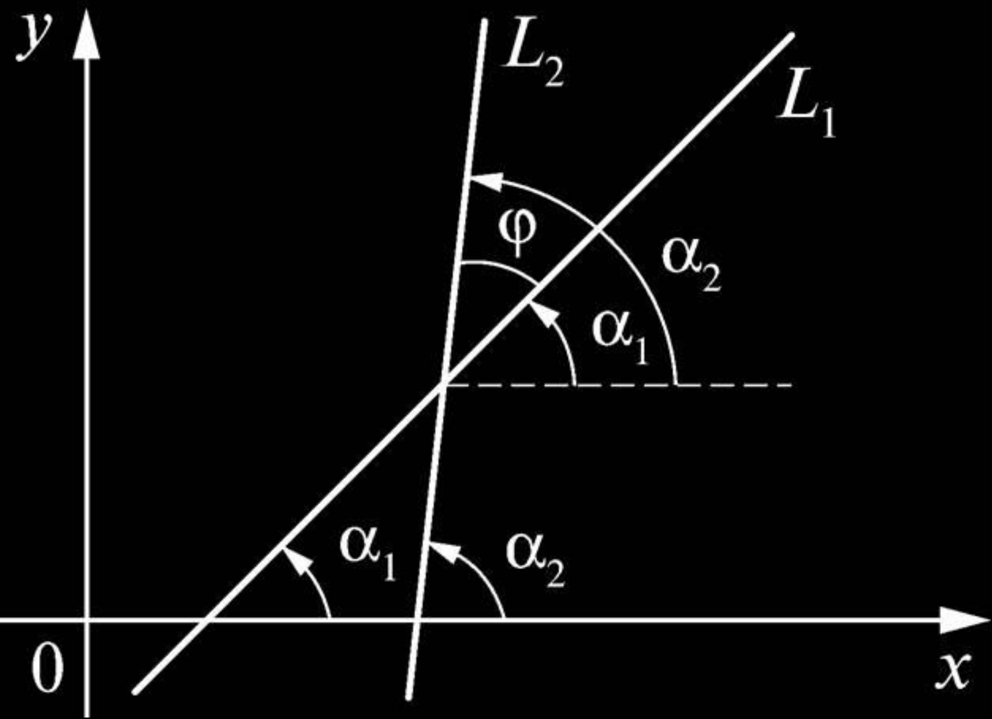
$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$$

$$L_2: \; y = k_2 x + b_2$$

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$$



Угол между прямыми L_1 и L_2 — это угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую L_1 до совпадения с прямой L_2.



$$0 \le \varphi < \pi$$

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Longrightarrow \varphi = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{k_1 = k_2}$$ – условие параллельности

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$$

$$L_1 \perp L_2 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0$$

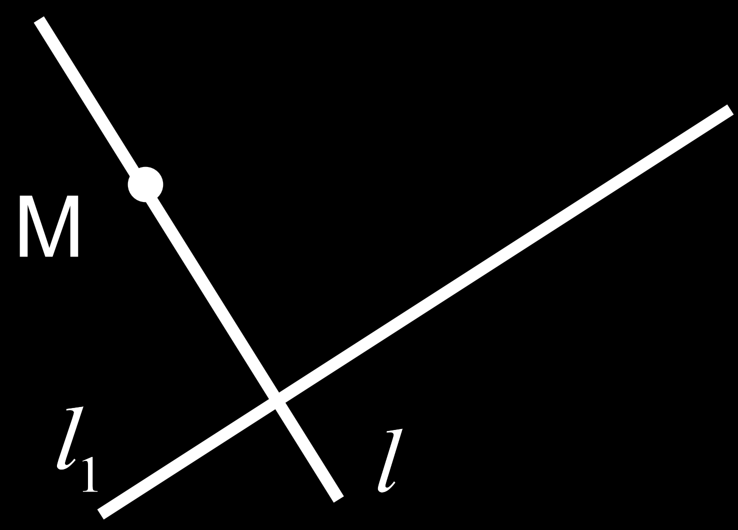
$$\Longrightarrow \boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

— условие перпендикулярности

Пример. Составить общее уравнение прямой, проходящей через точку М(3,-1) и перпендикулярной прямой

$$y = 2x - 1.$$

Решение.



1-й способ.

$$l_1 : y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow k_1 =$$

Учитывая условие перпендикулярности

$$k =$$

Воспользуемся уравнение из пункта 2)

$$l: \qquad y+1=-\frac{1}{2}(x-3)$$

$$x+2y-1=0.$$

2-й способ.

$$l_1: y=2x-1,\ 2x-y-1=0.$$

Направляющий вектор прямой l_1

$$(1,2)$$

является нормальным вектором прямой l.

Тогда

$$l: \qquad 1(x-3)+2(y+1)=0,$$

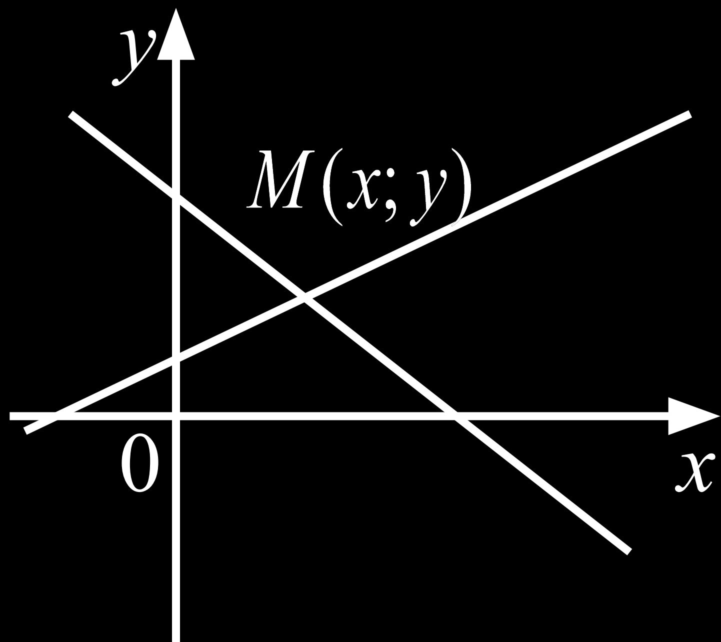
$$x+2y-1=0.$$

п.5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

$$L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$$

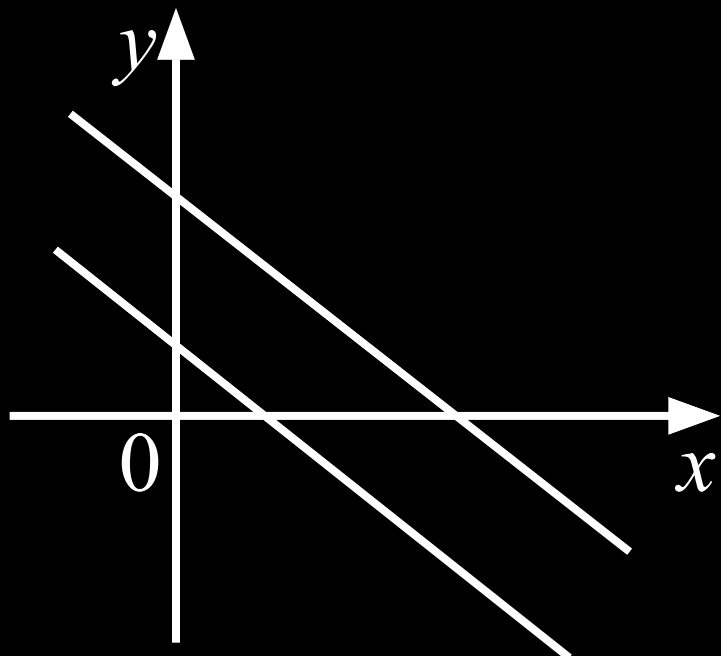
$$L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$



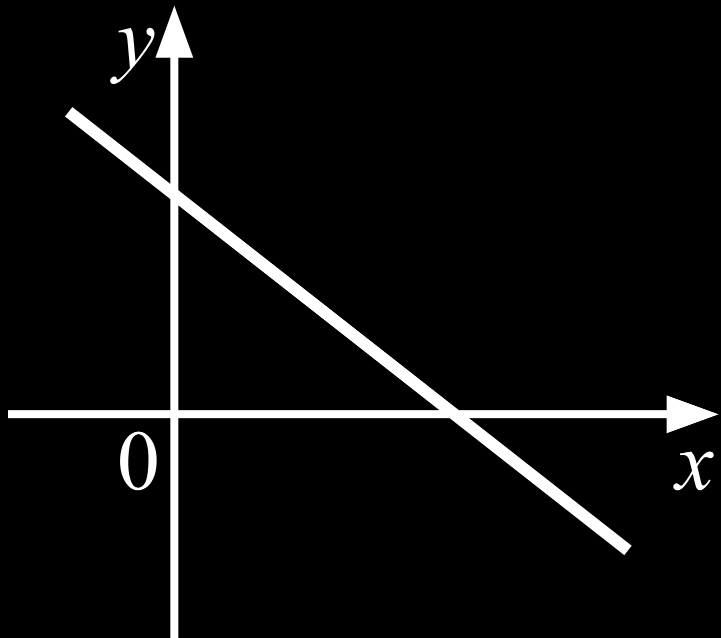
$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow$$

прямые пересекаются



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Longrightarrow$$

прямые параллельны



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow$$

прямые совпадают