

Лекция № 6

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Учебные вопросы

1. Классификация функций.
2. Основные элементарные функции. Их свойства и графики.

Вопрос № 1. Классификация функций

Основные элементарные функции:

а) степенная: $y = x^n$, $n \in R$;

б) показательная: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

в) логарифмическая: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

г) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$,
 $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) обратные тригонометрическим: $y = \arcsin x$,
 $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических операций (сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в целую степень и извлечения корня) и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными**. **Пример:**

$$y = \arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 3}} + 1\right) - \ln(x)$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий.

$$y = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 3}}{x}$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Алгебраические функции подразделяются на рациональные и иррациональные.

Рациональными называются алгебраические функции, которые не содержат аргумент под знаком радикала (корня).

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Рациональные функции разделяются на целые рациональные функции (многочлены) и дробные рациональные (отношение многочленов).

Пример целой рациональной функции:

$$y = \frac{1}{2}x^4 + x - 1$$

Пример дробно-рациональной функции:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$$

Иррациональные функции

Иррациональными называются алгебраические функции, содержащие аргумент под знаком радикала (корня).

Например,

$$y = \sqrt[3]{x + 1}.$$

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Трансцендентными (неалгебраическими) называют элементарные функции, которые не являются алгебраическими. (То есть, они образованы при помощи возведения в иррациональную степень, логарифмирования, с использованием тригонометрических и обратных тригонометрических операций).

$$y = \left(\frac{x+1}{5x - \pi\sqrt{7}} \right)^{\sqrt[3]{2}}, \quad y = \log_2 \left(x^3 + \frac{2}{3} \right)$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Замечание. Если вид элементарной функции можно упростить на всей области определения, то классификации подлежит именно упрощенная функция.

Например,

$$y = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$$

- не иррациональная функция, а рациональная, так как

$$y = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2} = \sqrt[3]{((x+1)^3)^2} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

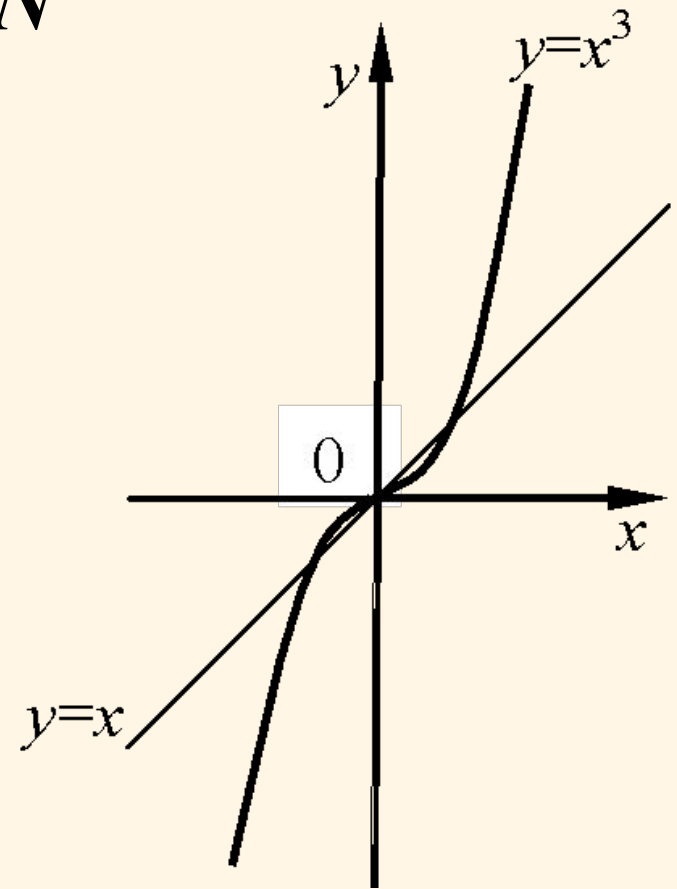
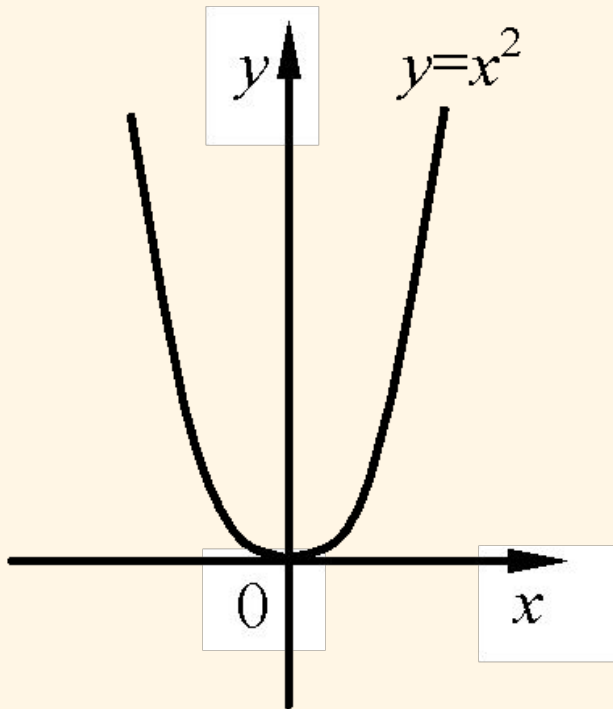
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

| | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------------------------|--|
| Алгебраические | | Трансцендентные (неалгебраические) | |
| Рациональные | | Иррациональные | $y = \log_2 \left(x^3 + \frac{2}{3} \right)$ |
| Целые рациональные | Дробные рациональные | $y = \sqrt[3]{x+1}$ | $y = \arcsin \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-3}} + 1 \right)$ |

Вопрос № 2. Основные элементарные функции. Их свойства и графики.

1. Степенные функции

$$y=x^n, n \in \mathbb{N}$$



Область определения X : $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y :

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

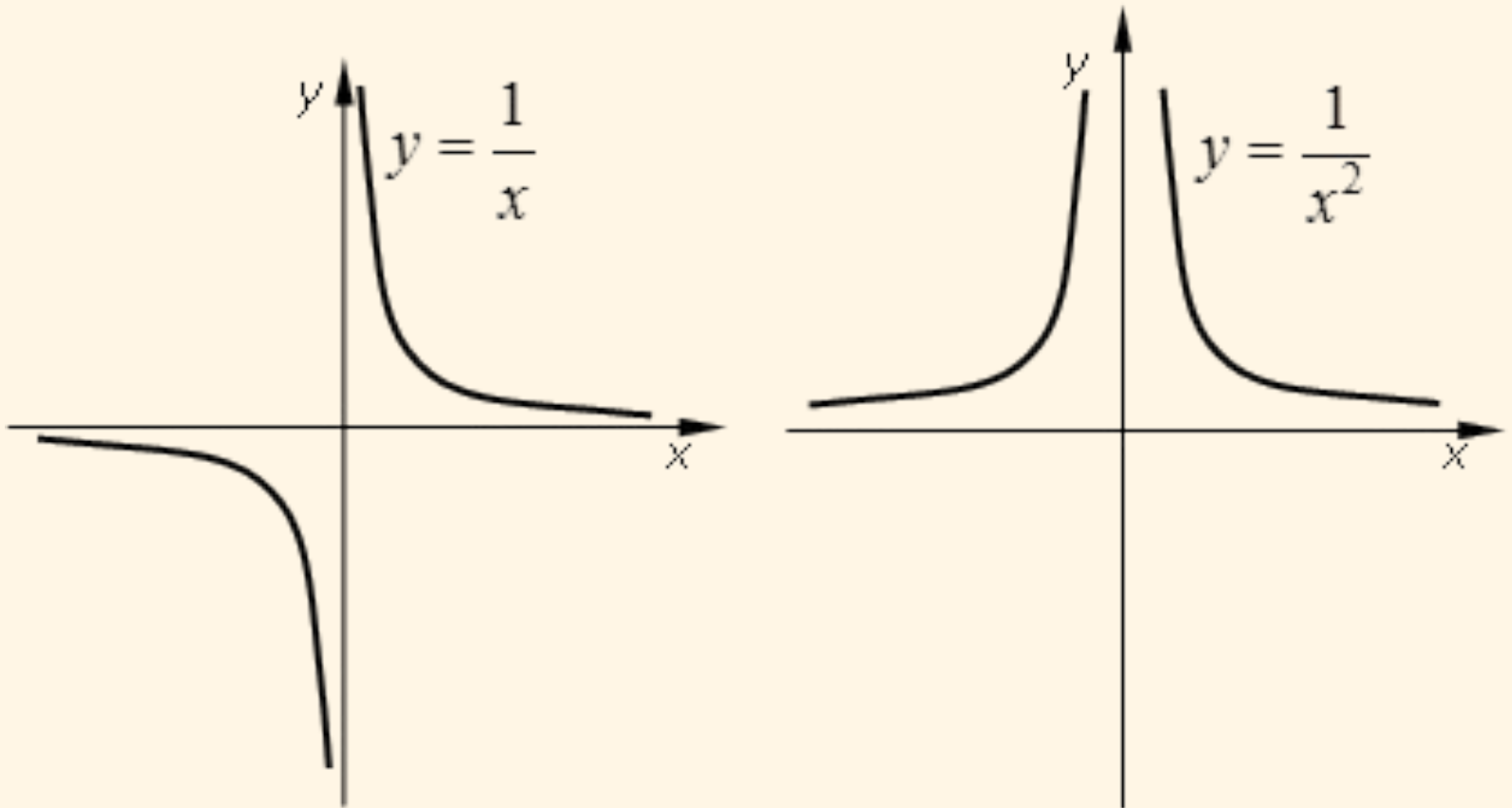
четная, если n – четно.

Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

$$y=x^{-n}, n \in \mathbb{N}$$



Область определения X : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Область значений Y :

$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, если n – нечетно;

$(0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

четная, если n – четно.

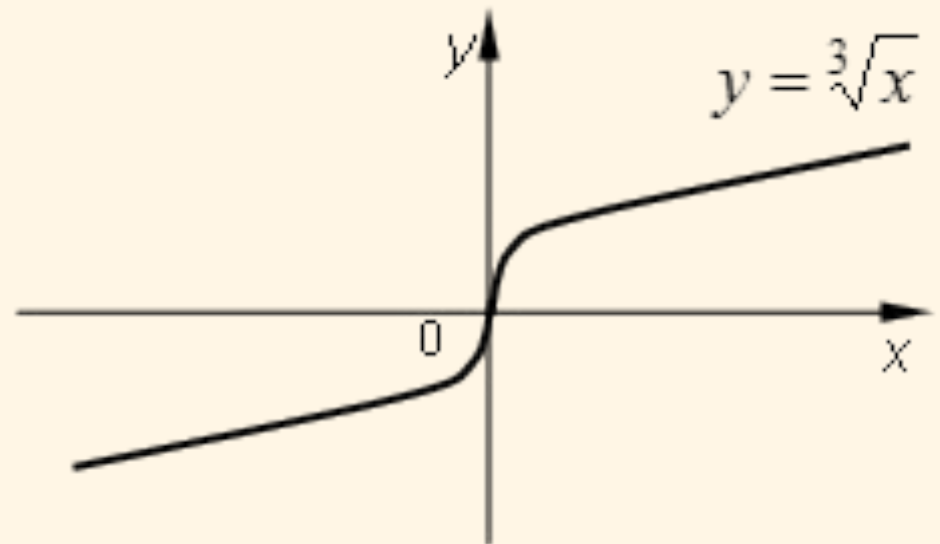
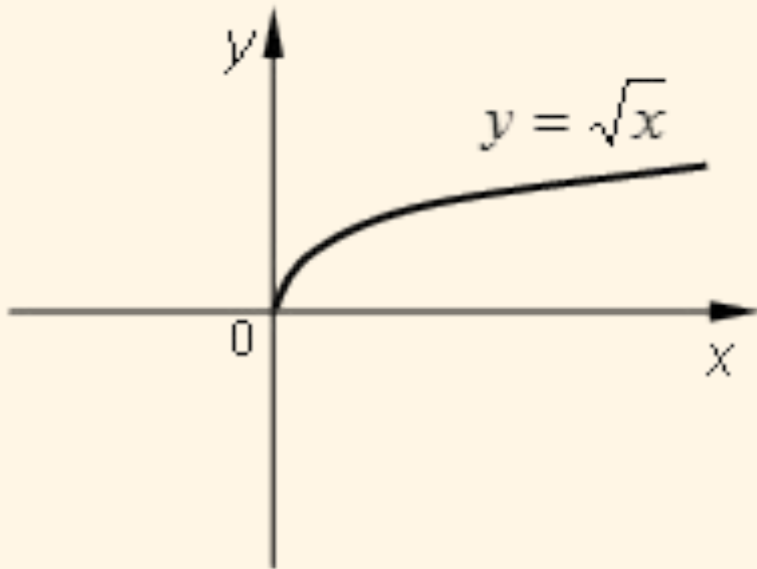
Убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n – нечетно;

возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

$$y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}, n > 1$$



Область определения X :

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Область значений Y :

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

общего вида, если n – четно.

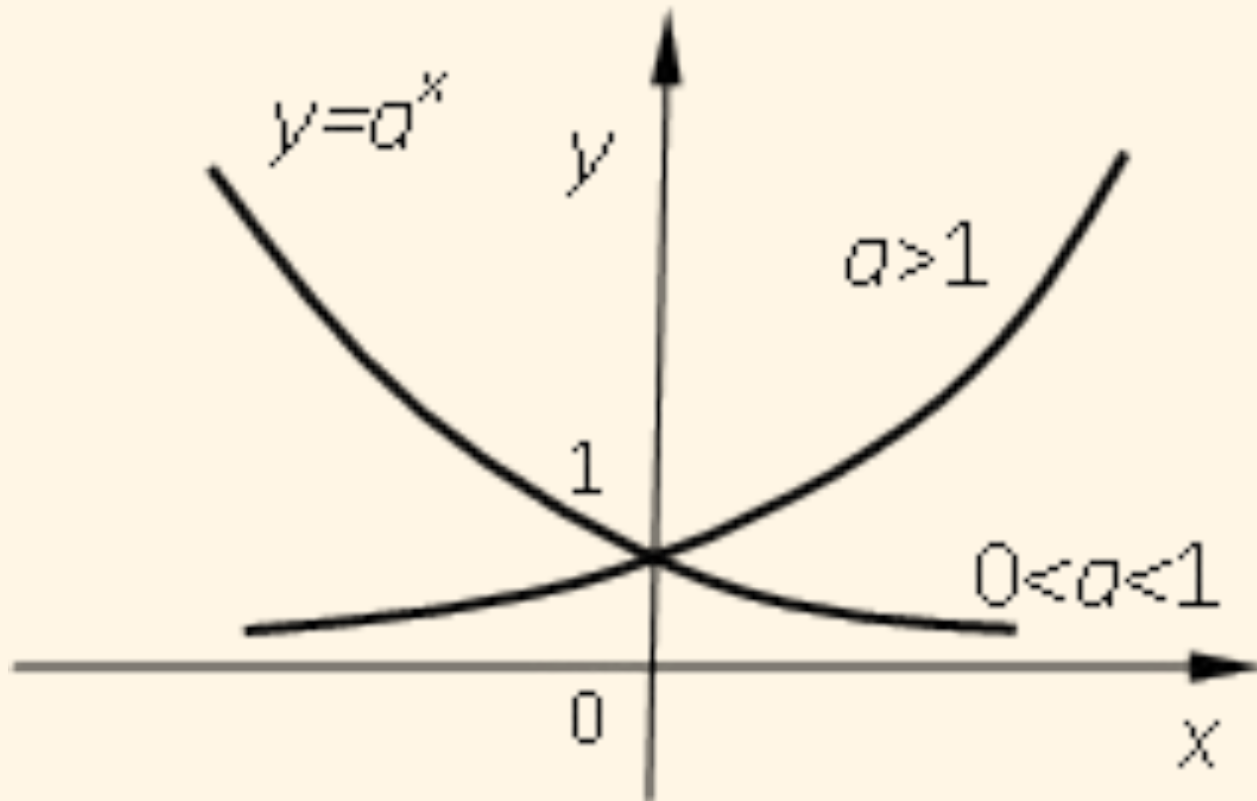
Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

возрастает на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

2. Показательная функция

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$



Область определения X : $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y : $(0, \infty)$.

Общего вида.

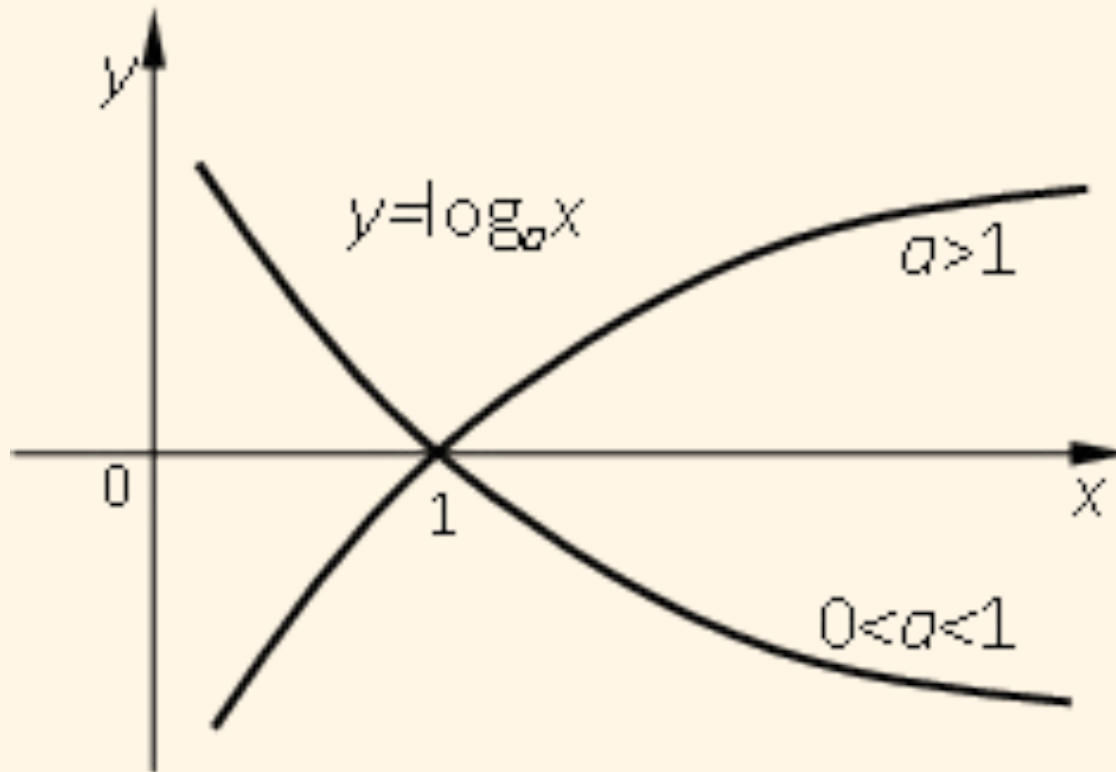
Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если $a > 1$;

убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$.

Непериодическая.

3. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$



Область определения X : $(0, \infty)$.

Область значений Y : $(-\infty, \infty)$.

Общего вида.

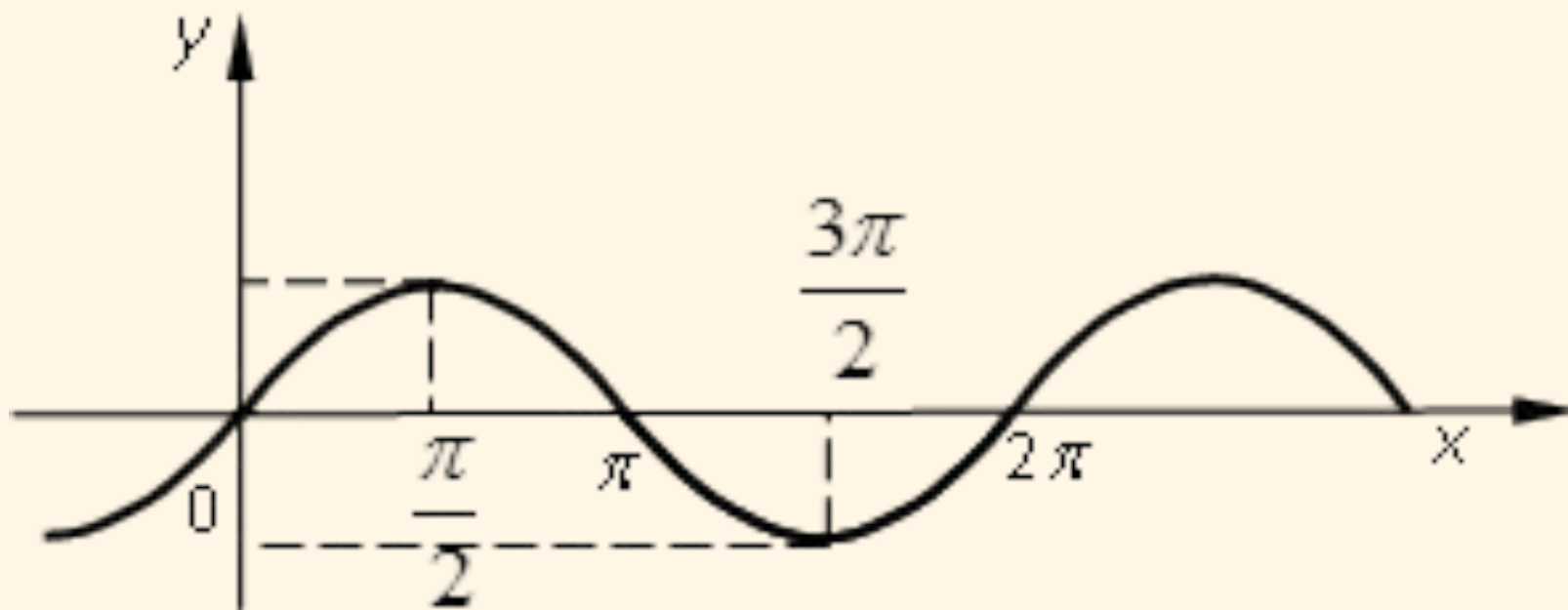
Возрастает на $(0, \infty)$, если $a > 1$;

убывает на $(0, \infty)$, если $0 < a < 1$.

Непериодическая.

4. Тригонометрические функции

$$y = \sin x$$



Область определения X : $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y : $[-1, 1]$.

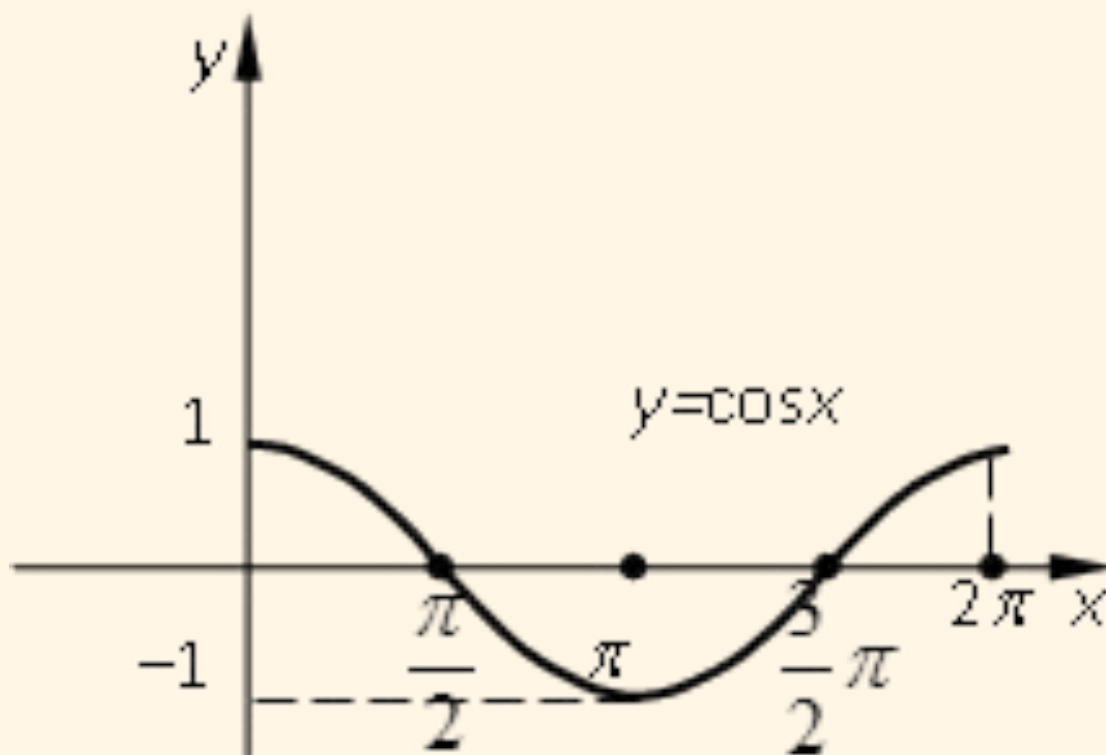
Нечетная.

Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$;

убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Периодическая, период 2π .

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \cos x$



Область определения X : $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y : $[-1, 1]$.

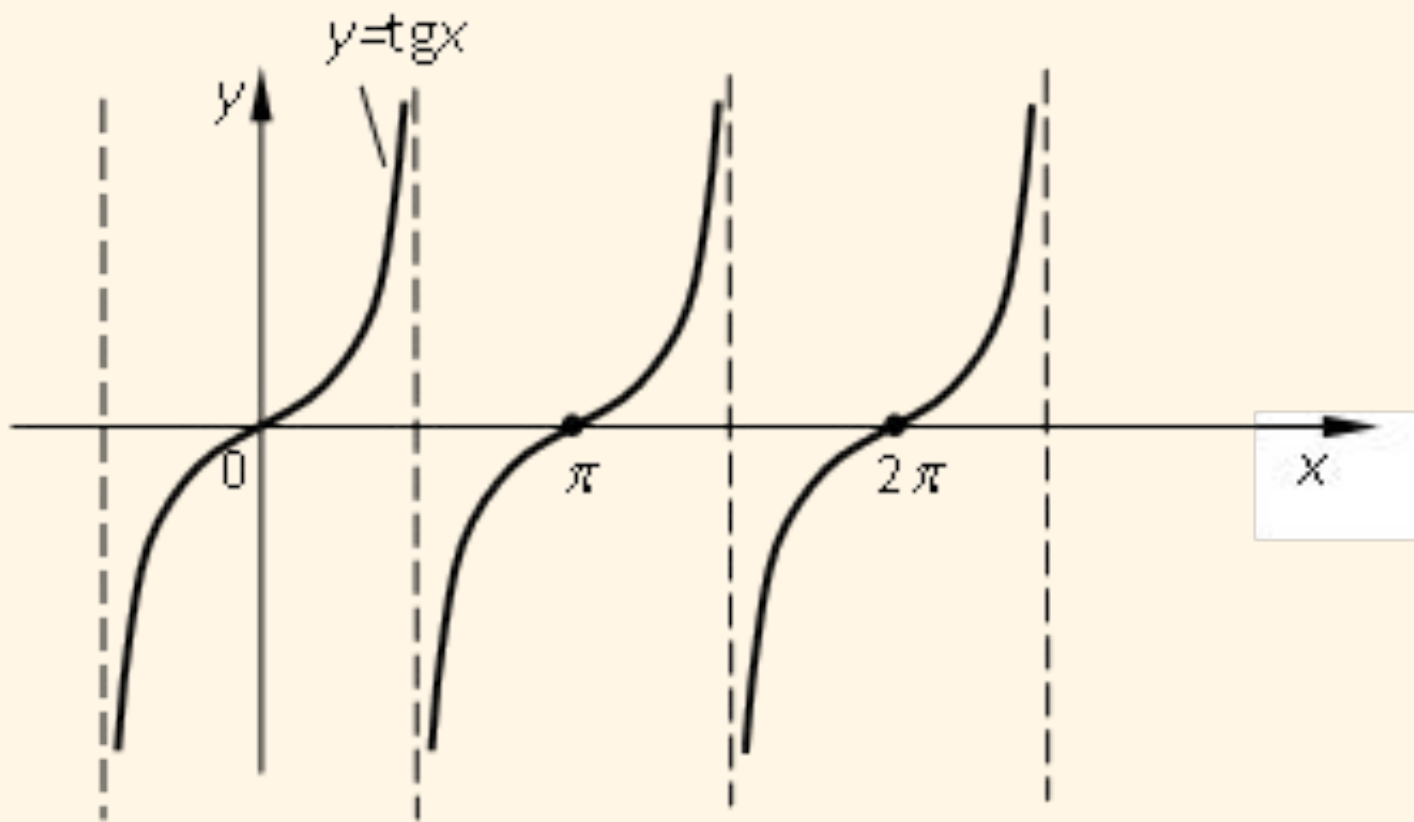
Четная.

Возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$;

убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Период 2π .

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{tg}x$



Область определения X : $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

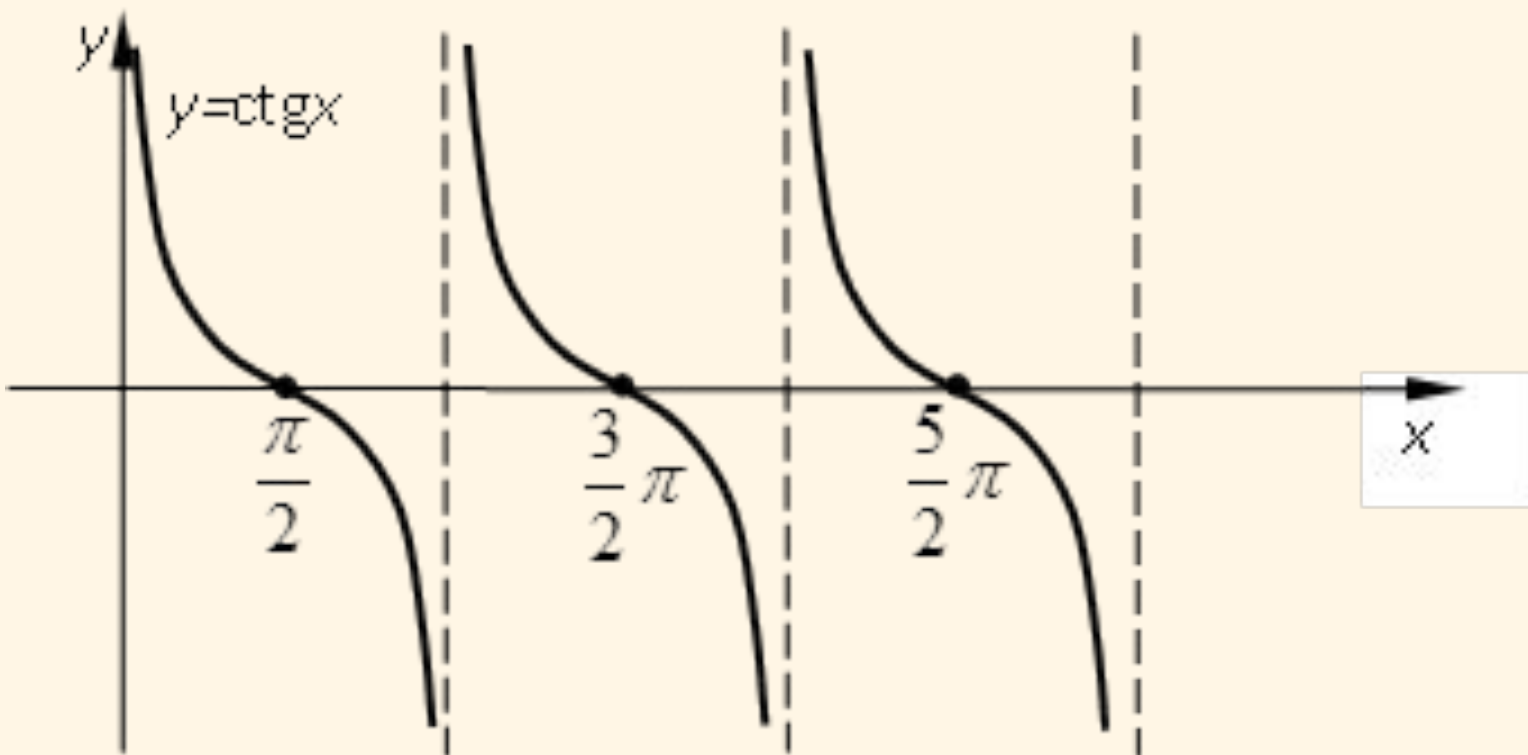
Область значений Y : $(-\infty, \infty)$.

Нечетная.

Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Период π .

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{ctg}x$



Область определения X : $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

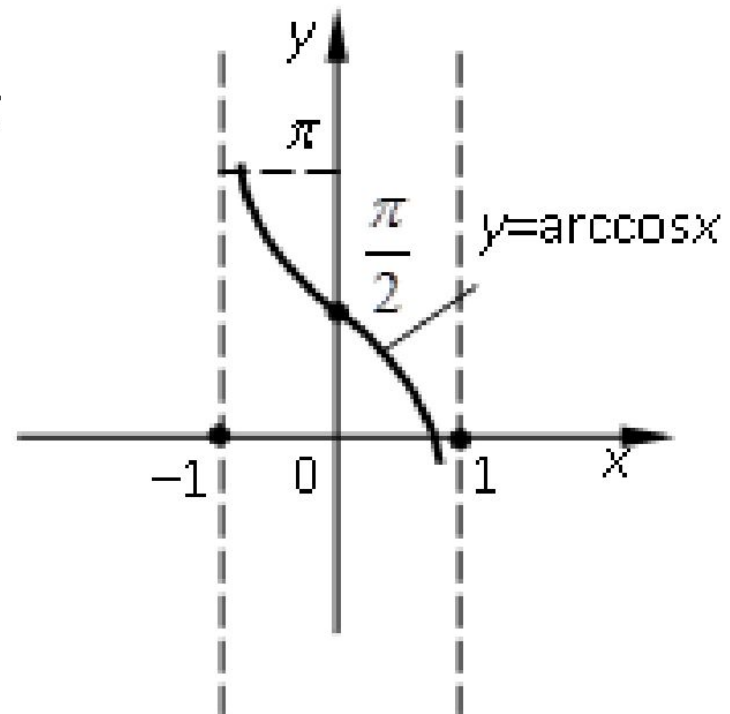
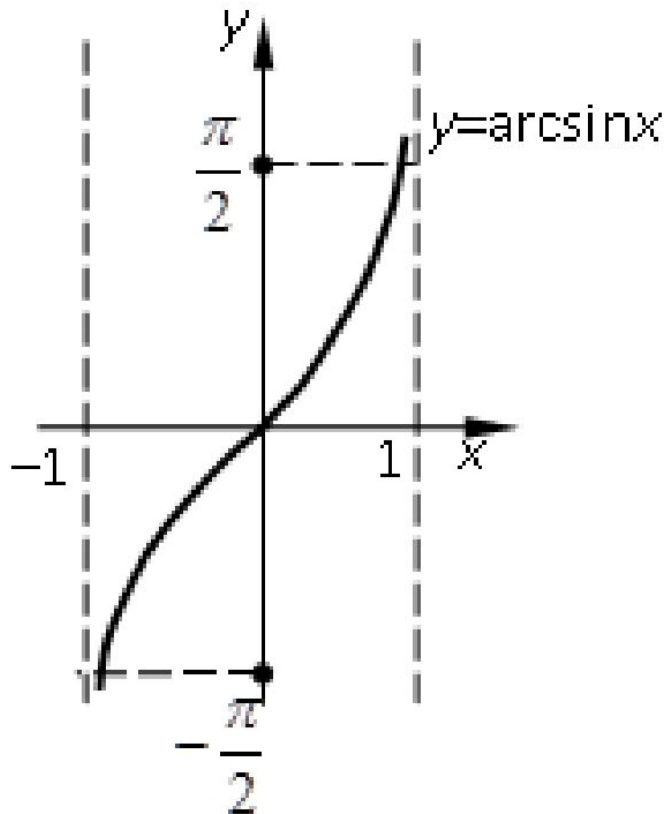
Область значений Y : $[-\infty, \infty)$.

Нечетная.

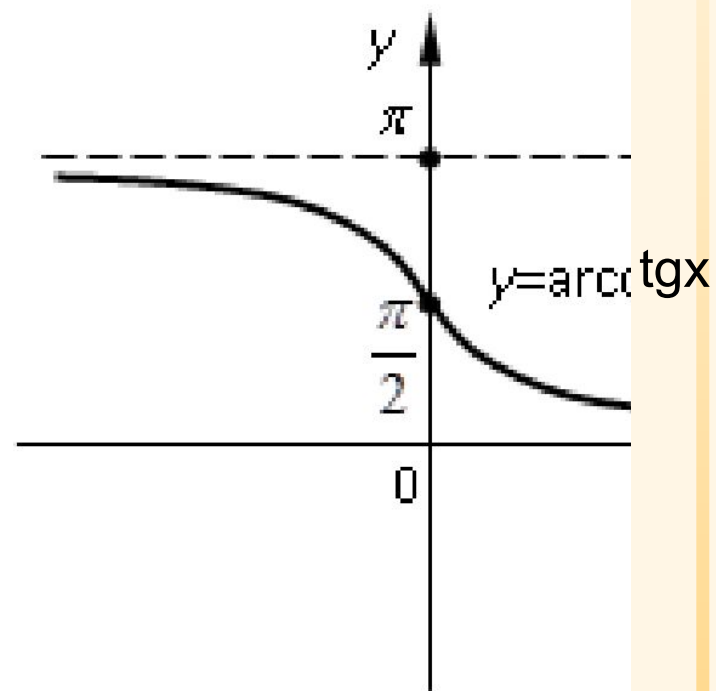
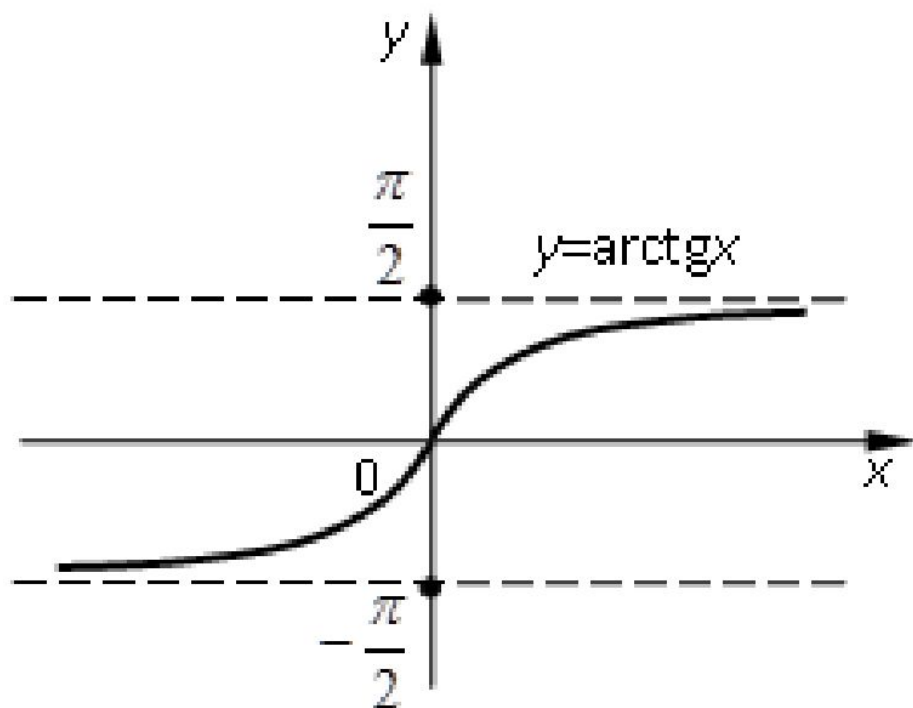
Убывает на $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Период π .

5. Обратные тригонометрические функции



Обратные тригонометрические функции



Области определения обратных
тригонометрических функций:

$$y = \arcsin x, (|x| \leq 1); \arccos x$$

$$y = \arctg x, x \in \mathbb{R}; \operatorname{arccotg} x.$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.
(линейная алгебра и аналитическая
геометрия, введение в математический
анализ). - М.: Едиториал УРСС, 2012 – с.
213-214; 311-317.