Лекция № 6
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Учебные вопросы

.Классификация функций.

2. Основные элементарные функции. Их свойства и графики.

Вопрос № 1. Классификация функций

Основные элементарные функции:

а) степенная: $\boldsymbol{y = x^n}$, $n \in R$;

б) показательная: $\boldsymbol{y = a^x}$, $a>0$, $a \neq 1$;

в) логарифмическая: $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $a>0$, $a \neq 1$;

г) тригонометрические: $\boldsymbol{y = \sin x}$, $\boldsymbol{y = \cos x}$, $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$, $\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}\, x}$;

д) обратные тригонометрическим: $\boldsymbol{y = \arcsin x}$, $\boldsymbol{y = \arccos x}$, $\boldsymbol{y = \mathrm{arctg}\, x}$, $\boldsymbol{y = \mathrm{arcctg}\, x}$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических операций (сложения, умножения, вычитания, деления, возведения в целую степень и извлечения корня) и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными. Пример:**

$$y = \arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-3}}+1\right)-\ln(x)$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий.

$$y = \frac{\sqrt[4]{x^2 - 3}}{x}$$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Алгебраические функции подразделяются на рациональные и иррациональные.

Рациональными называются алгебраические функции, которые не содержат аргумент под знаком радикала (корня).

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Рациональные функции разделяются на целые рациональные функции (многочлены) и дробные рациональные (отношение многочленов).

Пример целой рациональной функции:

$$y = \frac{1}{2}x^4 + x - 1$$.

Пример дробно-рациональной функции:

$$y = \sqrt[3]{x + 1}$$.

Иррациональные функции

Иррациональными называются алгебраические функции, содержащие аргумент под знаком радикала (корня).

Например,

$$y = \sqrt[3]{x+1}.$$

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Трансцендентными (неалгебраическими) называют элементарные функции, которые не являются алгебраическими. (То есть, они образованы при помощи возведения в иррациональную степень, логарифмирования, с использованием тригонометрических и обратных тригонометрических операций).

$$y = \left(\frac{x+1}{5x - \sqrt[\pi]{7}}\right)^{\sqrt[3]{2}}, \quad y = \log_2\left(x^3 + \frac{2}{3}\right)$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Замечание. Если вид элементарной функции можно упростить на всей области определения, то классификации подлежит именно упрощенная функция.

Например,

$$y = \sqrt[3]{\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right)^2}$$

- не иррациональная функция, а рациональная, так как

$$y = \sqrt[3]{\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right)^2} = \sqrt[3]{\left((x+1)^3\right)^2} = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

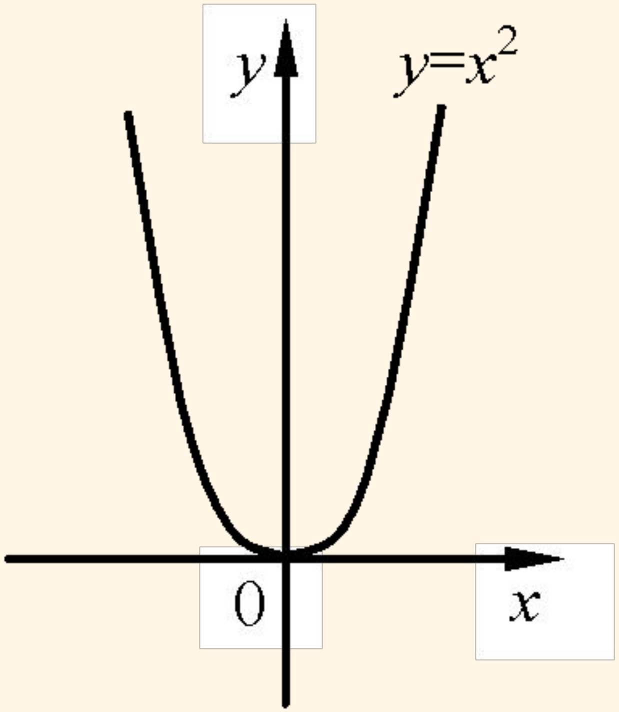
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

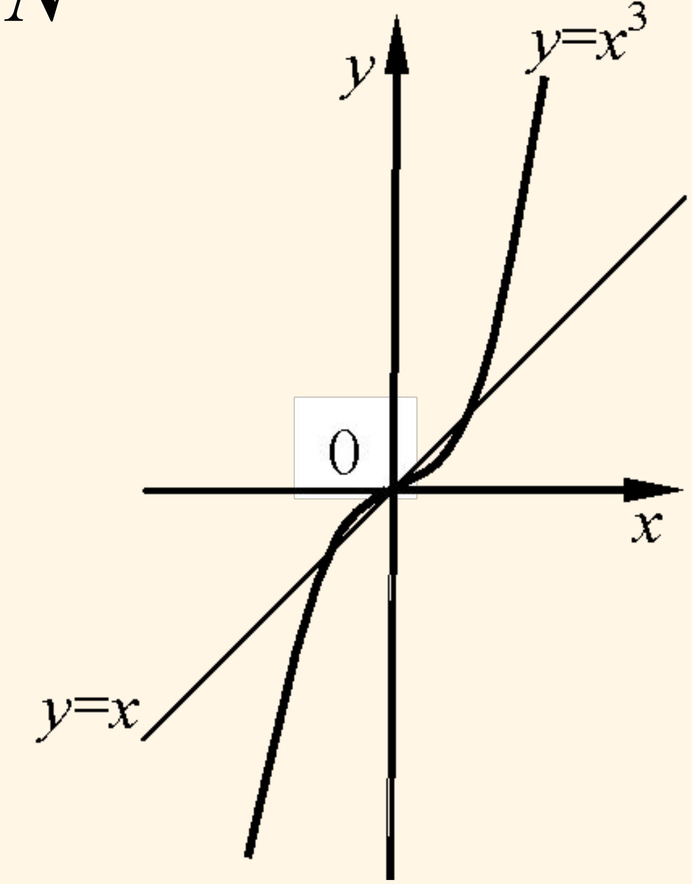
<table>
<tr><td colspan="3">Алгебраические</td><td>Трансценден-тные (неалгебраи-ческие)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рациональные</td><td>Иррацио-нальные</td><td>$y=\log_2\left(x^3+\frac{2}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td>Целые рациона-льные</td><td>Дробные рациона-льные</td><td>$y=\sqrt[3]{x+1}$</td><td>$y=\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2-3}}+1\right)$</td></tr>
</table>

Вопрос № 2. Основные элементарные функции. Их свойства и графики.

1. Степенные функции

$$y=x^n,\ n\in N$$





Область определения X: $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y:

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

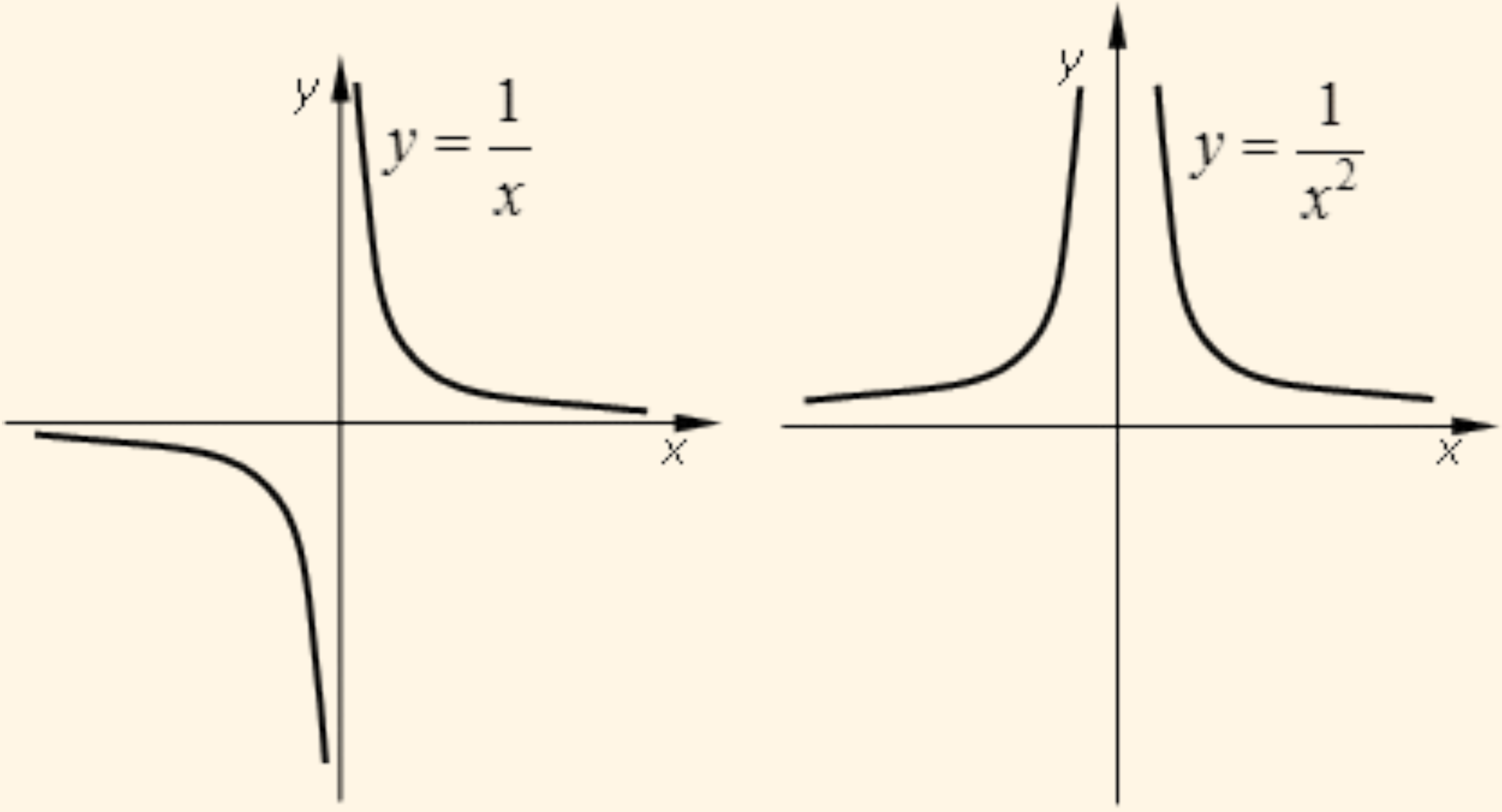
четная, если n – четно.

Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

убывает на $(-\infty, 0]$ и **возрастает** на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

$$y = x^{-n},\ n \in N$$



Область определения X: $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$.

Область значений *Y*:

$(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$, если n – нечетно;

$(0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

четная, если n – четно.

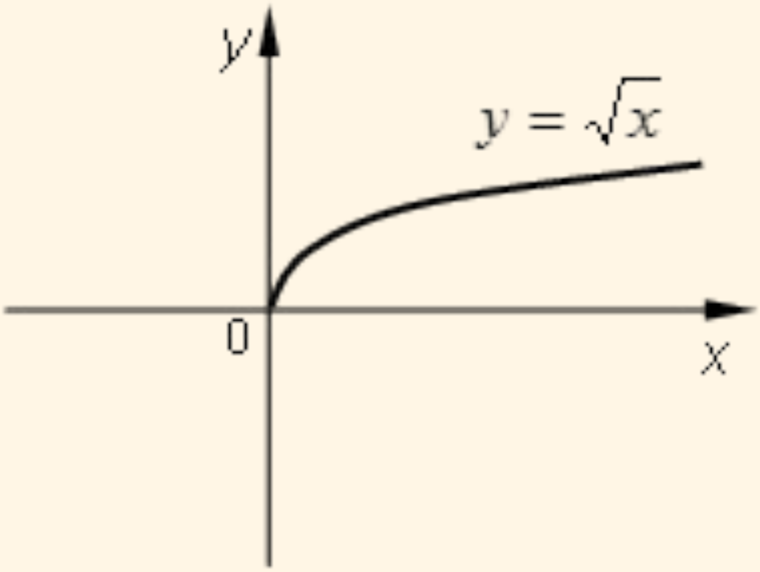
Убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0,\infty)$, если n – нечетно;

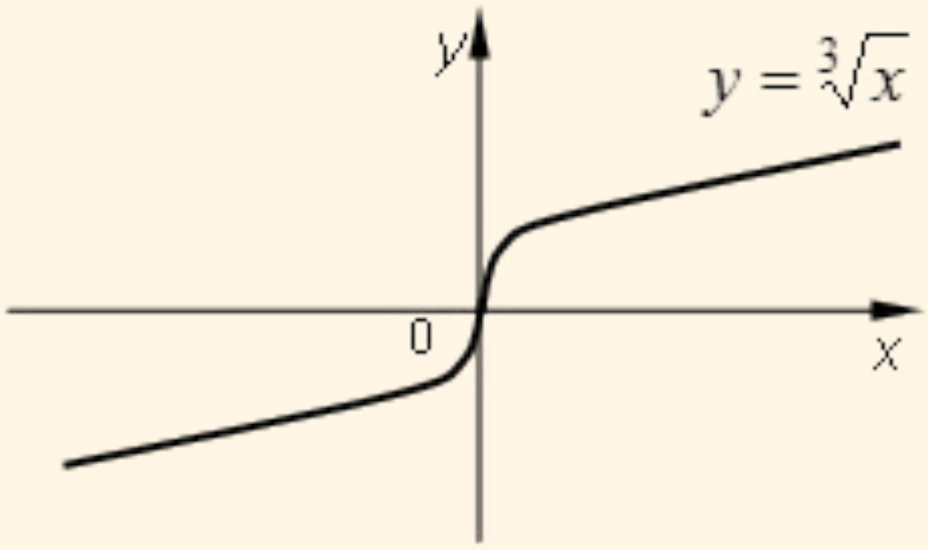
возрастает на $(-\infty, 0)$ и **убывает** на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N,\ n > 1$$





Область определения X:

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Область значений Y:

$(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

$[0, \infty)$, если n – четно.

Нечетная, если n – нечетно;

общего вида, если n – четно.

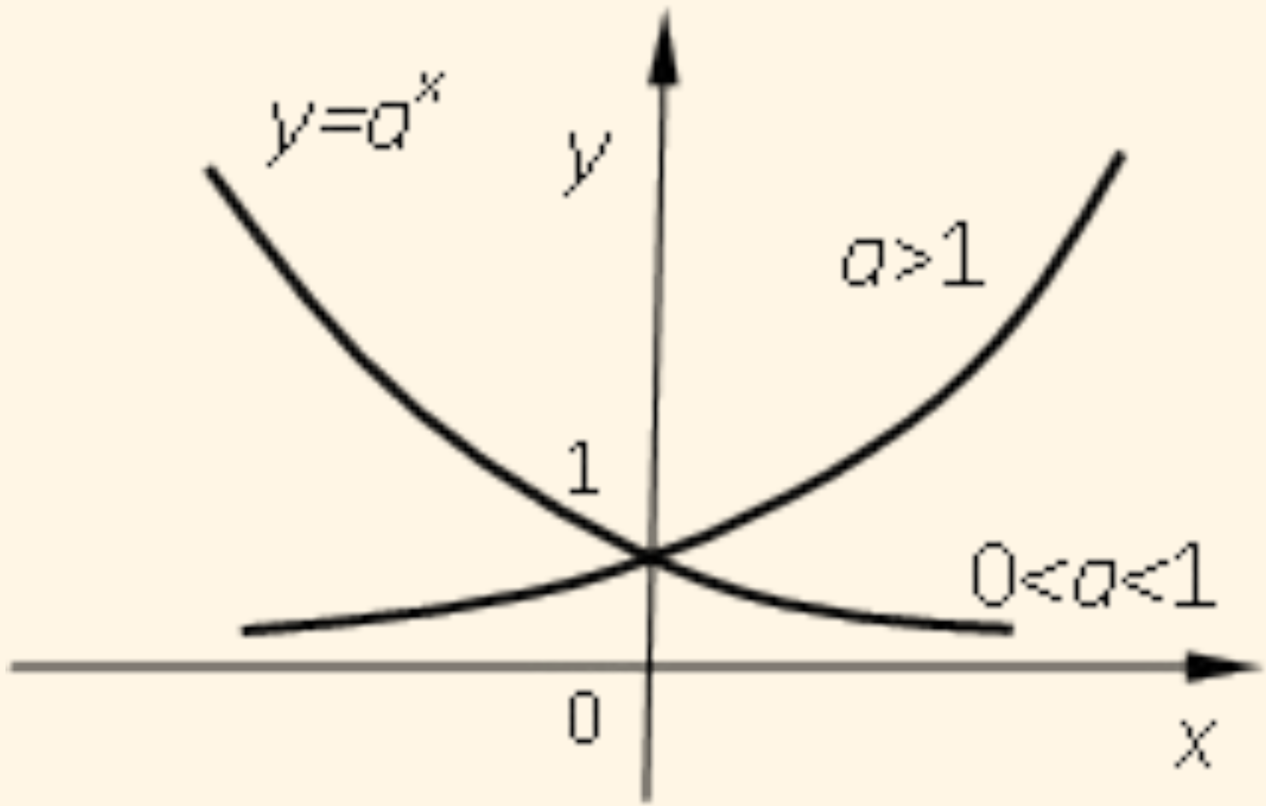
Возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n – нечетно;

возрастает на $(0, \infty)$, если n – четно.

Непериодическая.

2. Показательная функция

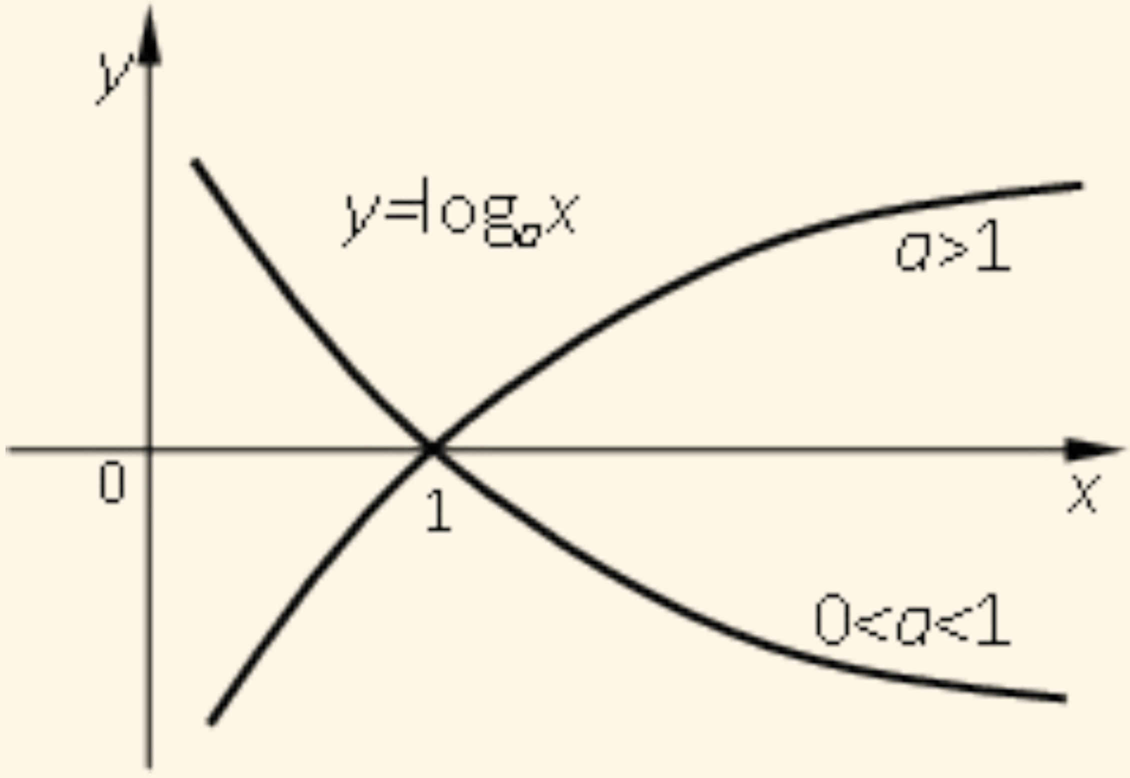
$$y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$$



Область определения *X*: (–∞, ∞).
Область значений *Y*: (0, ∞).
Общего вида.
Возрастает на (–∞, ∞), если $a>1$;
убывает на (0, ∞), если $0<a<1$.
Непериодическая.

3. Логарифмическая функция

$$y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$$



Область определения ***X***: $(0, \infty)$.

Область значений ***Y***: $(-\infty, \infty)$.

Общего вида.

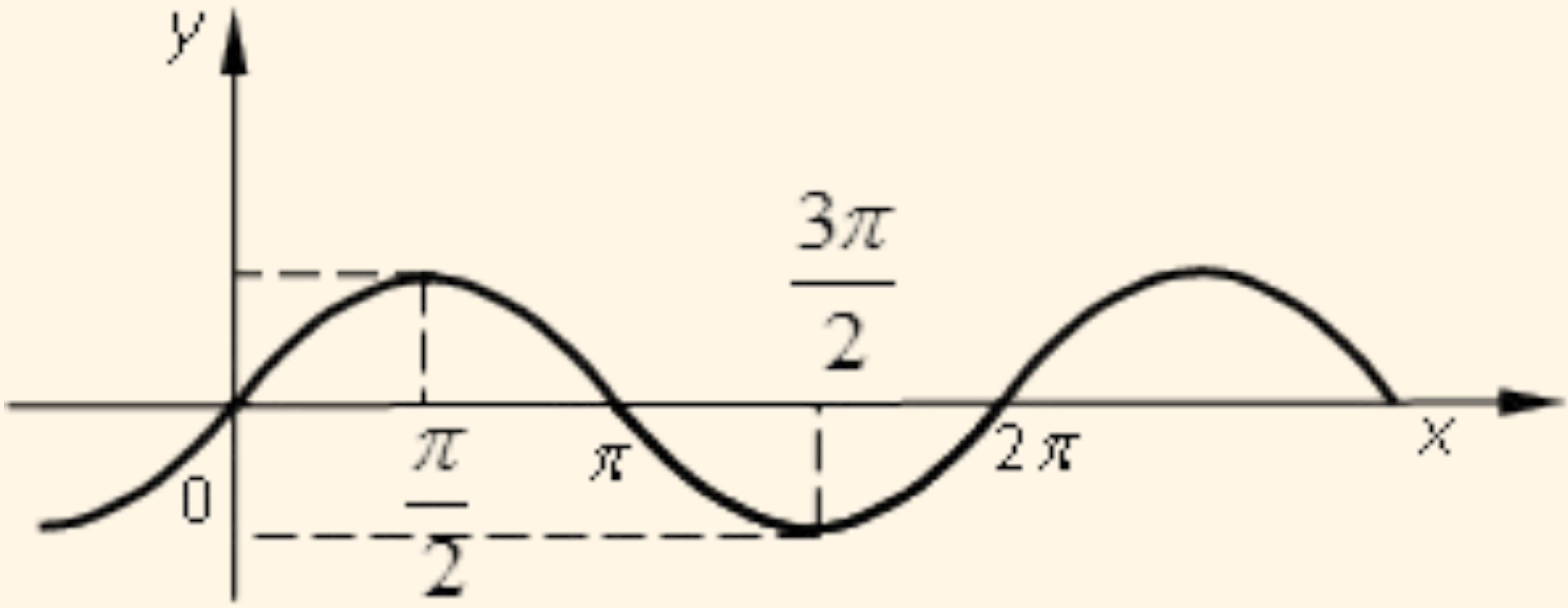
Возрастает на $(0, \infty)$, если $a>1$;

убывает на $(0, \infty)$, если $0<a<1$.

Непериодическая.

4. Тригонометрические функции

$$y = \sin x$$



Область определения X: $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y: $[-1, 1]$.

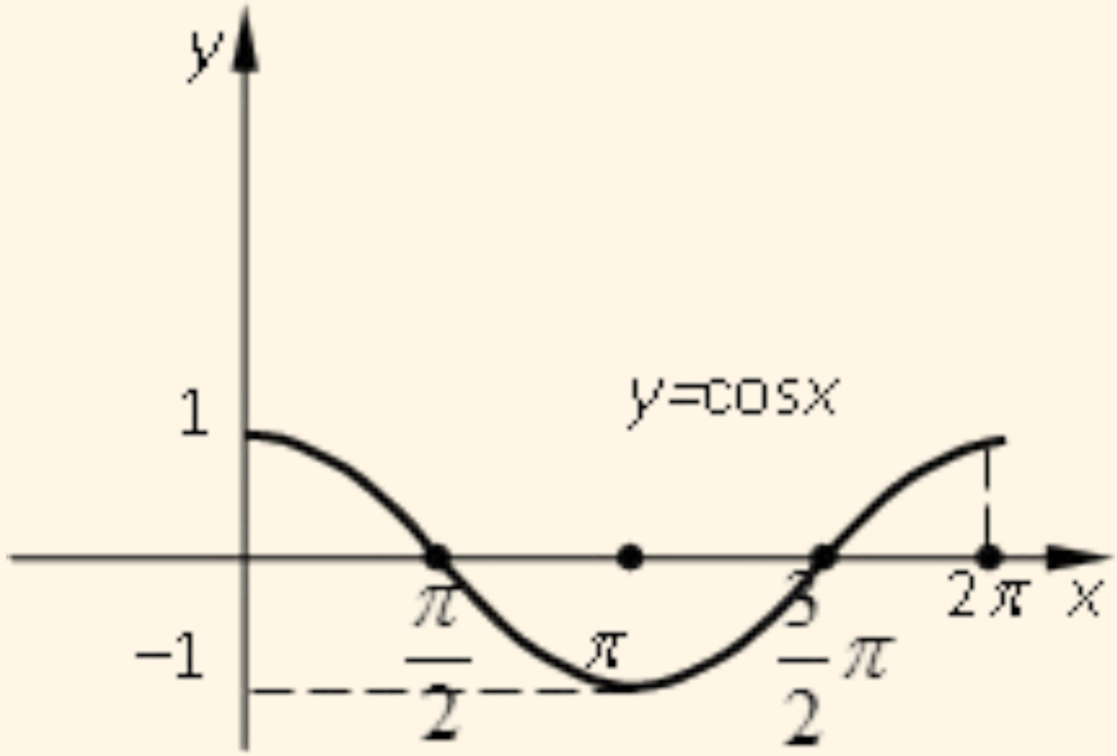
Нечетная.

Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$;

убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Периодическая, период 2π.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \cos x$



Область определения X: $(-\infty, \infty)$.

Область значений Y: $[-1, 1]$.

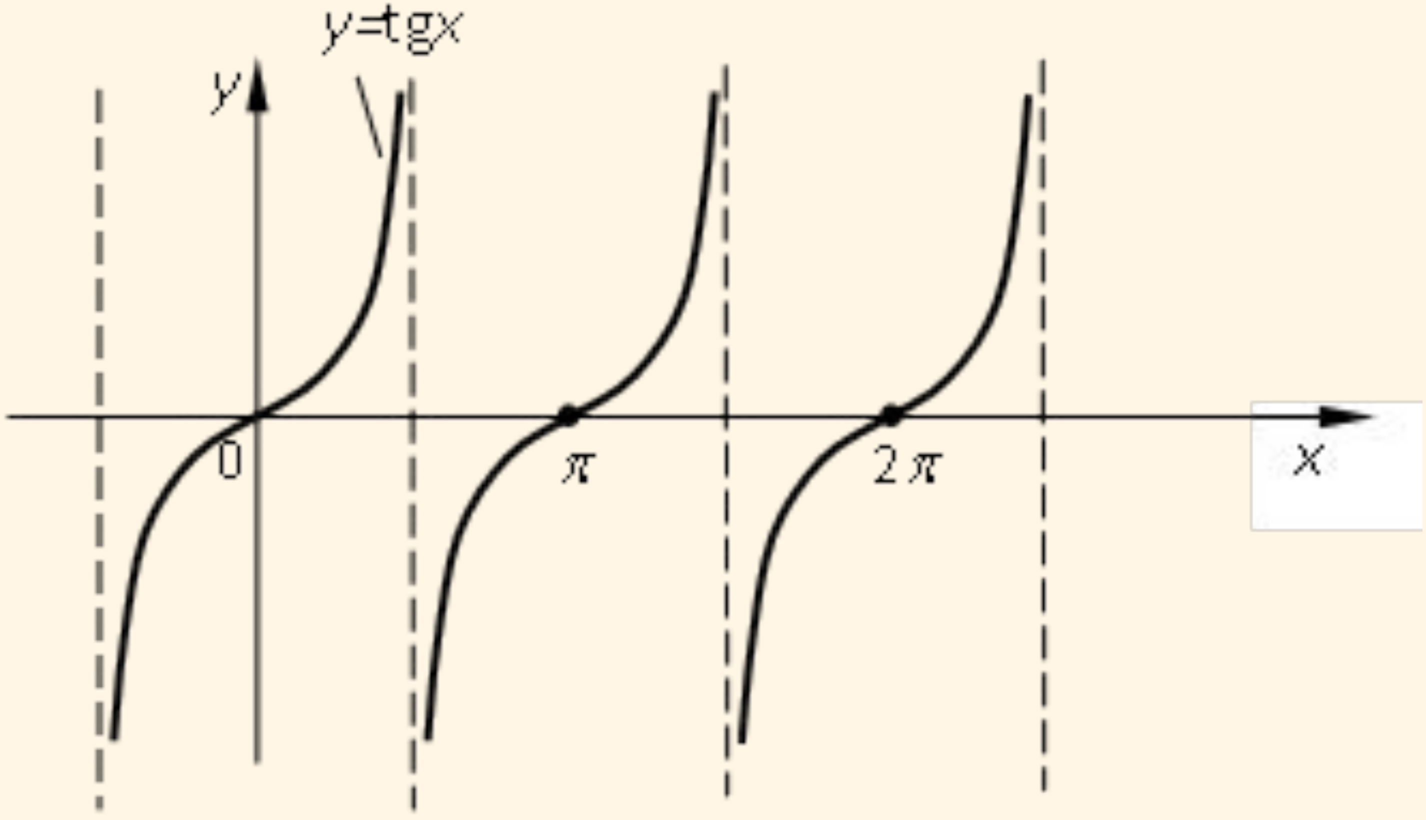
Четная.

Возрастает на $\left[-\pi + 2\pi n,\ 2\pi n\right]$;

убывает на $\left[2\pi n,\ \pi + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Период 2π.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \mathrm{tg}x$



Область определения ***X***: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

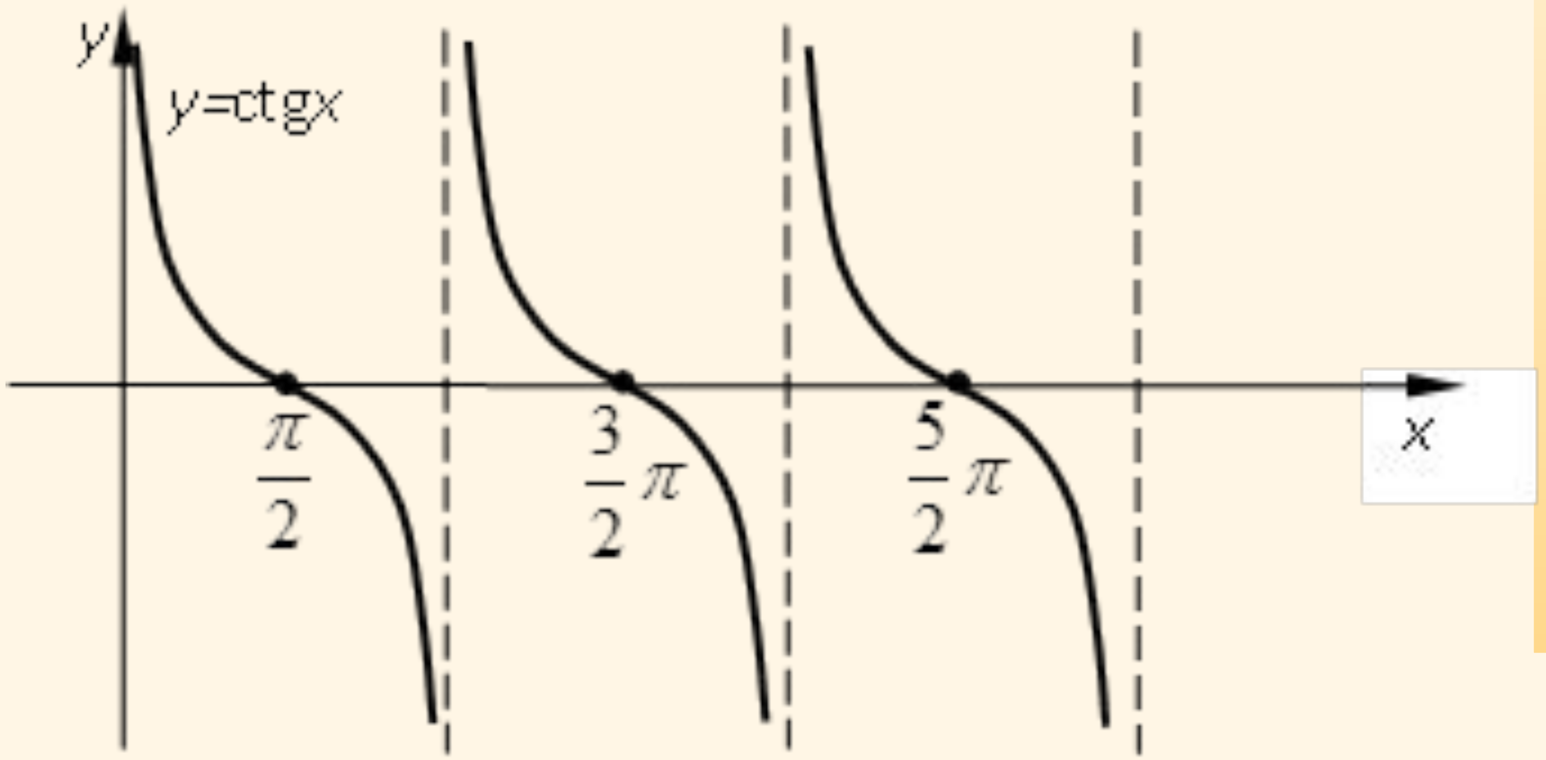
Область значений ***Y***: $(-\infty, \infty)$.

Нечетная.

Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

Период $\boldsymbol{\pi}$**.**

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y = \mathrm{ctg}x$



Область определения $\boldsymbol{X}$: $(\pi n,\ \pi + \pi n),\ n \in Z.$

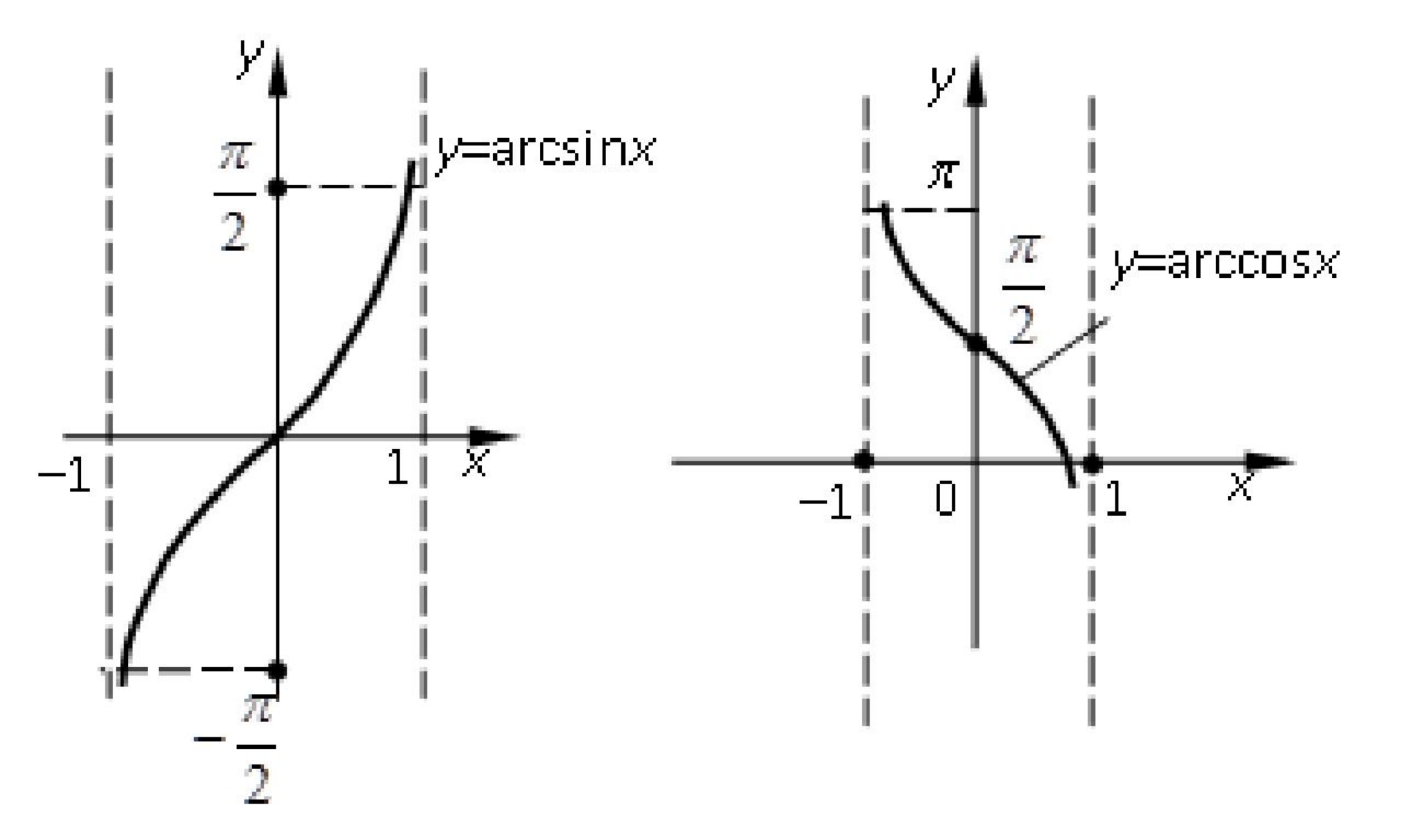
Область значений $\boldsymbol{Y}$: $[-\infty, \infty)$.

Нечетная.

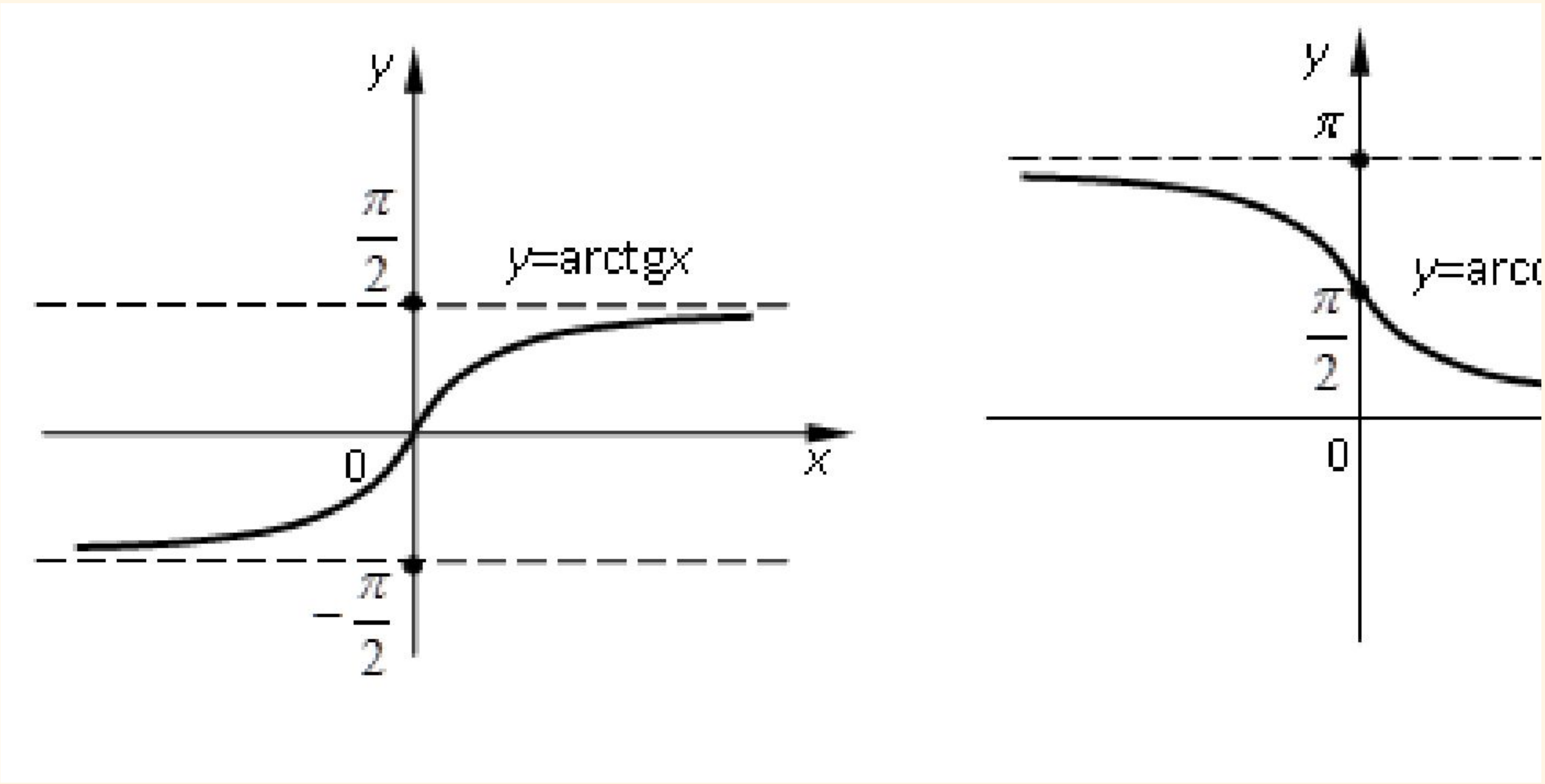
Убывает на $(\pi n,\ \pi + \pi n),\quad n \in Z.$

Период $\boldsymbol{\pi}$.

5. Обратные тригонометрические функции



Обратные тригонометрические функции



Области определения обратных тригонометрических функций:

$$y = \arcsin x, \ y = \arccos x \quad (|x| \le 1);$$

$$y = \mathrm{arctg}\,x, \ y = \mathrm{arcctg}\,x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). - М.: Едиториал УРСС, 2012 – с. 213-214; 311-317.