

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла. Основные способы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, метод подстановки или замены переменной, интегрирование по частям).

Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Основные способы интегрирования (замена переменной и интегрирование по частям). Геометрический смысл определенного интеграла. Нахождение простейших определенных и неопределенных интегралов.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Определение. Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, k \neq 0.$$

2. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx .$$

3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx .$$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C .$$

Замечание. Формула $\int dF(x) = F(x) + C$ остается справедливой, если вместо x подставить любую дифференцируемую функцию.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов.

Таблица 1 неопределенных интегралов

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \left(\text{более точно} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x + C_1, \text{ при } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, \text{ при } x < 0 \end{array} \right\} \right).$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1).$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$6) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$8) \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$12) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$13) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$14) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$15) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Основные методы интегрирования

1. **Непосредственное интегрирование.** Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

$$\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx =$$
$$= 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln |x| - 4 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx.$$

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

$$\int (2^x + 3^x) dx.$$

$$\int (\sin x + 5\cos x) dx.$$

2. Метод подстановки. Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t) dt$ и получают

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Вычислить интеграл $\int \cos 3x dx$.

Решение. Интеграл не табличный. Применим подстановку $t = 3x$; тогда $dt = (3x)' dx = 3dx$, $dx = 1/3 dt$. Подставив в интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \int \cos 3x dx &= \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C. \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

$$\int \cos 5x \, dx.$$

$$\int e^{2x} \, dx.$$

3. Метод интегрирования по частям.

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

Вычислить интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. Полагая $u = x$, $dv = e^x dx$, найдем

$$du = (x)' dx = dx; \int dv = \int e^x dx, v = e^x$$

По формуле (3) получаем

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

2. Определенный интеграл

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной $y=f(x)$ линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 1).

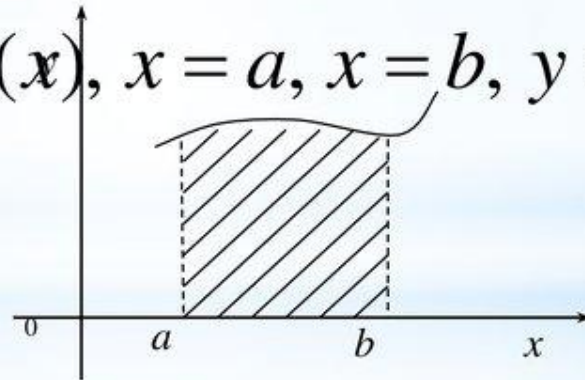


Рис. 1

Определенный интеграл



$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.



MyShared



Свойства определённого интеграла

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

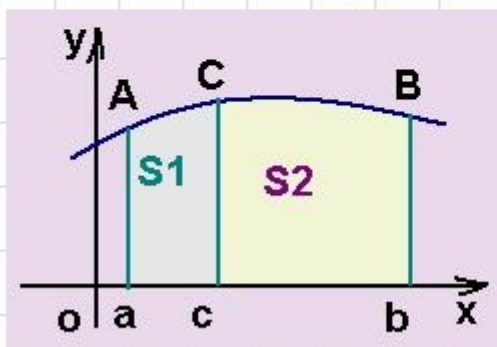
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

3. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



(аддитивное свойство
интеграла)

$$\int_0^2 (3x^2 - 1) dx.$$

$$\int_0^2 x(3 - x) dx.$$

$$\int_1^2 e^x dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$