

Лекция

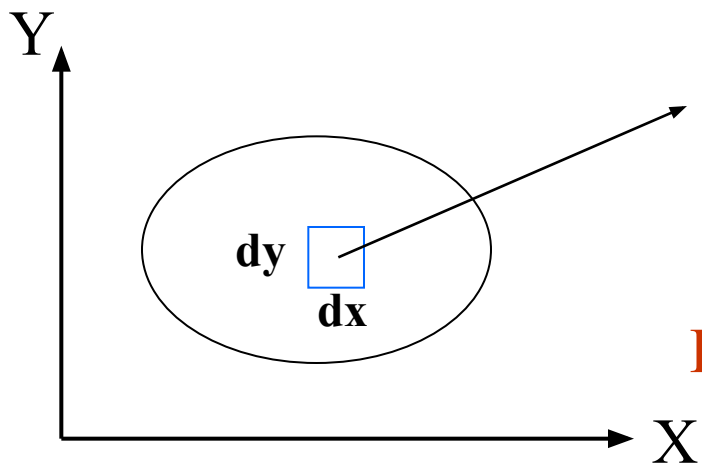
**Геометрические характеристики
плоских сечений**

1. Геометрические характеристики поперечных сечений

А

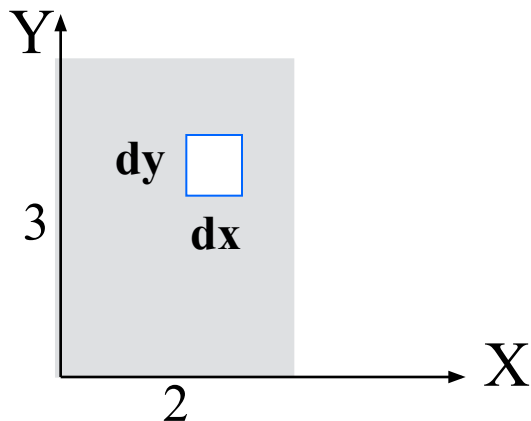
Сопротивление бруса внешним силам зависит не только от его размеров и материала, но и от формы поперечного сечения, геометрические свойства которого выражаются численно посредством геометрических характеристик.

1.1. Площадь поперечного сечения - А



$$\iint_A dx dy = \int_A dA = A$$

Размерность А: $[A] = [\text{длина}^2] = [\text{м}^2]$



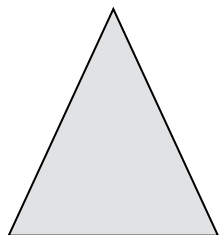
$$A = \iint_A dx dy = \int_0^2 dx \int_0^3 dy = x \Big|_0^2 y \Big|_0^3 = 6 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Геометрические характеристики

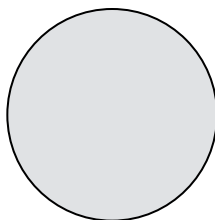
Простейшие виды поперечных сечений:



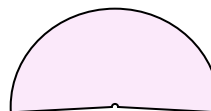
$$A = b \cdot h$$



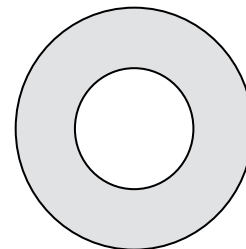
$$A = \frac{1}{2} b \cdot h$$



$$A = \pi d^2 / 4$$



$$A = \pi d^2 / 8$$

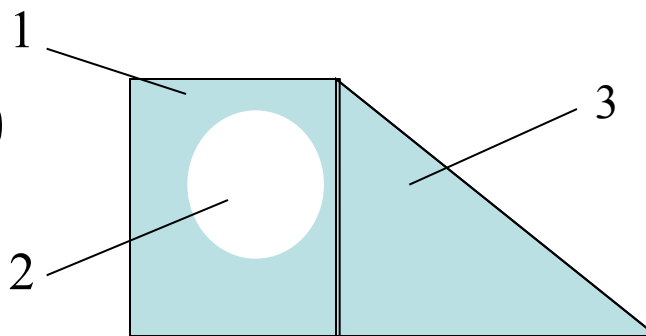


$$A = \pi D^2 (1 - \alpha^2) / 4;$$

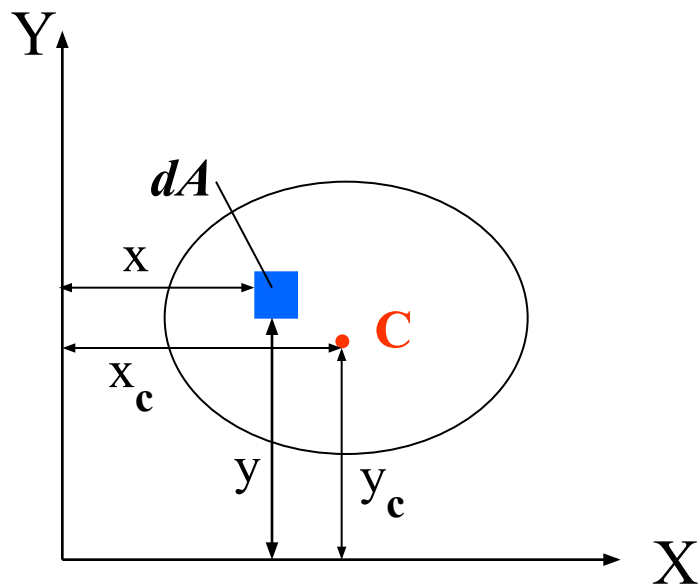
$$\alpha = d/D$$

Сложное сечение

$$A = \sum_i^n A_i = (A_1 - A_2 + A_3) > 0$$



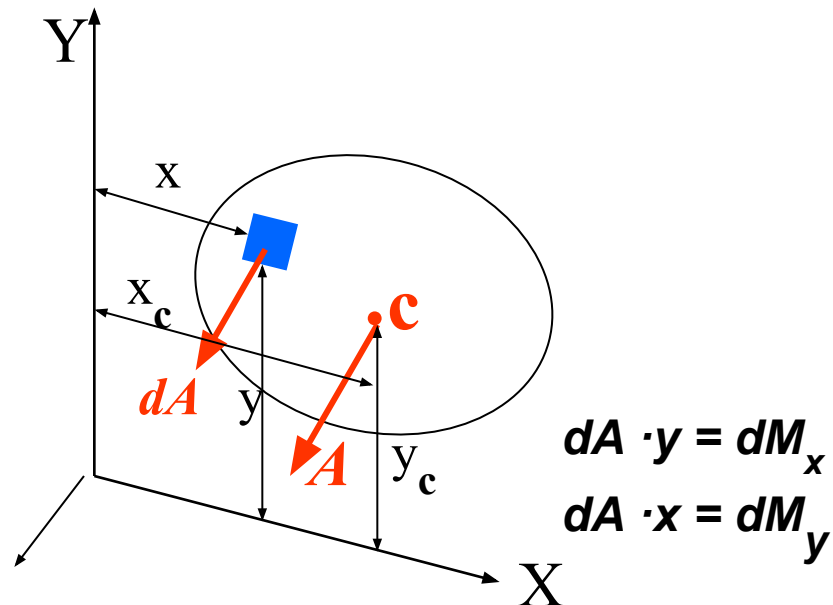
1.2. Статические моменты поперечного сечения – S_x, S_y



$$\left. \begin{aligned} S_X &= \int y \cdot dA, \\ S_Y &= \int x \cdot dA. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &> 0 \\ &< 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$[S] = [\text{длина}^3]$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются **центральными**.
Центральных осей – бесконечное множество.

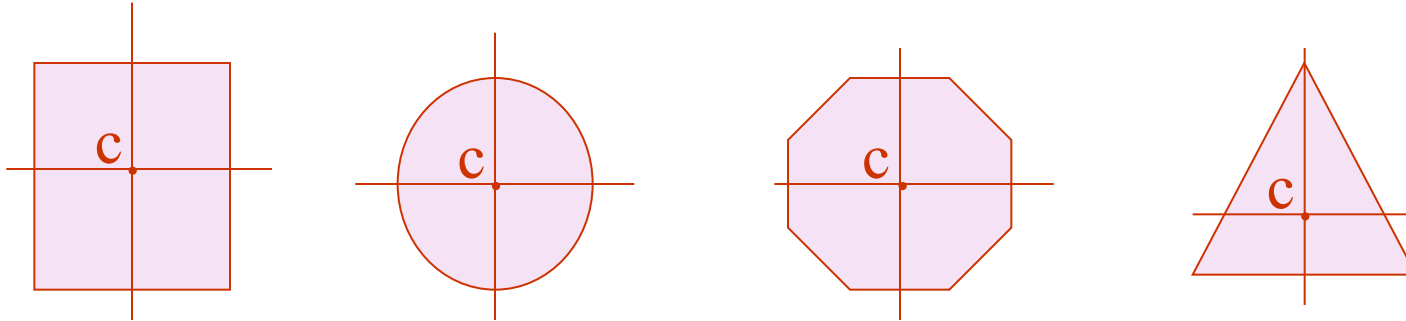


$$\begin{aligned} S_X &= \int y \cdot dA = A \cdot y_c \longrightarrow y_c = S_X / A \\ S_Y &= \int x \cdot dA = A \cdot x_c \longrightarrow x_c = S_Y / A \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) $\longrightarrow S_{y, x} = 0$ для центральных осей

Геометрические характеристики

Во многих случаях положение центра тяжести можно определить непосредственно. Например, если сечение имеет ≥ 2 осей симметрии:

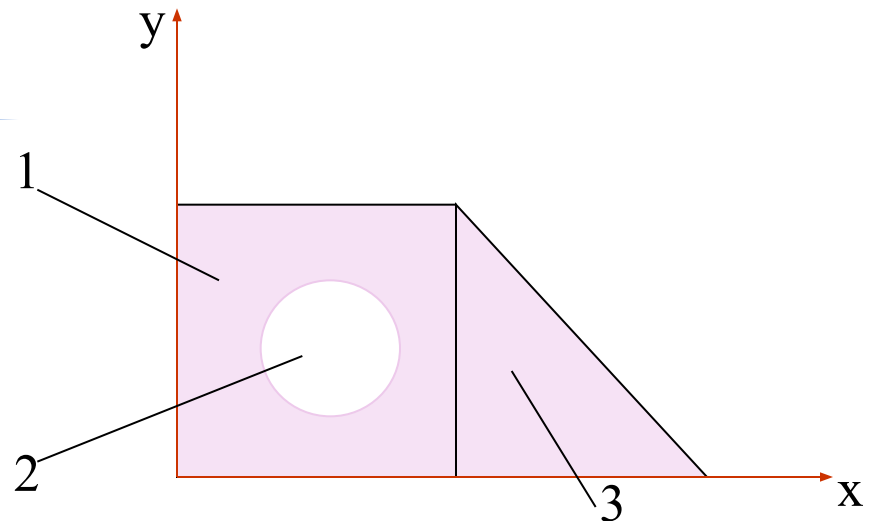


Если сечение имеет одну ось симметрии, то центр тяжести располагается на этой оси, поэтому для нахождения т.С достаточно найти только одну координату.

Сложное сечение

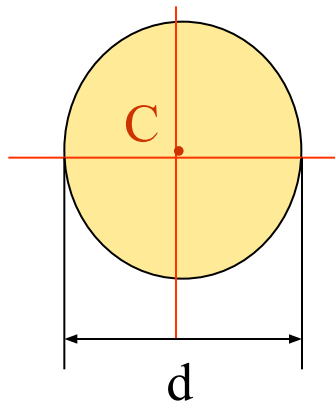
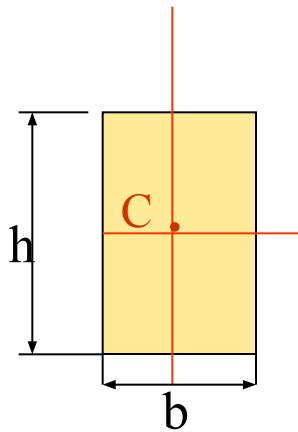
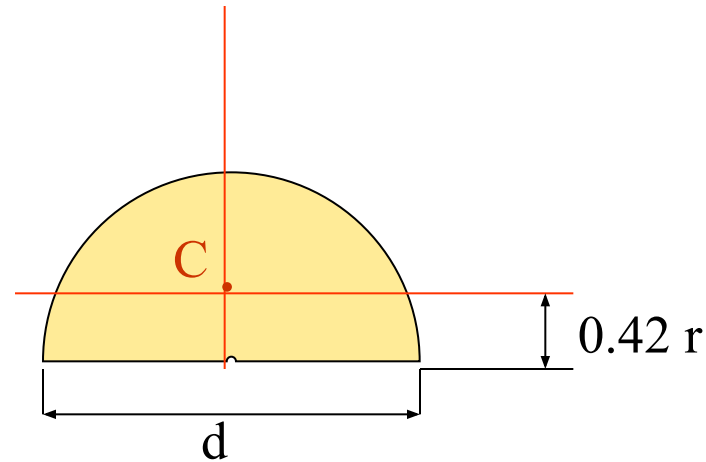
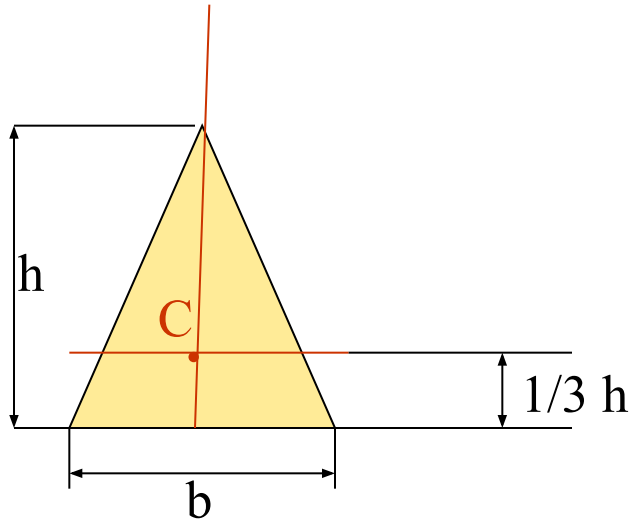
$$Y_c = \frac{\sum_i S^i_x}{\sum_i A_i}$$
$$X_c = \frac{\sum_i S^i_y}{\sum_i A_i}$$

(2')

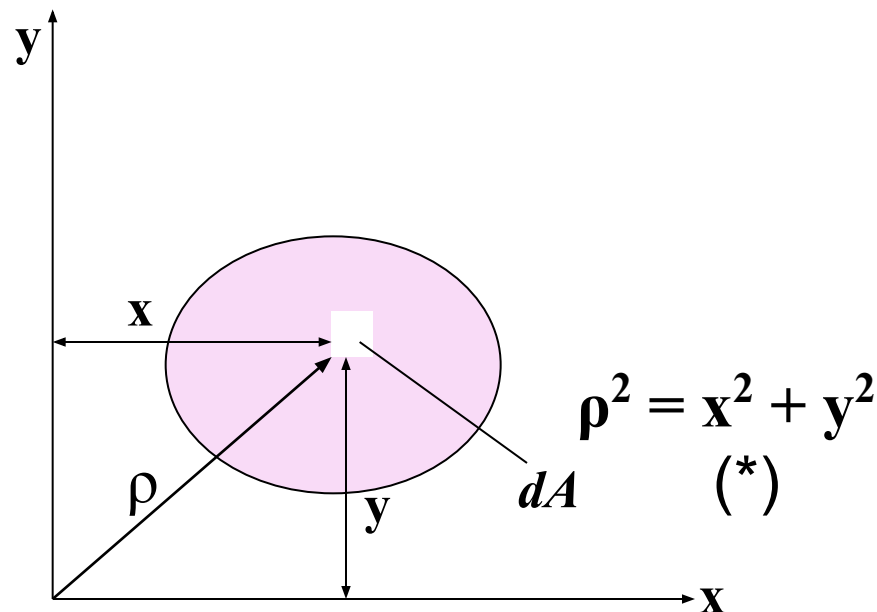
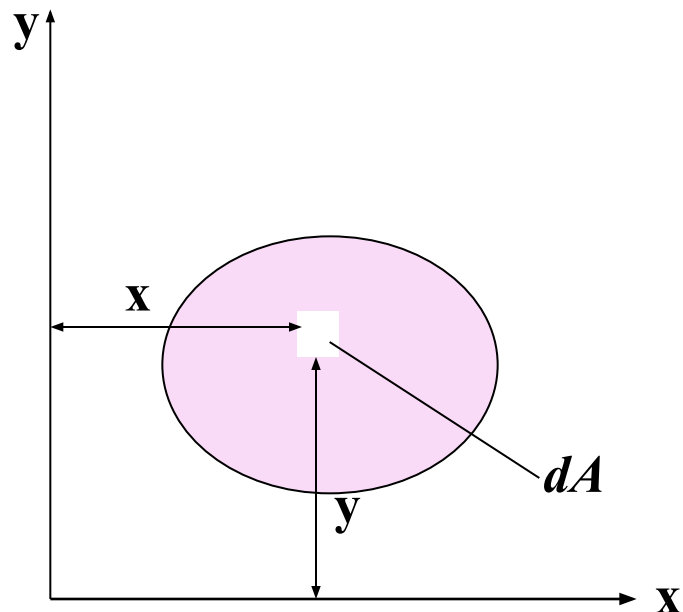


Геометрические характеристики

Сложное сечение разбивается на сечения, центры тяжести которых известны. Запишем их положение для некоторых сечений.



1.3. Моменты инерции поперечного сечения – I_x, I_y, I_{xy}, I_p .



Осевые моменты

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \cdot dA \\ I_y &= \int_A x^2 \cdot dA \end{aligned} \right\} > 0 \quad (3)$$

$$[I] = [\text{длина}^4]$$

Центробежный момент

$$I_{xy} = \int_A x y \cdot dA \quad (4)$$

$$> 0, = 0, < 0$$

Полярный момент

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA \quad (5)$$

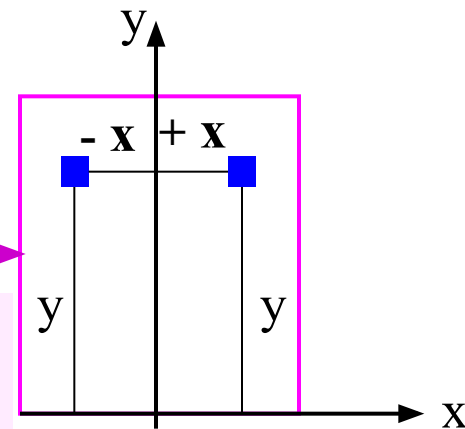
(*)

$$I_p = I_x + I_y \quad (6)$$

Еще раз о центробежном моменте.

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA = \int_{A/2} xy \cdot dA + \int_{A/2} (-x)y \cdot dA = 0$$

Центробежный момент инерции относительно осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю. Обратное также верно.



Сложное сечение

$$I_{x, y} = \sum_i^n I_{x, y}^i$$

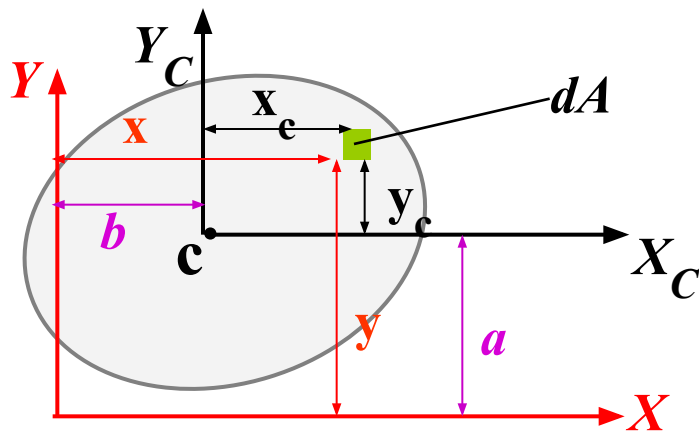
$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} - I_x^{(2)} + I_x^{(3)} \\ I_y &= I_y^{(1)} - I_y^{(2)} + I_y^{(3)} \end{aligned} \right\}$$

Центральные моменты инерции – моменты относительно центральных осей. Поскольку центральных осей – бесконечное множество, центральных моментов также – бесконечное множество

1.4. Моменты инерции простейших сечений

1.5. Изменение моментов инерции при преобразовании осей

Параллельный перенос



$$x = x_c + b; (*) \quad y = y_c + a; (**)$$

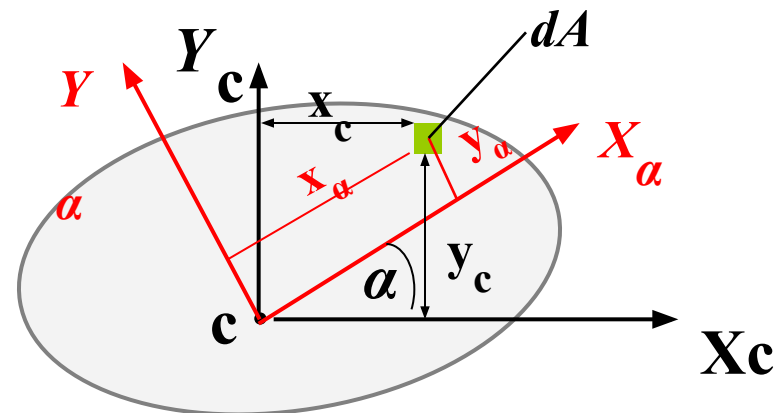
Дано: $I_{x_c}, I_{y_c}, I_{x_c y_c}$. $I_x, I_y, I_{xy} = ?$

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = (**) = I_{x_c} + a^2 \cdot A$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = (*) = I_{y_c} + b^2 \cdot A$$

$$I_{xy} = \int_A xy \cdot dA = (*), (**) = I_{x_c y_c} + ab \cdot A$$

Поворот осей



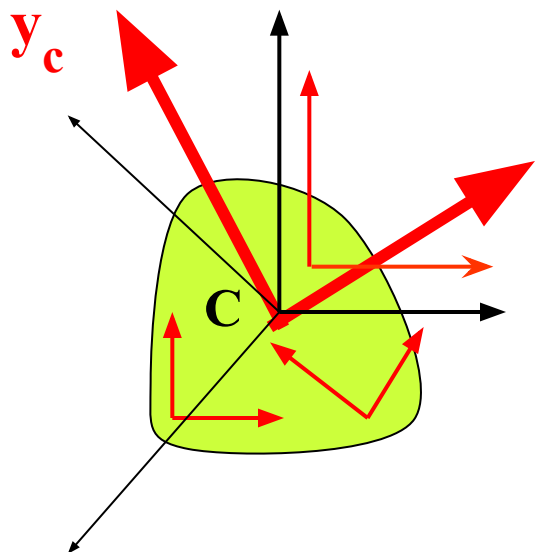
$$\left. \begin{aligned} x_a &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_a &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

Дано: $I_{x_c}, I_{y_c}, I_{x_c y_c}$.

$$(7) \quad I_{x_a} = ? \quad I_{y_a} = ? \quad I_{x_a y_a} = ? \quad (8)$$

1.6. Главные оси. Главные моменты.

Главные оси – оси, относительно которых $I_{xy} = 0$



Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными**.

x_c Один главный момент инерции – максимален (**I_{max}**), другой – минимален (**I_{min}**) среди других моментов инерции.

Существует множество главных осей, но практический интерес представляют

**главные центральные оси – X_c, Y_c
и главные центральные моменты I_{x_c}, I_{y_c} .**

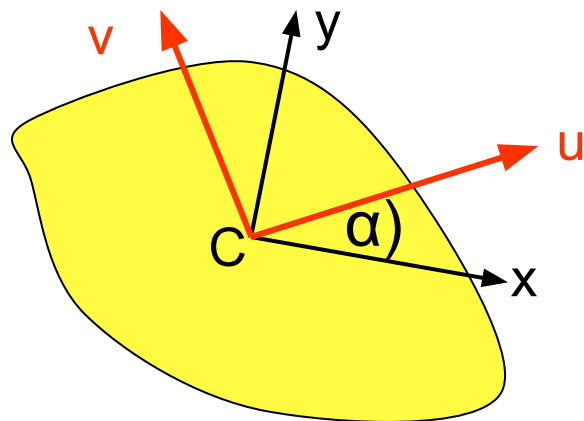
В общем случае гл. центр.оси - единственные из бесконечного числа центральных осей.

Главные центральные моменты «входят» в большинство расчетных формул

Оси симметрии всегда являются главными центральными осями !

Поэтому, если тело имеет хотя бы одну ось симметрии, нахождение главных центральных осей не представляет трудностей.

В случае отсутствия осей симметрии, нужно провести любые центральные оси, определить для них центральные моменты (осевые и центробежный), и затем повернуть эти оси на угол:



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x},$$

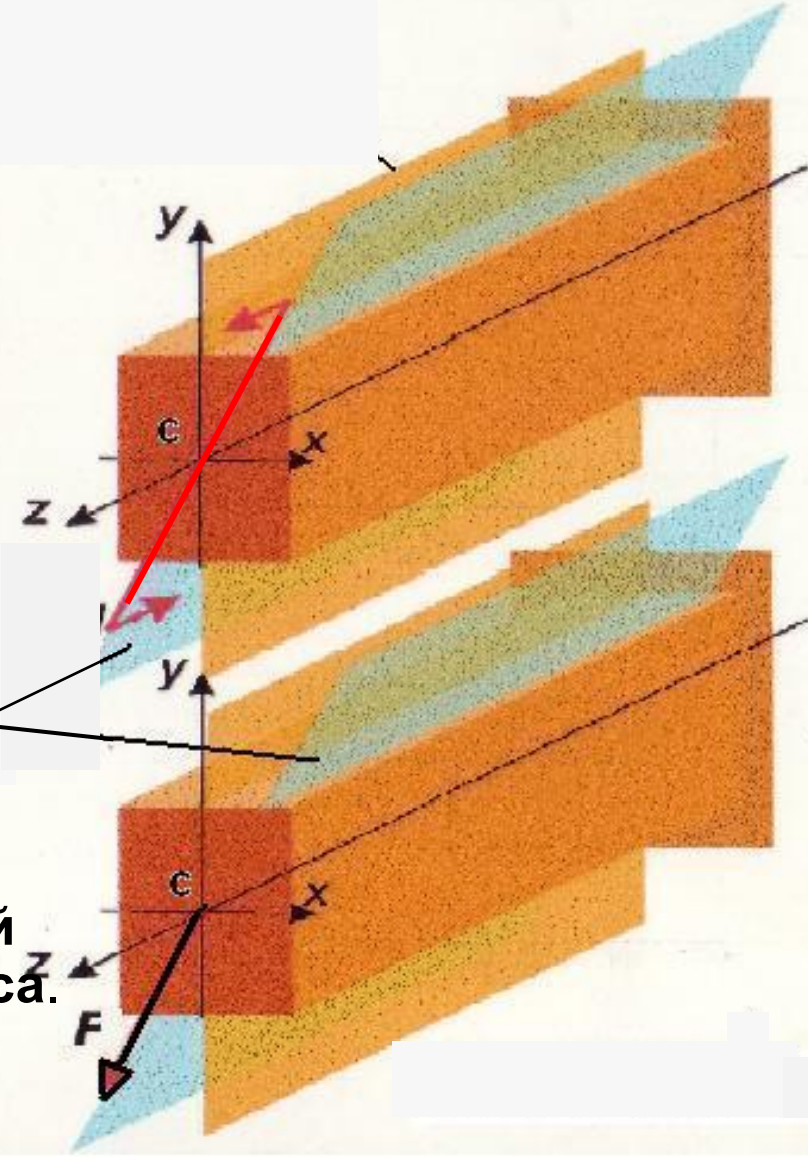
и получим оси **u, v** – главные центральные оси.

СИЛОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Силовая плоскость – плоскость, проходящая через линию действия внешнего силового фактора и продольную ось бруса.

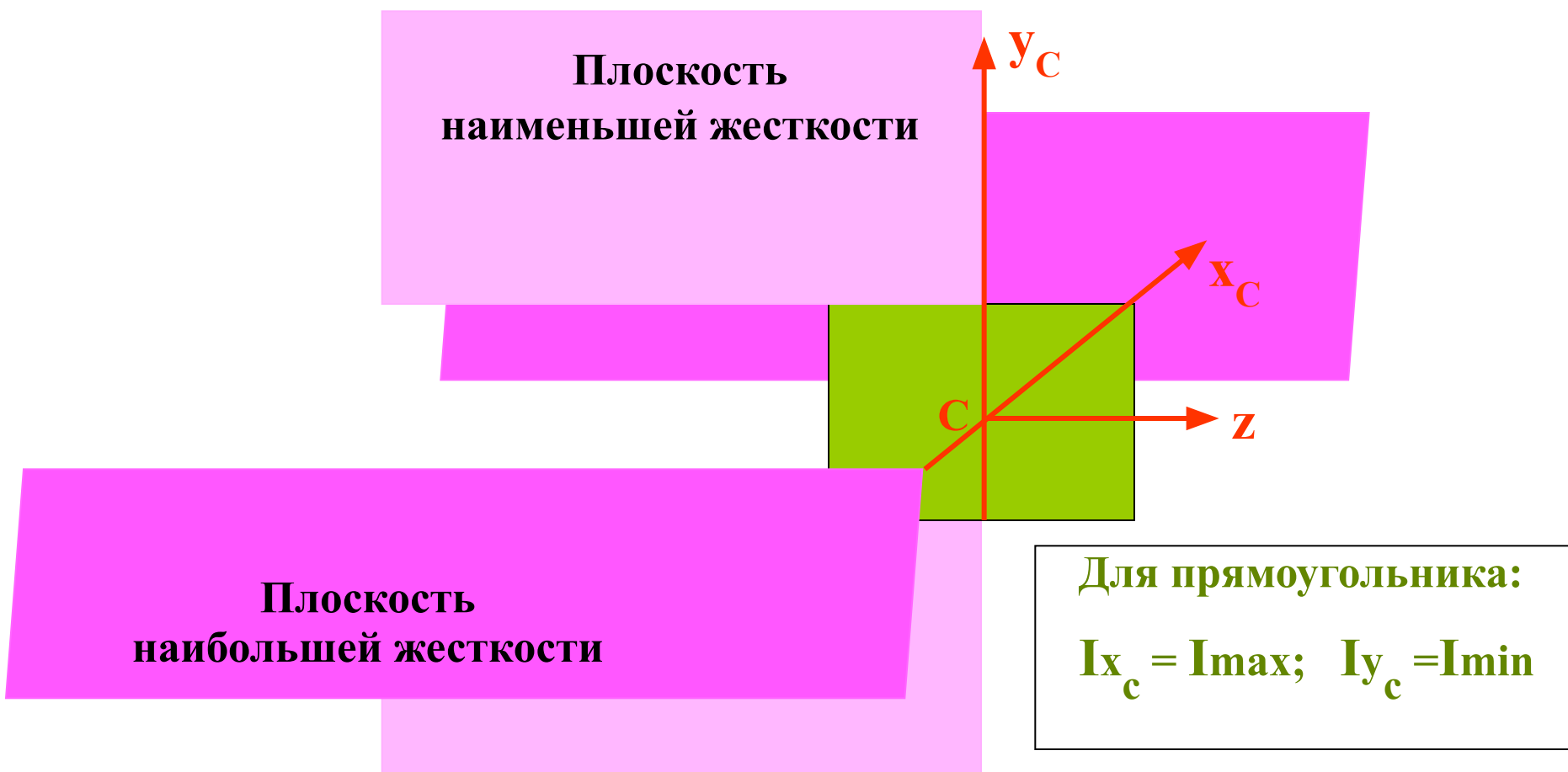


Силовая
плоскость



Силовая линия – пересечение силовой плоскости с поперечным сечением бруса.

1.7. Главные центральные плоскости



Главная центральная плоскость (главная плоскость) – плоскость, проходящая через продольную ось бруса и главную центральную ось.

Расчет бруса зависит от ориентации силовой плоскости относительно главных плоскостей.

Геометрические характеристики

Прокатные поперечные сечения

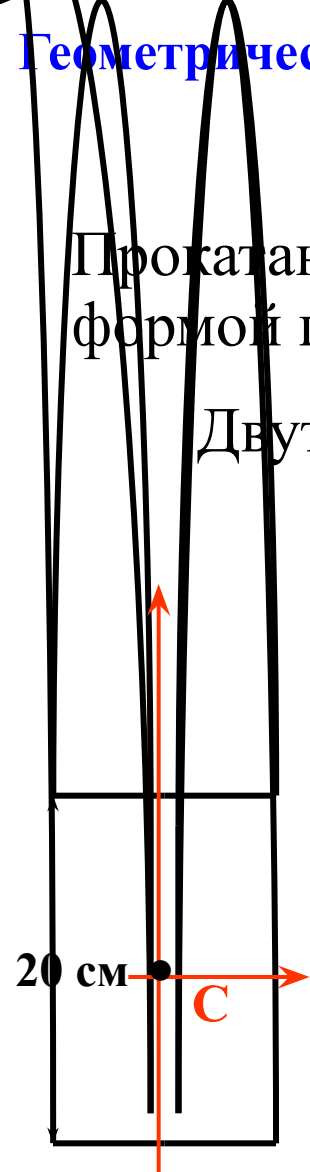
Прокатанный профиль – это прокатанный металл с определенной формой поперечного сечения. Основные виды:

Двутавр

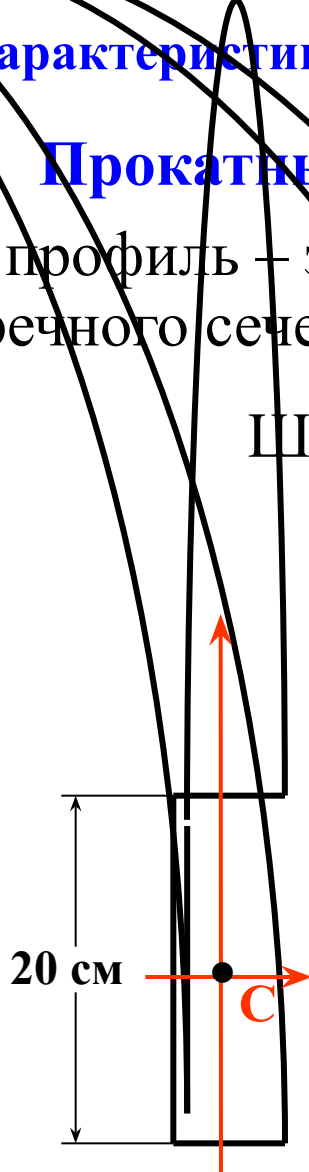
Швеллер

Неравнобокий
уголок

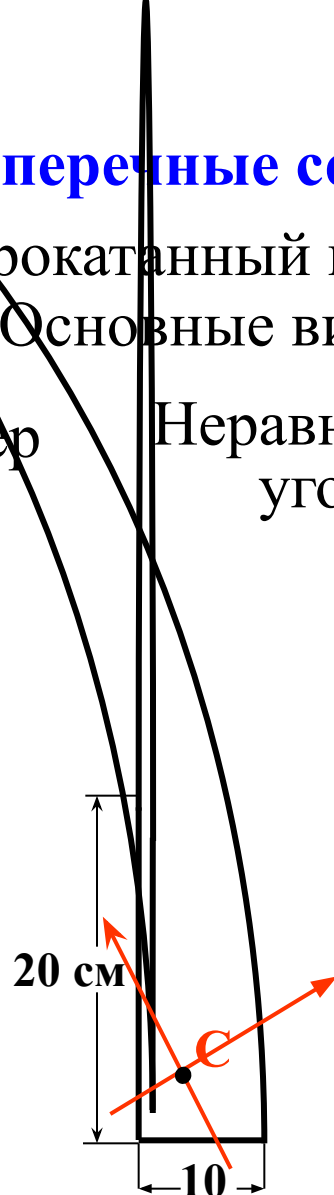
Равнобокий
уголок



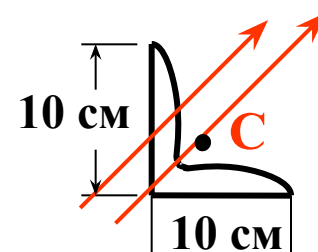
№20



№20



200 x 100 x 11



100 x 100 x 80

Сортамент прокатной стали (ГОСТ №...)

Итог по теме «Геометрические характеристики»

