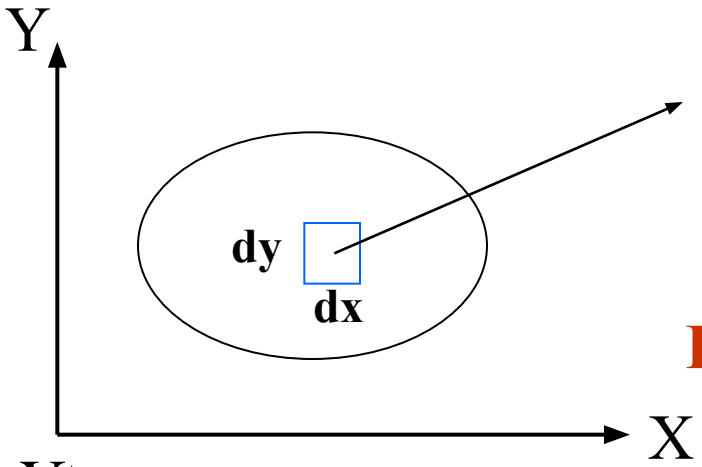
Лекция

Геометрические характеристики плоских сечений

1. Геометрические характеристики поперечных сечений

Сопротивление бруса внешним силам зависит не только от его размеров и материала, но и от формы поперечного сечения, геометрические свойства которого выражаются численно посредством геометрических характеристик.

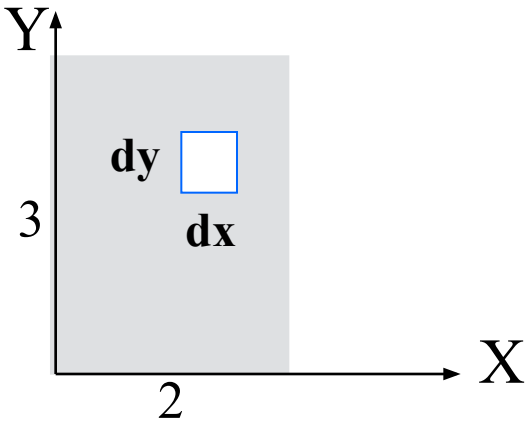
1.1. Площадь поперечного сечения - А



$$dA = dx \cdot dy$$

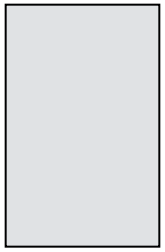
$$\iint_A dxdy = \int_A dA = A$$

Размерность А: [А] = [длина ^{2}] = [м^2]

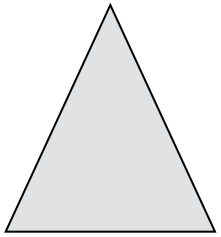


$$A = \iint_A dxdy = \int_0^2 dx \int_0^3 dy = x\Big|_0^2 \; y\Big|_0^3 = 6 \; (ед^2).$$

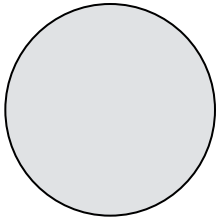
Простейшие виды поперечных сечений:



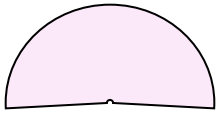
$A = b \cdot h$



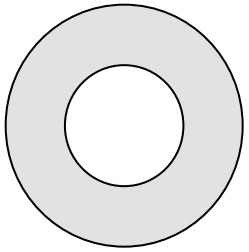
$A = ½\, b \cdot h$



$A = \pi d^2/4$



$A = \pi d^2/8$

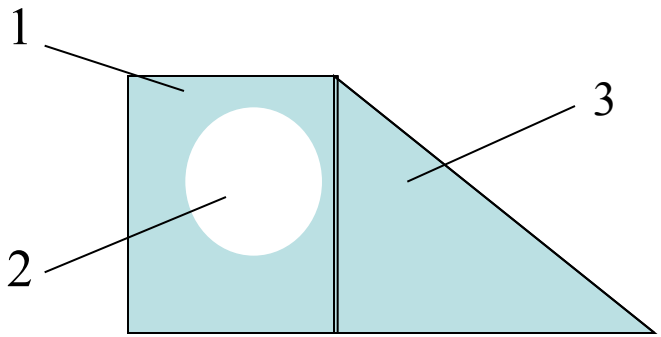


$A = \pi\, D^2(1-\alpha^2)/4;$

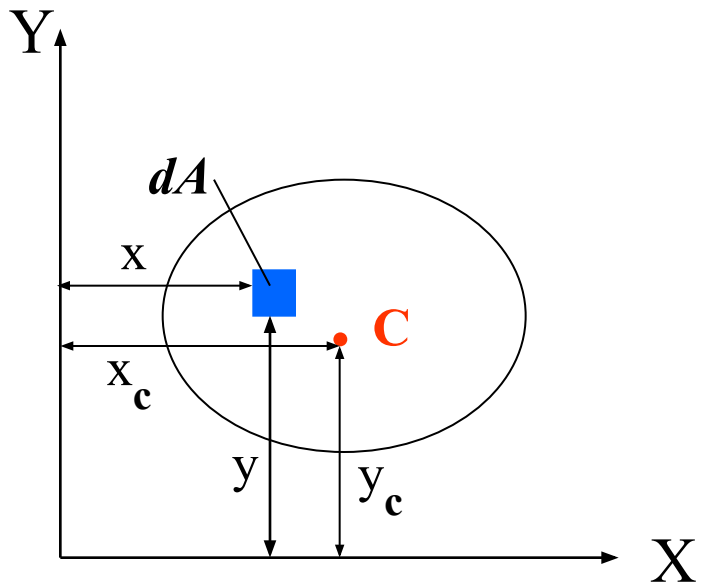
$\alpha = d/D$

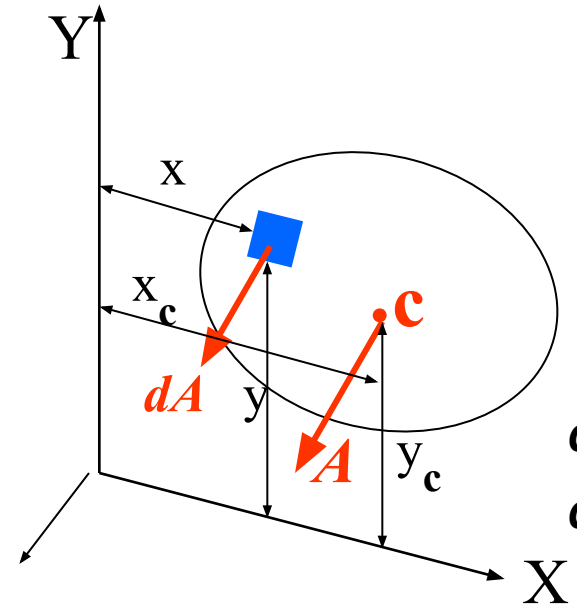
Сложное сечение

$$A = \sum_{i}^{n} A_i = (A_1 - A_2 + A_3) > 0$$



1.2. Статические моменты поперечного сечения – S_x , S_y





$dA \cdot y = dM_x$

$dA \cdot x = dM_y$

$$\left.\begin{aligned} S_X &= \int y \cdot dA, \\ S_Y &= \int x \cdot dA. \end{aligned}\right\} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{matrix} \quad (1)$$

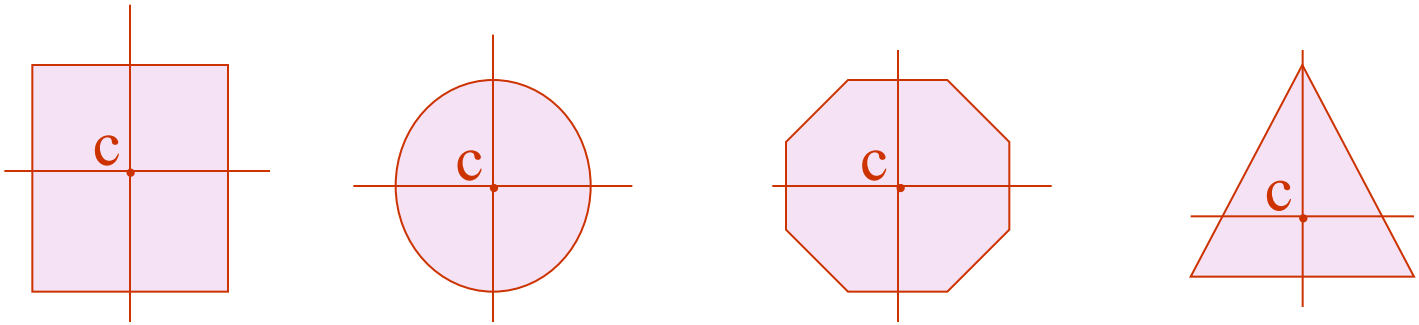
$$\begin{aligned} S_X &= \int y \cdot dA = A \cdot y_C \longrightarrow \\ S_Y &= \int x \cdot dA = A \cdot x_C \longrightarrow \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} y_C &= S_X / A \\ x_C &= S_y / A \end{aligned}} \quad (2)$$

[S] = [длина^3]

Оси, проходящие через центр тяжести, называются **центральными**.
Центральных осей – бесконечное множество.

Из (2) $\longrightarrow$ **$S_{y,\,x} = 0$ для центральных осей**

Во многих случаях положение центра тяжести можно определить непосредственно.Например, если сечение имеет ≥ 2 осей симметрии:



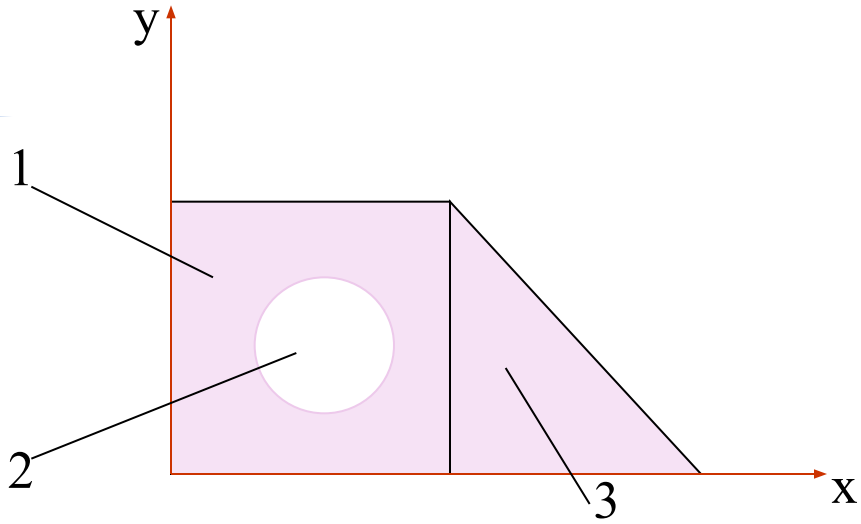
Если сечение имеет одну ось симметрии, то центр тяжести располагается на этой оси, поэтому для нахождения т.С достаточно найти только одну координату.

Сложное сечение

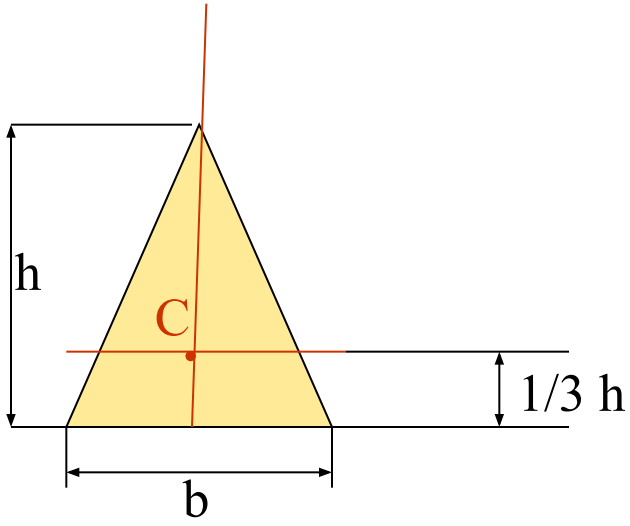
$$Y_C = \frac{\sum_i S^i_x}{\sum_i A_i}$$

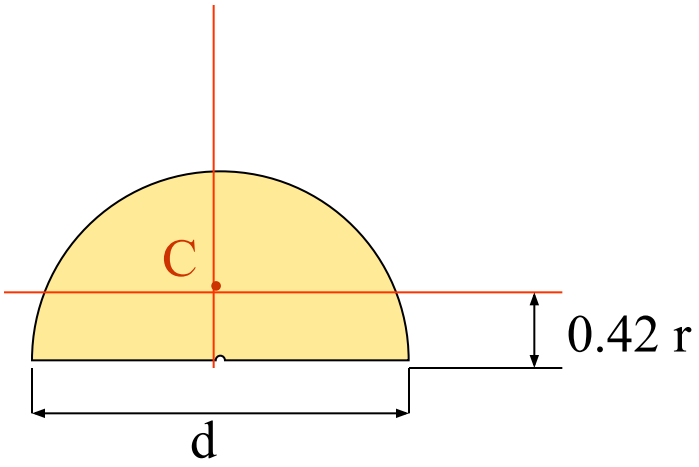
$$X_C = \frac{\sum_i S^i_y}{\sum_i A_i}$$

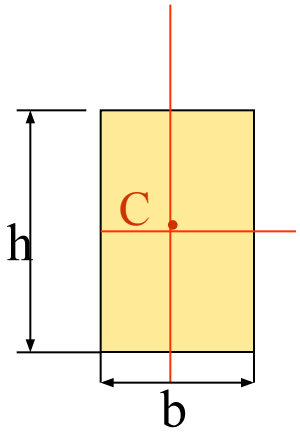
(2')

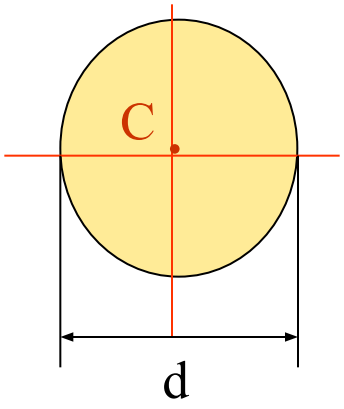


Сложное сечение разбивается на сечения, центры тяжести которых известны. Запишем их положение для некоторых сечений.

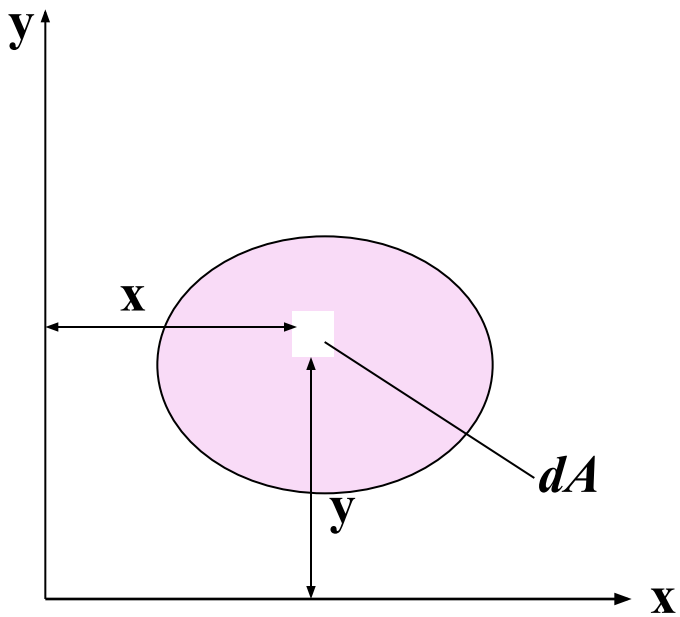


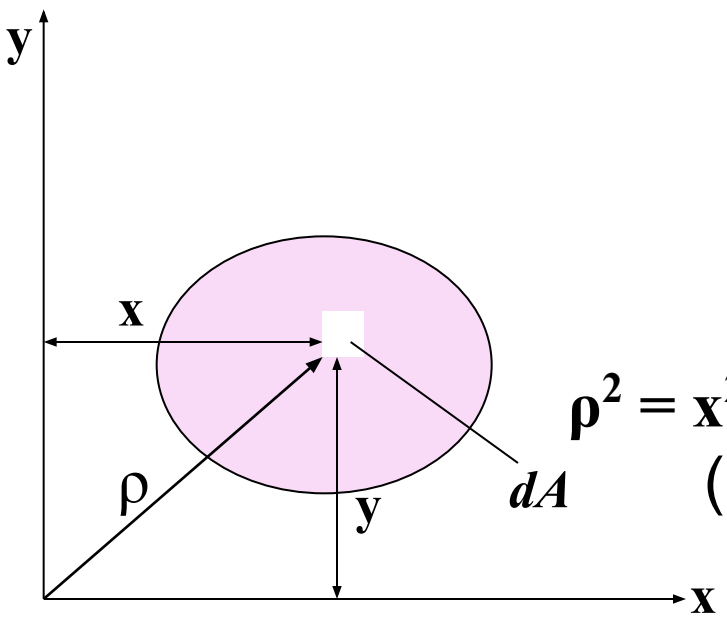






1.3. Моменты инерции поперечного сечения – I_x, I_y, I_{xy}, I_p.





$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (*)$$

Осевые моменты

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA;$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA.$$

> 0 **(3)**

$[I] = [\text{длина}^4]$

Центробежный момент

$$I_{xy} = \int_A x\,y \cdot dA \quad \textbf{(4)}$$

$> 0, \; = 0, \; < 0$

Полярный момент

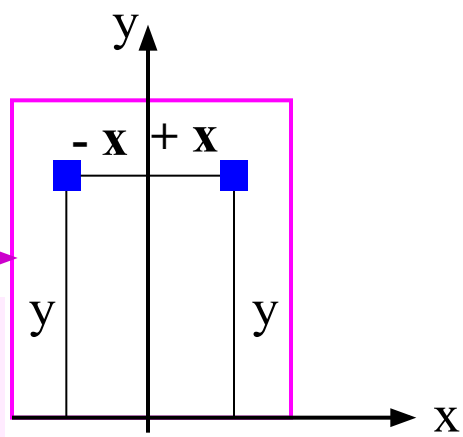
$$I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA \quad \textbf{(5)}$$

(*)

$$I_\rho = I_x + I_y \quad \textbf{(6)}$$

Еще раз о центробежном моменте.

$$I_{xy} = \int_{A} xy \cdot dA = \int_{A/2} xy \cdot dA + \int_{A/2} (-x)y \cdot dA = 0$$



Центробежный момент инерции относительно осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю. Обратное также верно.

Сложное сечение

$$I_{x,y} = \sum_{i}^{n} I_{x,y}^{i}$$

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} + I_x^{(3)}$$

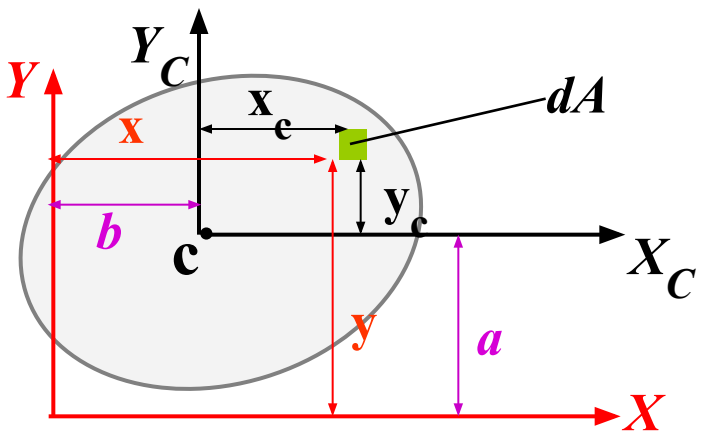
$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} + I_y^{(3)}$$

Центральные моменты инерции – моменты относительно центральных осей. Поскольку центральных осей – бесконечное множество, центральных моментов также – бесконечное множество

1.4. Моменты инерции простейших сечений

1.5. Изменение моментов инерции при преобразовании осей

Параллельный перенос



$x = x_C + b$; (*) $y = y_C + a$; (**)

Дано: Ix_c , Iy_c, Ix_cy_c. Ix, Iy, Ixy = ?

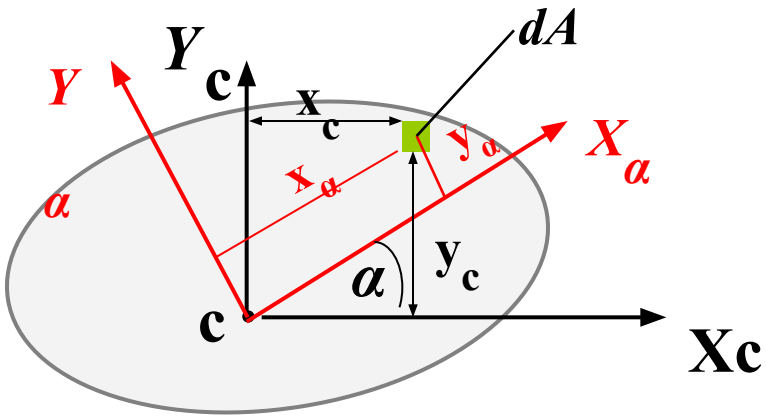
$$Ix = \int_A y^2 \cdot dA = (**) = Ix_c + a^2 \cdot A$$

$$Iy = \int_A x^2 \cdot dA = (*) = Iy_c + b^2 \cdot A$$

$$Ixy = \int_A xy \cdot dA = (*),(**) = Ix_cy_c + ab \cdot A$$

(7)

Поворот осей



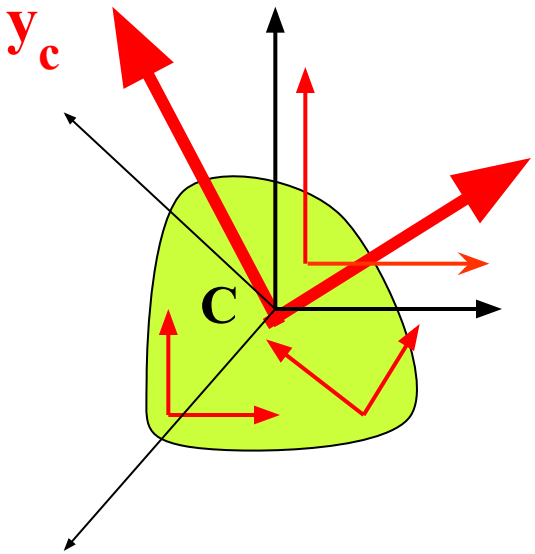
$$x_\alpha = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$
$$y_\alpha = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

Дано: Ix_c , Iy_c, Ix_cy_c.

$Ix_\alpha = ?$ $Iy_\alpha = ?$ $Ix_\alpha y_\alpha = ?$ (8)

1.6. Главные оси. Главные моменты.

Главные оси – оси, относительно которых $I_{xy} = 0$



Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными.

Один главный момент инерции – максимален (**Imax**), другой – минимален (**Imin**) среди других моментов инерции.

Существует множество главных осей, но практический интерес представляют

главные центральные оси – X_c, Y_c

и главные центральные моменты I_{x_c}, I_{y_c} .

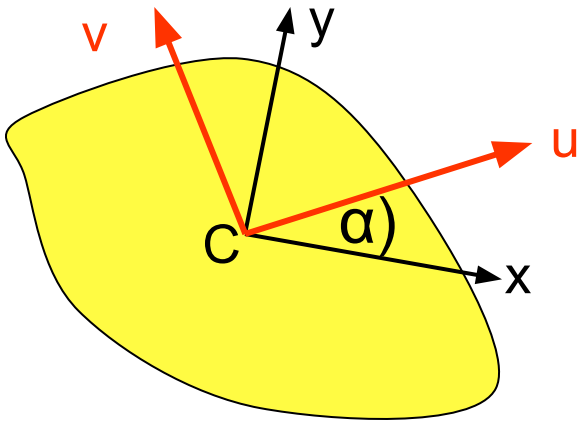
В общем случае гл. центр.оси - единственные из бесконечного числа центральных осей.

Главные центральные моменты «входят» в большинство расчетных формул

Оси симметрии всегда являются главными центральными осями !

Поэтому, если тело имеет хотя бы одну ось симметрии, нахождение главных центральных осей не представляет трудностей.

В случае отсутствия осей симметрии, нужно провести любые центральные оси, определить для них центральные моменты (осевые и центробежный), и затем повернуть эти оси на угол:

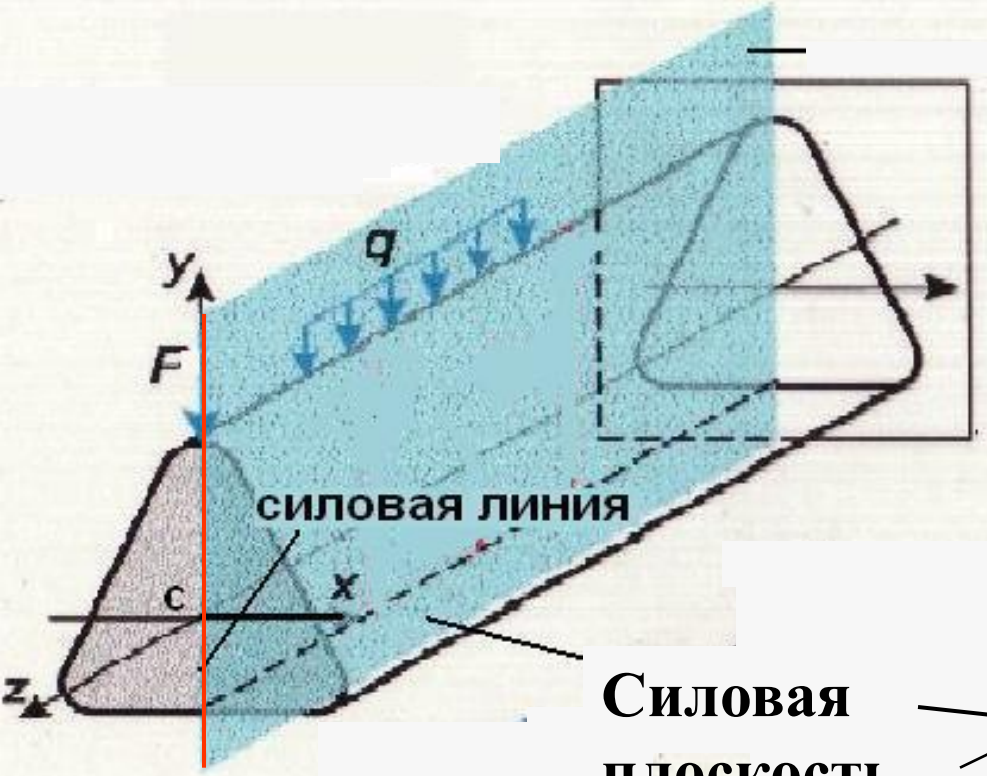


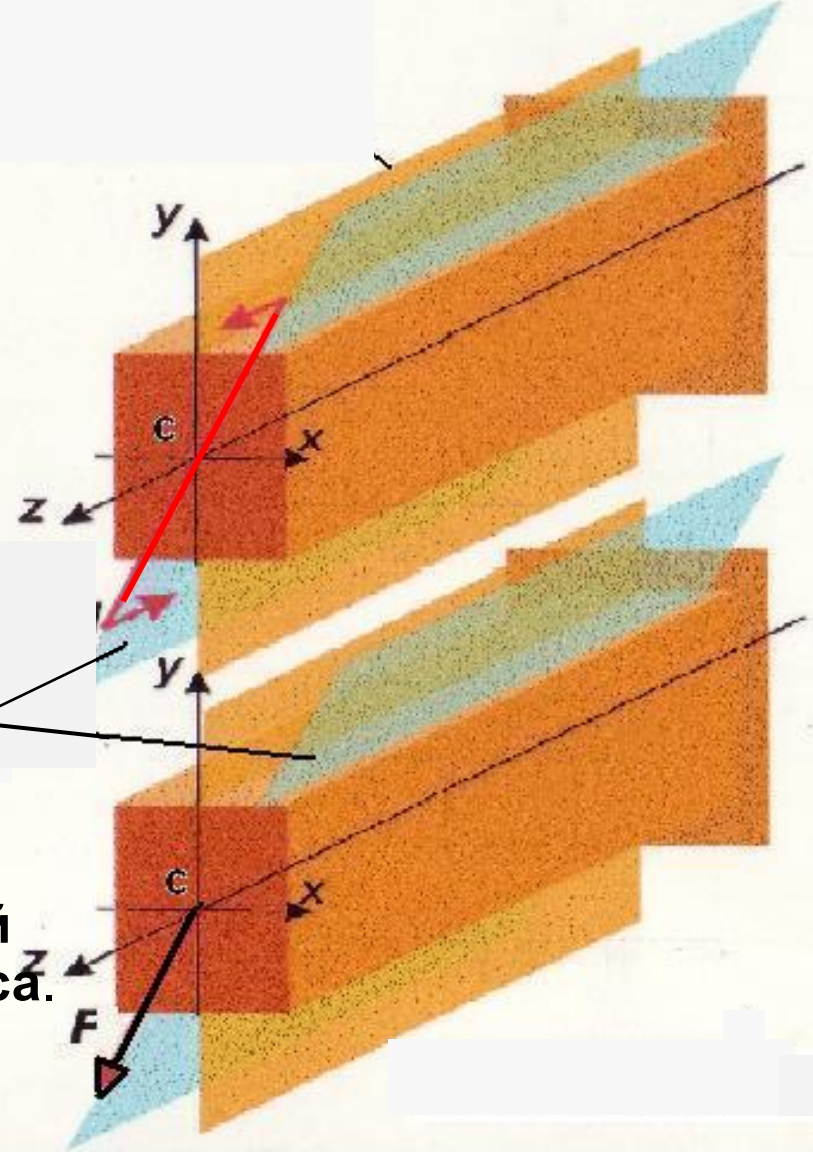
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x},$$

и получим оси u,v – главные центральные оси.

СИЛОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Силовая плоскость – плоскость, проходящая через линию действия внешнего силового фактора и продольную ось бруса.

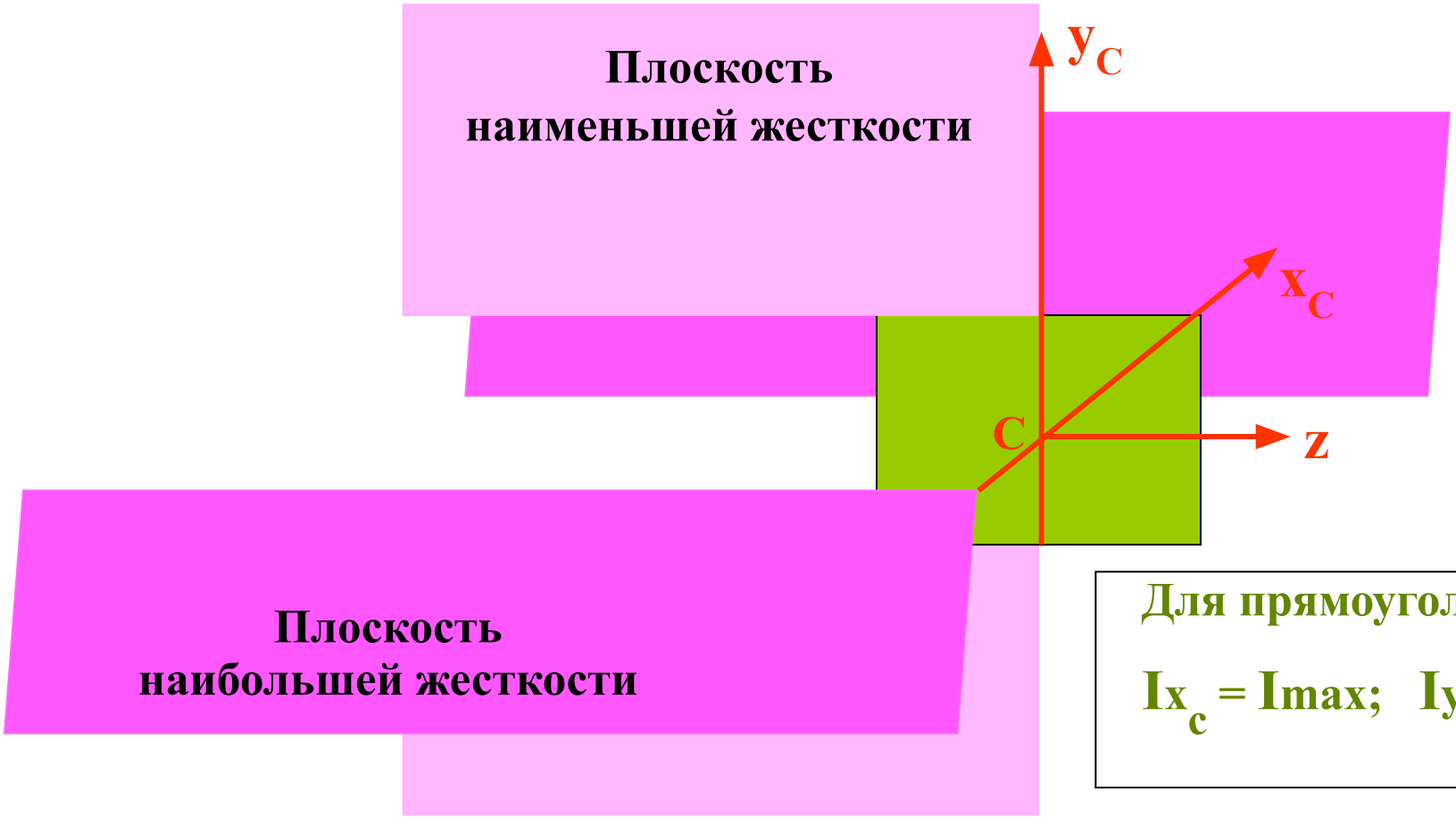




Силовая плоскость

Силовая линия – пересечение силовой плоскости с поперечным сечением бруса.

1.7. Главные центральные плоскости



Для прямоугольника:

$Ix_c = Imax; \quad Iy_c = Imin$

Главная центральная плоскость (главная плоскость) – плоскость, проходящая через продольную ось бруса и главную центральную ось.

Расчет бруса зависит от ориентации силовой плоскости относительно главных плоскостей.

Прокатные поперечные сечения

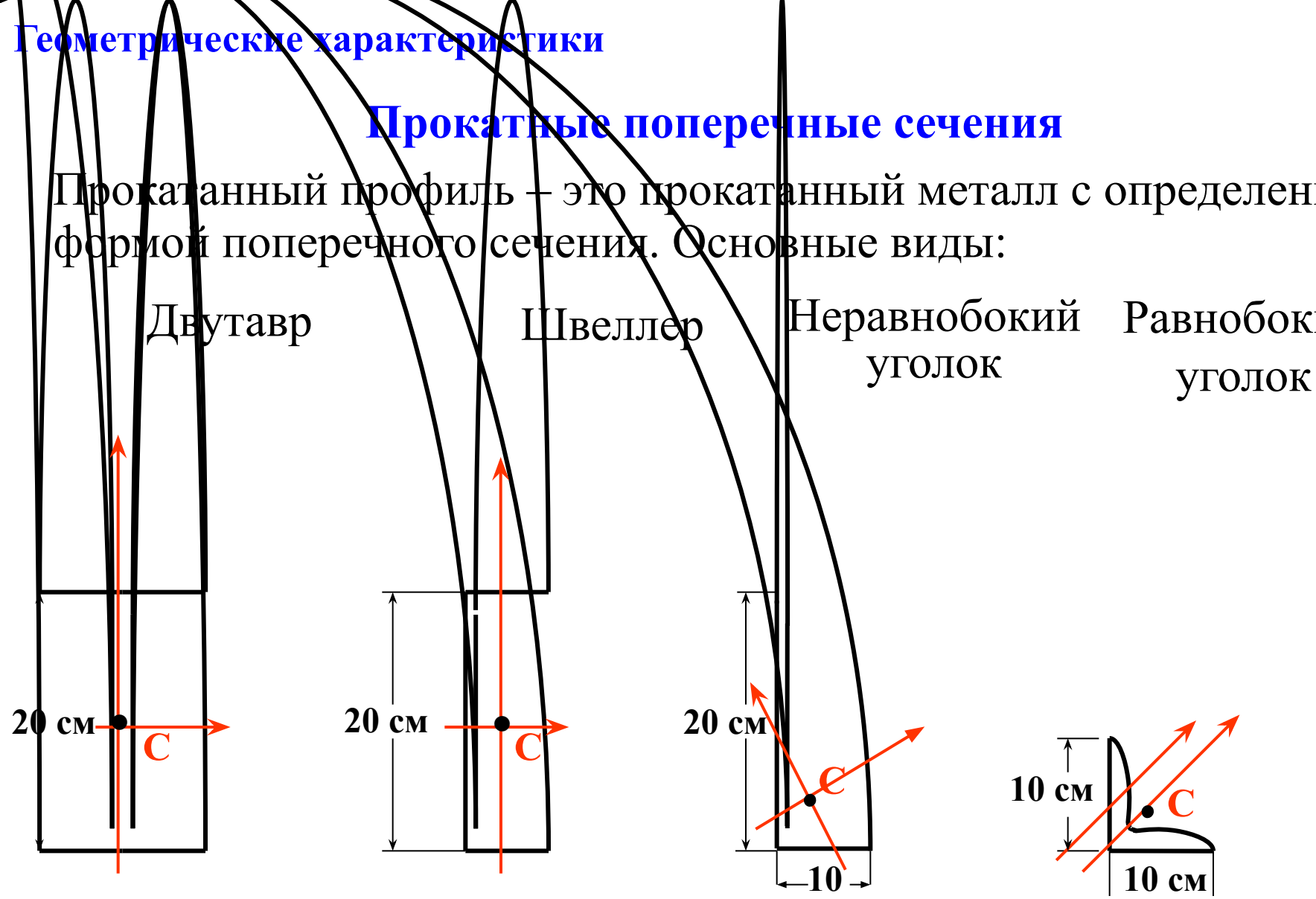
Прокатанный профиль – это прокатанный металл с определенной формой поперечного сечения. Основные виды:

Двутавр

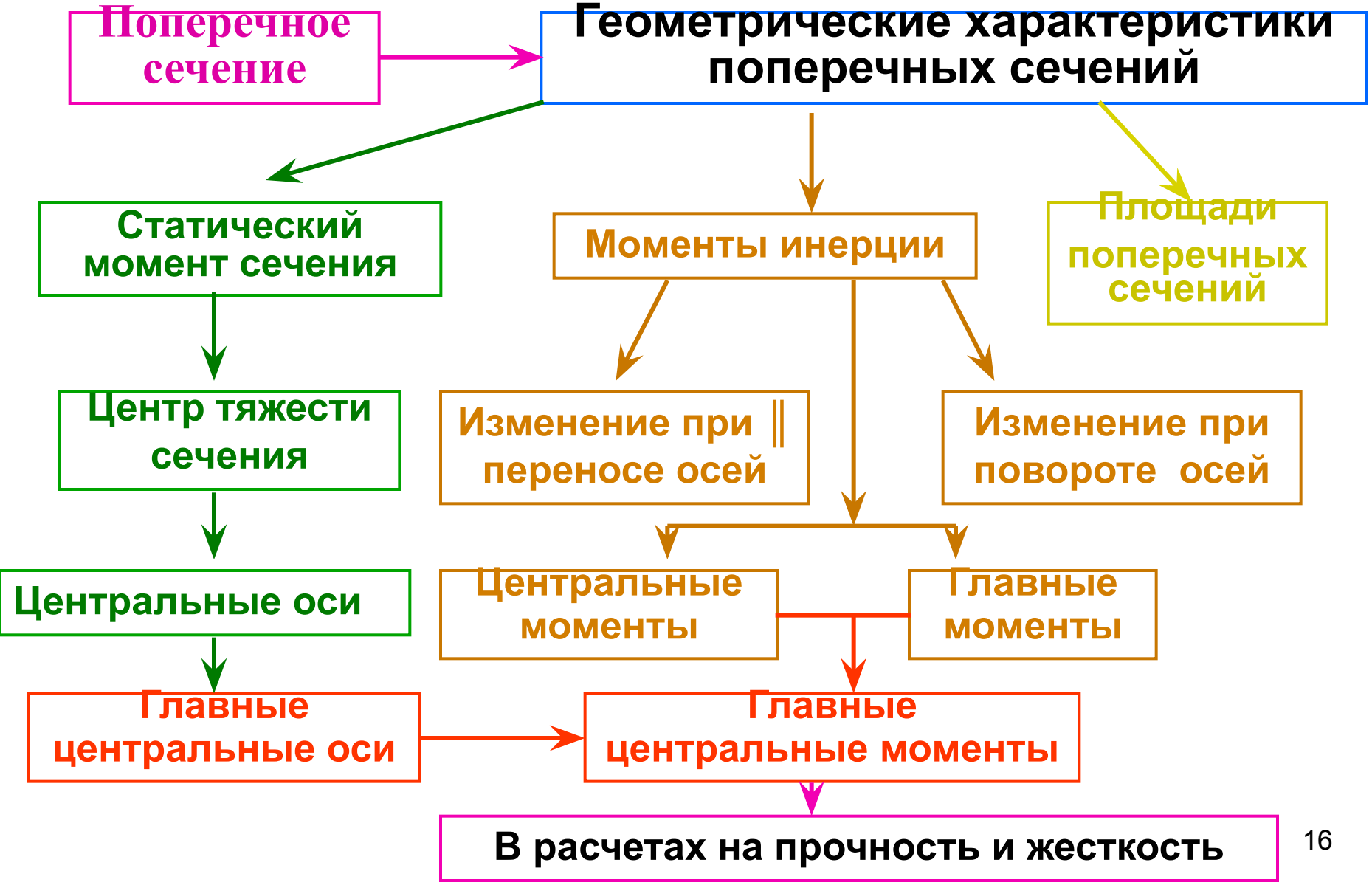
Швеллер

Неравнобокий уголок

Равнобокий уголок



№20 №20 200 x 100 x11 100×100×80

Сортамент прокатной стали (ГОСТ №…)

Итог по теме «Геометрические характеристики»