Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Основные способы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, метод подстановки или замены переменной, интегрирование по частям). Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Основные способы интегрирования (замена переменной и интегрирование по частям). Геометрический смысл определенного интеграла. Нахождение простейших определенных и неопределенных интегралов.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Определение. *Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx\ .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx\ .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C\ .$$

Замечание. Формула $\int dF(x) = F(x) + C$ остается справедливой, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов.

Таблица 1 неопределенных интегралов

1) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2) $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C \left(\text{более точно} = \begin{cases} ln\, x + C_1, \text{при } x > 0 \\ ln(-x) + C_2, \text{при } x < 0 \end{cases} \right).$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C, \ (0 < a \neq 1).$

4) $\int e^x dx = e^x + C.$

5) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

6) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

7) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

8) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C.$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C.$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

12) $\int sin\, xdx = -cosx + C.$

13) $\int cos\, xdx = sinx + C.$

14) $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C.$

15) $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C.$

Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\operatorname{arctg}x+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin\frac{x}{4} + C.$$

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)\,dx.$$

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$\int (2^x + 3^x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int (\sin x + 5\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Метод подстановки. *Метод подстановки (или замены переменной)* заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)\,dt$ и получают

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Вычислить интеграл $\int \cos 3x\,dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Применим подстановку $t=3x$; тогда $dt=(3x)'\,dx=3dx$, $dx=1/3\,dt$. Подставив в интеграл, получаем

$$\int \cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt=\frac{1}{3}\sin t+C.$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

$\int \cos 5x\, dx.$

$\int e^{2x}\, dx.$

3. Метод интегрирования по частям.

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

Вычислить интеграл $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Решение. Полагая $u = x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$, найдем

$$\mathrm{d}u = (x)'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x; \int \mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x,\ v = e^x$$

По формуле (3) получаем

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

2. Определенный интеграл

Если $f(x) > 0$ на $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь <u>криволинейной трапеции</u> – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 1).

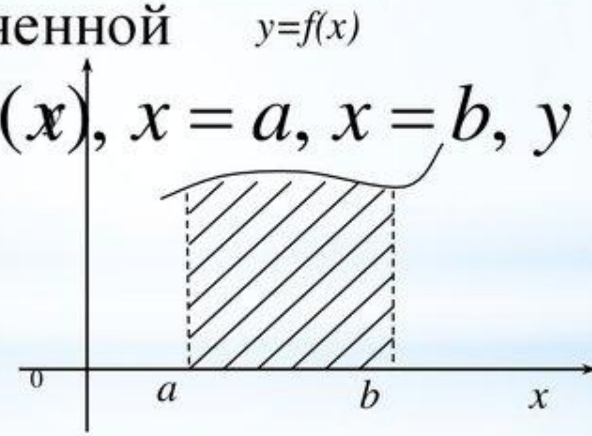


Рис. 1

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Свойства определённого интеграла

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

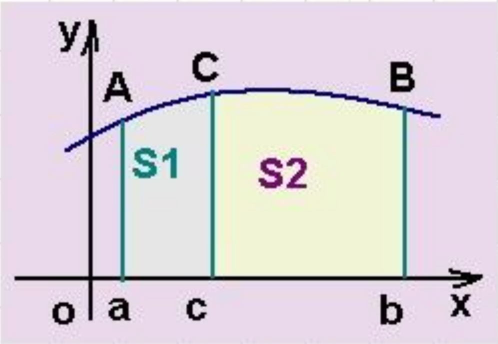
$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3. Если a < c < b, то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



(аддитивное свойство интеграла)

$$\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx.$$

$$\int_0^2 x(3 - x)\,dx.$$

$$\int_1^2 e^x\,dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$