ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ ЕГО ДИАГОНАЛИ И УГОЛ МЕЖДУ НИМИ

9 КЛАСС
ГЕОМЕТРИЯ

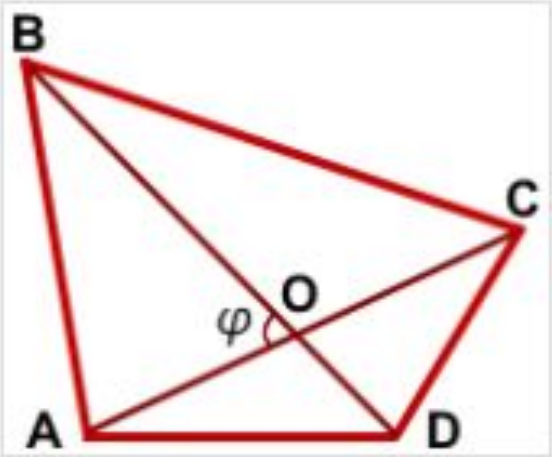
ПОВТОРИМ!

- 1. Какие углы называются смежными?
- 2. Сформулируйте свойство смежных углов.
- 3. Какие углы называются вертикальными?
- 4. Сформулируйте свойство вертикальных углов.
- 5. Как найти площадь треугольника, если известны две стороны и угол между ними?
- 6. Чему равен sin(180 - a)?

Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$$

(d_1, d_2 — *диагонали четырёхугольника*, φ — *угол между ними*).

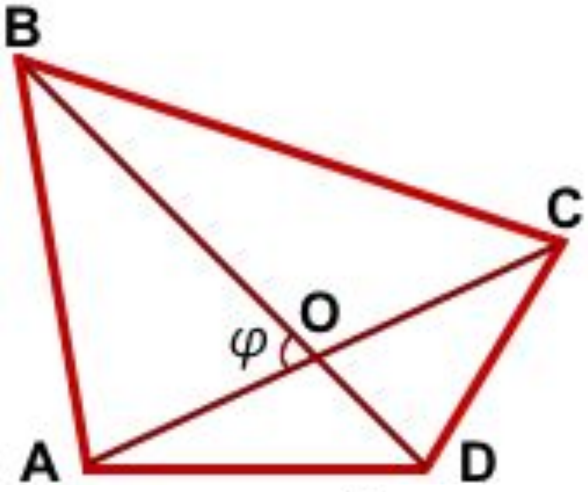


Дано: ABCD — выпуклый четырёхугольник,

$AC \cap BD = O$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$

Доказать:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство:

Диагонали выпуклого четырёхугольника ABCD делят его на 4 треугольника.

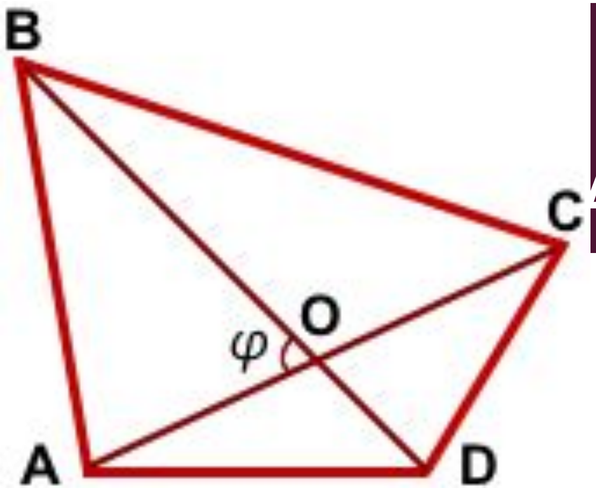
Площадь каждого из треугольников равна половине произведения его сторон на синус угла между ними:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB;$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \cdot \sin \angle BOC;$$

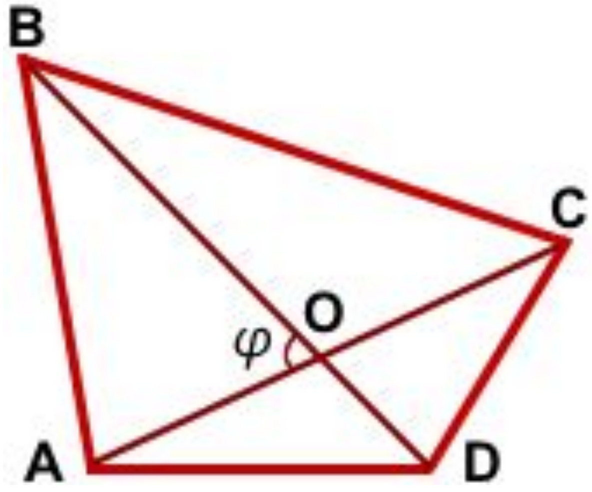
$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO \cdot \sin \angle COD;$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO \cdot \sin \angle AOD.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

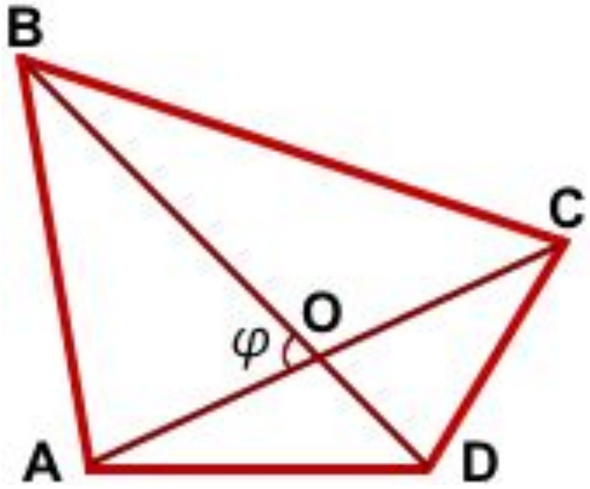
∠COD=∠AOB=φ (как вертикальные).
∠BOC=180°-∠AOB=180°-φ (как смежные).
∠AOD=∠BOC=180°-φ (как вертикальные).
sin (180°-φ) = sin φ.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Отсюда

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin\varphi;$$
$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \cdot \sin\varphi;$$
$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO \cdot \sin\varphi;$$
$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO \cdot \sin\varphi.$$



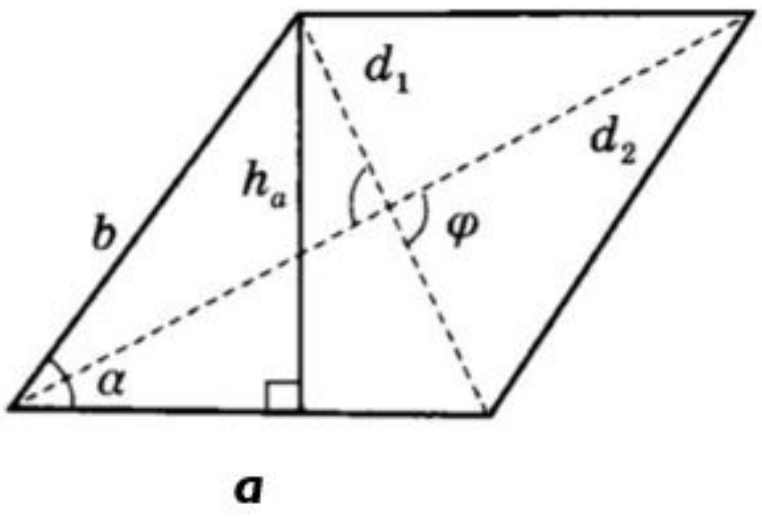
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi (AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + AO \cdot DO) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi ((AO \cdot BO + BO \cdot CO) + (CO \cdot DO + AO \cdot DO)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi (BO(AO + CO) + DO(CO + AO)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi (AO + CO)(BO + DO) = \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot AC \cdot BD = \\
&= \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Что и требовалось доказать.

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

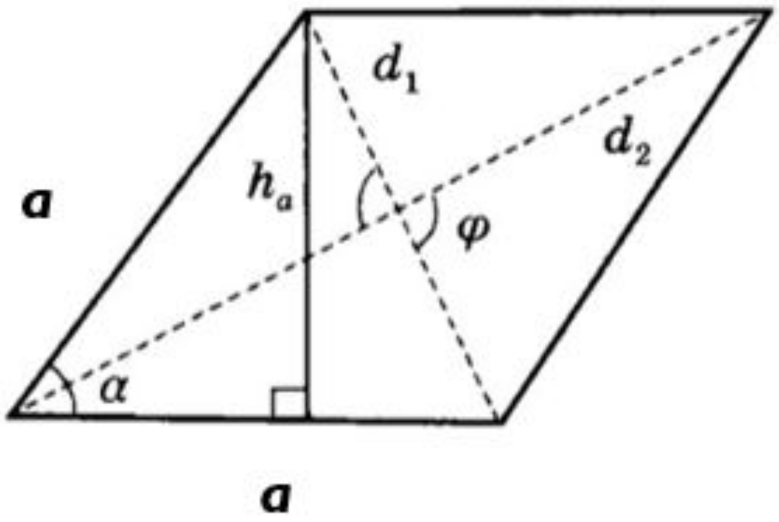


$$S = ah_a$$

$$S = ab\sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ РОМБА

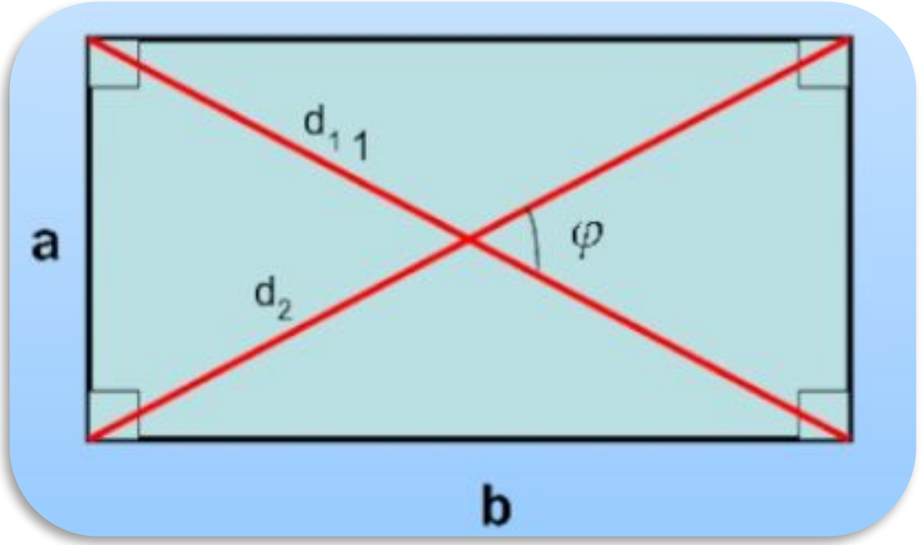


$$S = ah_a$$

$$S = a^2 \sin\alpha$$

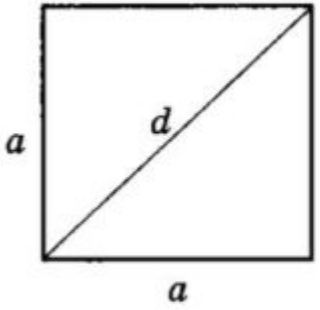
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



$$S = ab \qquad\qquad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА



$$S = \frac{1}{2}d^2$$

$$S = a^2$$

$S = 2R^2$, где R – радиус описанной окружности

$S = 4r^2$, где r- радиус вписанной окружности

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \text{(формула Герона)}$$

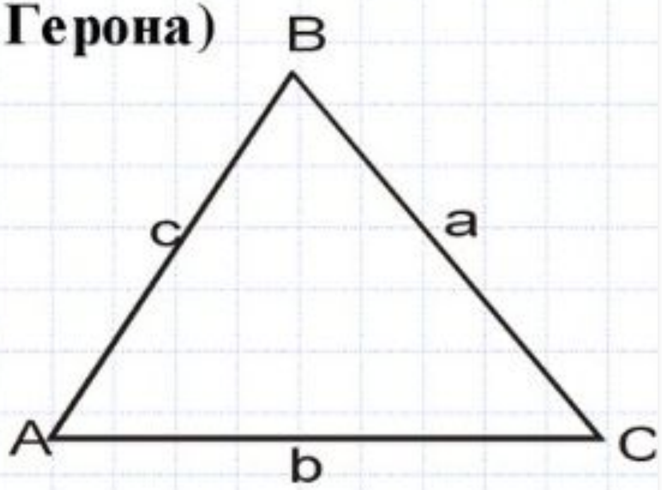
$$S=rp$$

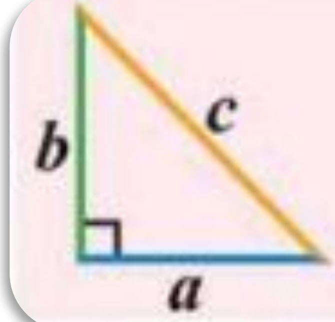
$$S=\frac{abc}{4R}$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)-\textit{полупериметр}$$

r – *радиус вписанной окружности*

R – *радиус описанной окружности*

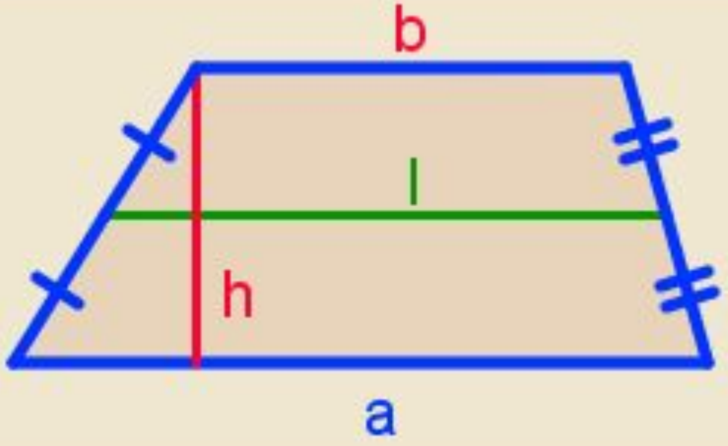




$$S=\frac{1}{2}ab$$

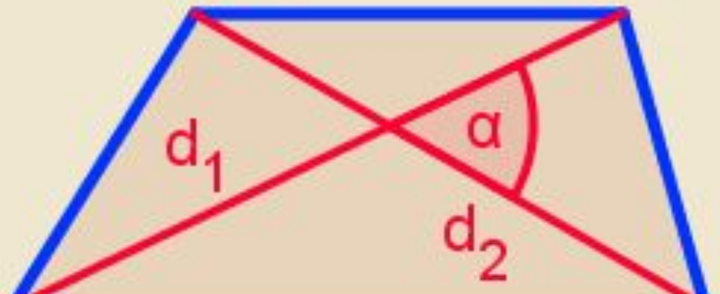
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ



Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту:

$$S=\frac{a+b}{2}h=lh.$$



Площадь трапеции равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S=\frac{d_1d_2\sin\alpha}{2}.$$

ЗАДАЧА 1

Задача

Найти площадь выпуклого четырехугольника

Дано: ABCD-выпуклый четырехугольник

d_1 и d_2 - диагонали

$d_1 = 2$ $d_2 = 5$

Угол $\alpha = 30$

$\sin \alpha = 1/2$

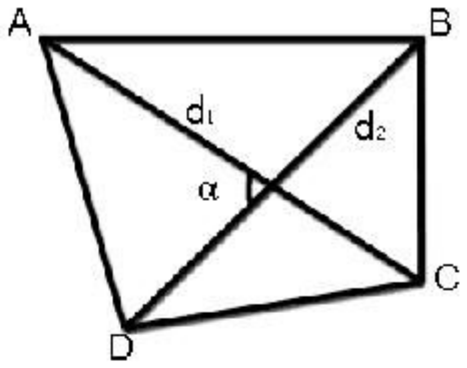
Найти: S ABCD

Решение:

$S = 1/2 d_1 \, d_2 \sin \alpha$

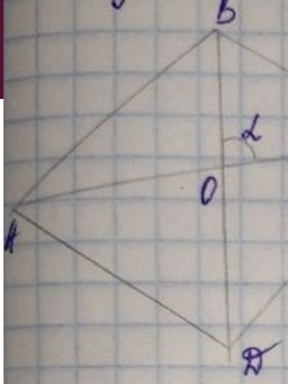
$S = 1/2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1/2 = 2{,}5 \text{см}^2$

Ответ: $S = 2{,}5 \text{см}^2$



ЗАДАЧА 2

В выпуклом четырехугольнике диагонали равны 9 и 14, а его площадь 27. Найдите синус угла между диагоналями



Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $AC = 9$, $BD = 14$

$S_{ABCD} = 27$

Найти: $\sin\angle\alpha$

Решение

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle\alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle BOC$$

Выразим из этой формулы $\sin\angle\alpha$

$$\sin\angle\alpha = \frac{2S}{d_1 d_2}$$

$$\sin\angle\alpha = \frac{2 \cdot 27}{9 \cdot 14} = \frac{3}{7}$$

Ответ: $\sin\angle\alpha = \frac{3}{7}$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Написать конспект урока, записать решенные задачи
- Повторить § 2, п. 100.
- Выполнить в тетради № 1023 (решить с помощью формулы, которую выучили сегодня), 1026
- Прислать классную и домашнюю работы