
**ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ
ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ ЕГО
ДИАГОНАЛИ И УГОЛ МЕЖДУ НИМИ**

**9 КЛАСС
ГЕОМЕТРИЯ**

ПОВТОРИМ!

- 1. Какие углы называются смежными?
- 2. Сформулируйте свойство смежных углов.
- 3. Какие углы называются вертикальными?
- 4. Сформулируйте свойство вертикальных углов.
- 5. Как найти площадь треугольника, если известны две стороны и угол между ними?
- 6. Чему равен $\sin(180 - \alpha)$?

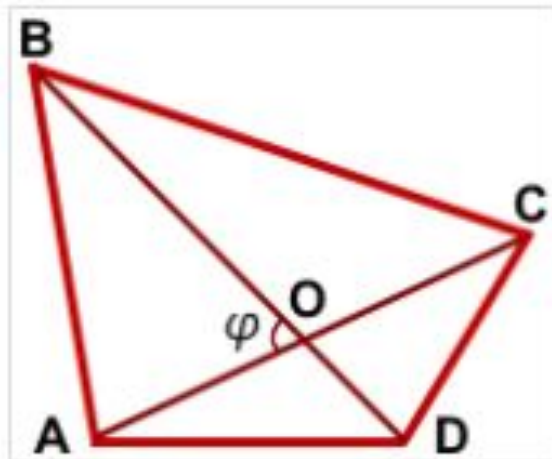


ПЛОЩАДЬ ВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА РАВНА
ПОЛОВИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЕГО ДИАГОНАЛЕЙ НА СИНУС
УГЛА МЕЖДУ НИМИ:



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin \varphi$$

(d_1, d_2 — диагонали четырёхугольника, φ — угол между ними).



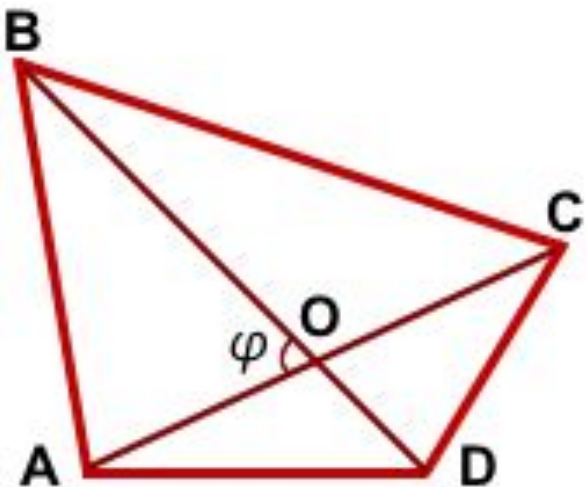
Дано: ABCD — выпуклый четырёхугольник,

$AC \cap BD = O$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$

Доказать:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin \varphi$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Доказательство:

Диагонали выпуклого четырёхугольника ABCD делят его на 4 треугольника.

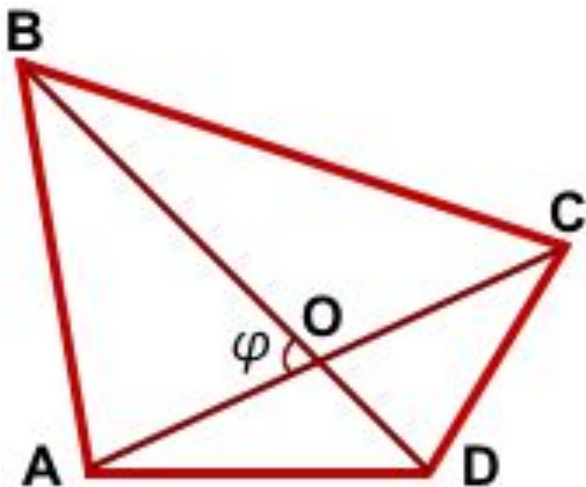
Площадь каждого из треугольников равна половине произведения его сторон на синус угла между ними.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \cdot \sin \angle BOC;$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO \cdot \sin \angle COD;$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO \cdot \sin \angle AOD.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

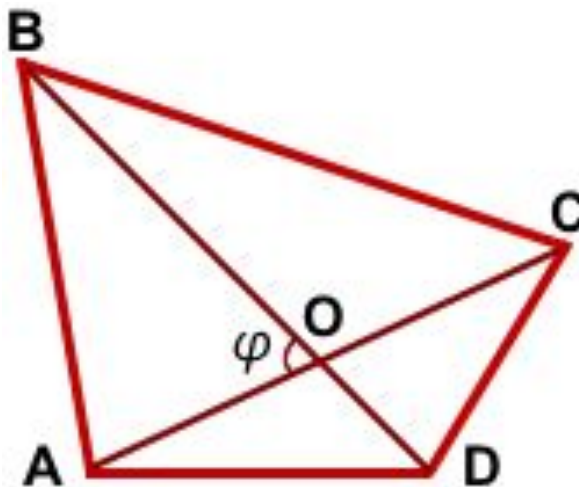


$\angle COD = \angle AOB = \varphi$ (как вертикальные).

$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - \varphi$ (как смежные).

$\angle AOD = \angle BOC = 180^\circ - \varphi$ (как вертикальные).

$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



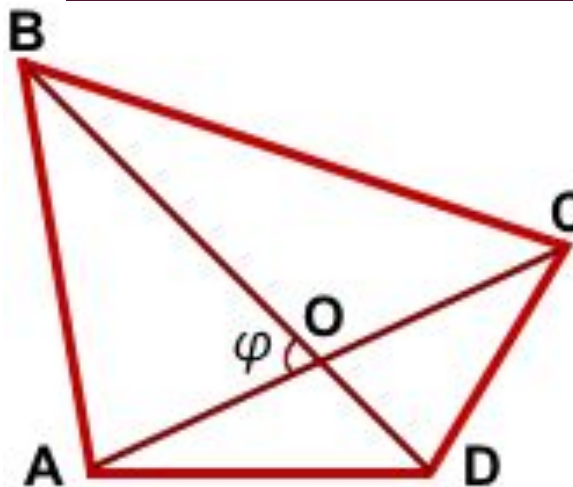
Отсюда

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \varphi;$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \cdot \sin \varphi;$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO \cdot \sin \varphi;$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DO \cdot \sin \varphi.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

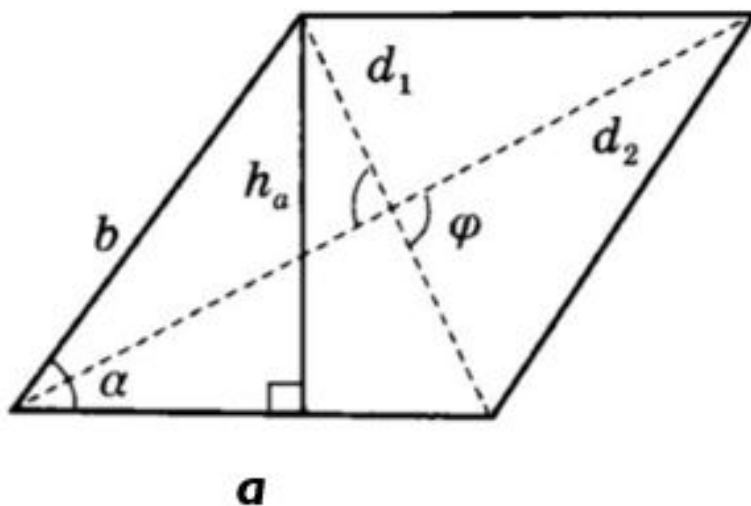


Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi (AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + AO \cdot DO) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi ((AO \cdot BO + BO \cdot CO) + (CO \cdot DO + AO \cdot DO)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi (BO(AO + CO) + DO(CO + AO)) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi (AO + CO)(BO + DO) = \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot AC \cdot BD = \\ &= \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

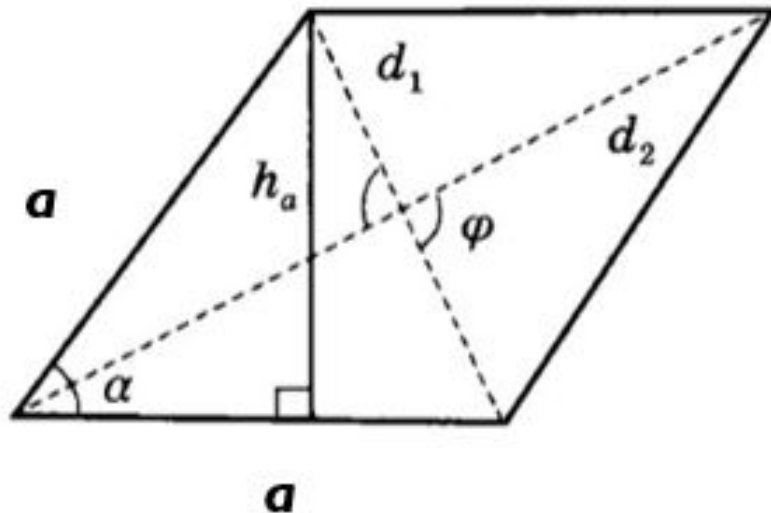


$$S = ah_a$$

$$S = ab \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ РОМБА

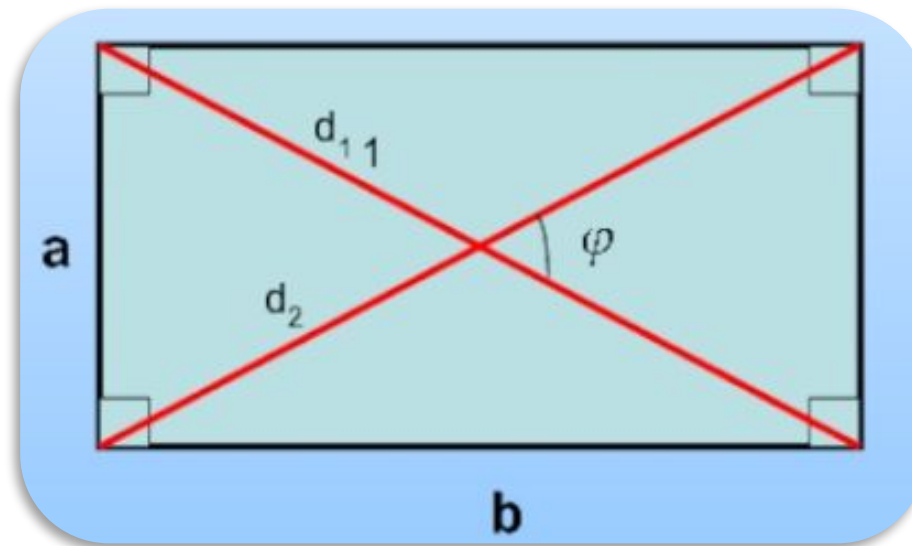


$$S = ah_a$$

$$S = a^2 \sin \alpha$$

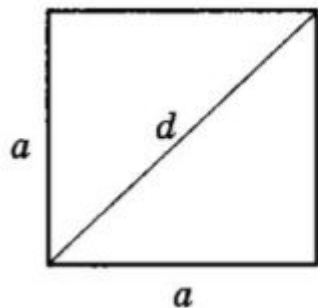
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



$$S = ab \qquad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ КВАДРАТА



$$S = \frac{1}{2}d^2$$

$$S = a^2$$

$S = 2R^2$, где R – радиус описанной окружности

$S = 4r^2$, где r – радиус вписанной окружности

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)}$$

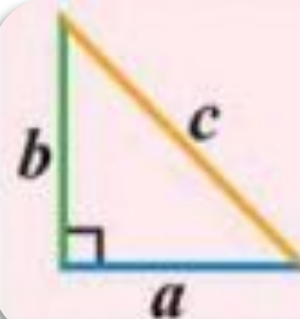
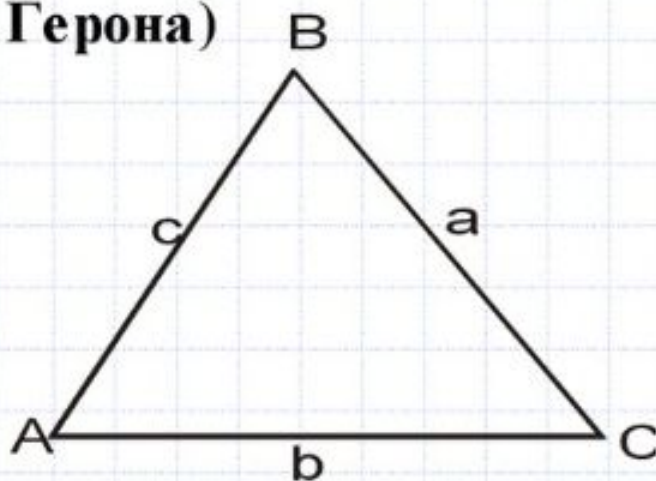
$$S = rp$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) - \text{полупериметр}$$

r – радиус вписанной окружности

R – радиус описанной окружности

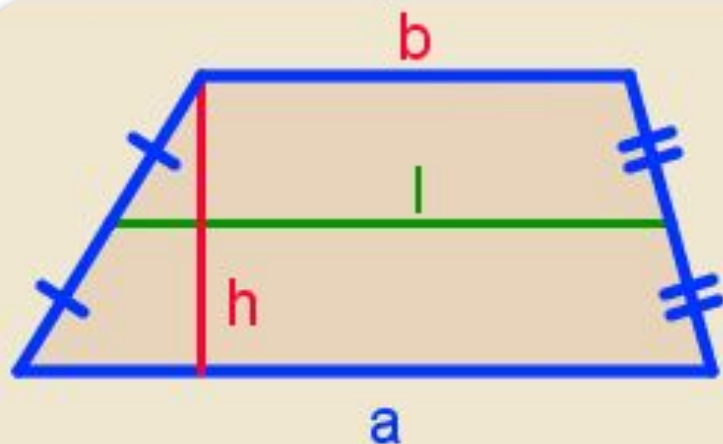


$$S = \frac{1}{2}ab$$



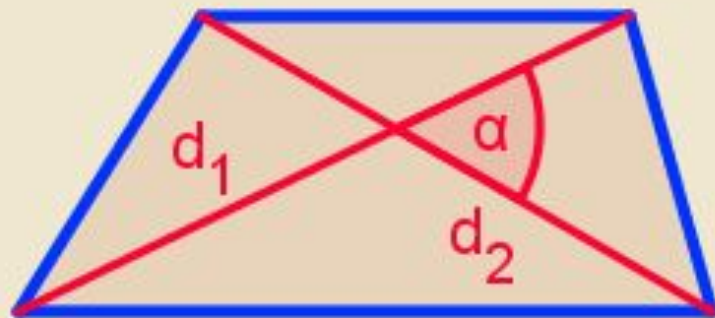
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ПОВТОРИМ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ



Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} h = lh.$$



Площадь трапеции равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2}.$$

ЗАДАЧА I

Задача

Найти площадь выпуклого четырехугольника

Дано: ABCD-выпуклый четырехугольник

d_1 и d_2 - диагонали

$d_1=2$ $d_2= 5$

Угол $\alpha = 30$

$\sin \alpha=1/2$

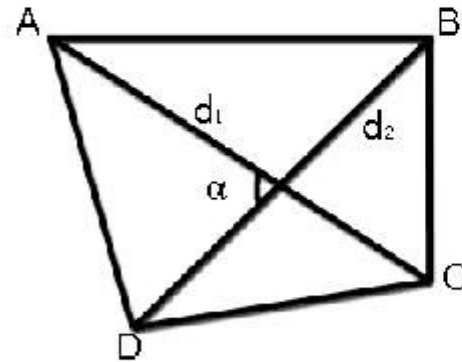
Найти: S_{ABCD}

Решение:

$$S = 1/2 d_1 d_2 \sin \alpha$$

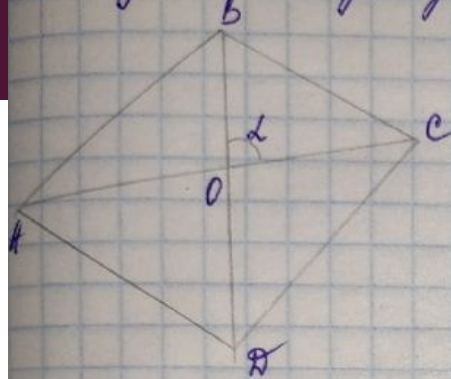
$$S = 1/2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1/2 = 2,5 \text{ см}^2$$

Ответ: $S = 2,5 \text{ см}^2$



ЗАДАЧА 2

В выпуклом четырехугольнике диагонали равны 9 и 14, а его площадь 27. Найдите синус угла между диагоналями



Дано: ABCD - четырехугольник, $AC=9$, $BD=14$
 $S_{ABCD}=27$

Найти: $\sin \alpha$

Решение

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

Выразим из этой формулы $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{2S}{d_1 d_2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 27}{9 \cdot 14} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha = \frac{3}{7}$$



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Написать конспект урока, записать решенные задачи
- Повторить § 2, п. 100.
- Выполнить в тетради № 1023 (решить с помощью формулы, которую выучили сегодня), 1026
- Прислать классную и домашнюю работы

