ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

**Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович**

Новосибирск – 2022

Определитель

Любой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие найденное по определенному закону некоторое число, называемое определителем n-ого порядка этой матрицы

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель

$$A_{1\times 1} = \left(a_{11}\right) \qquad \left|A\right| = \left|a_{11}\right| = a_{11}$$

$$\left|7\right| = 7; \qquad \left|-3\right| = -3; \qquad \left|\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}$$

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \left|A\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

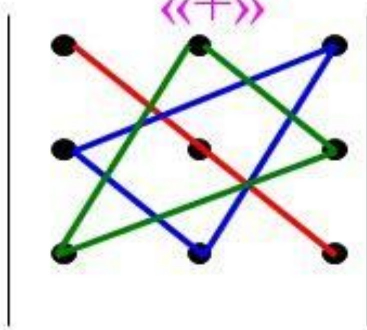
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot(-2) = 2 + 6 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 6 = -6 + 6 = 0$$

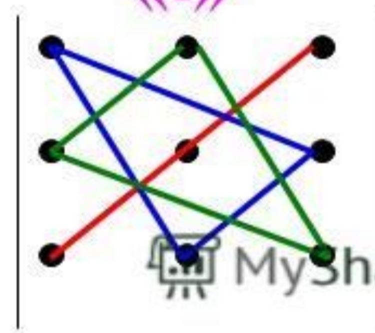
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$ – ***определитель третьего порядка.***

Правило треугольника: три положительных члена определителя третьего порядка представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три его отрицательных члена представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

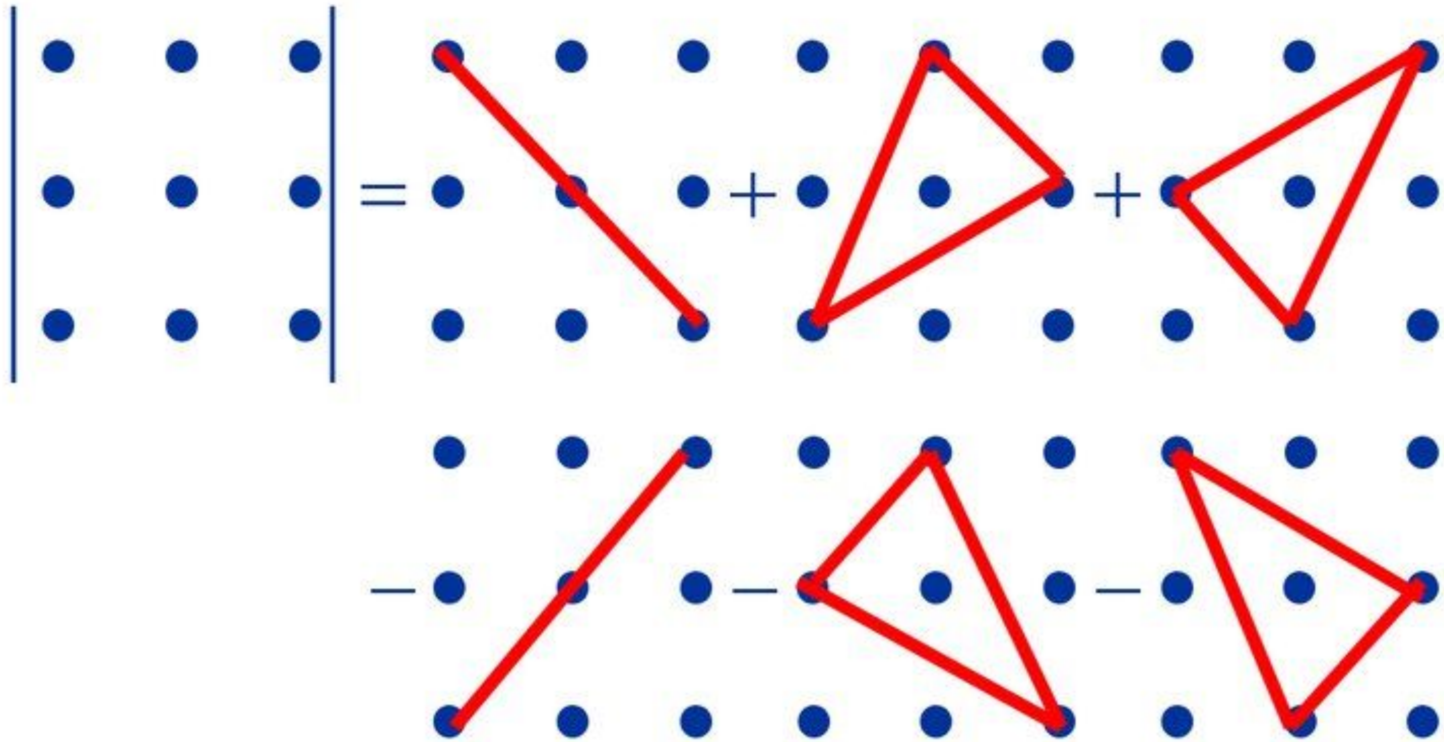
«+»



«-»



- **2)** Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться *правилом треугольников*:



где выделенные элементы нужно перемножить.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: Применяем правило треугольника для нахождения определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\\ -7 & 3 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0+70-9-84+0+12=-11.$$

Свойства определителей

1 Если некоторая строка (столбец) в определителе состоит из нулей, то этот определитель равен нулю

2 При транспонировании матрицы ее определитель не изменится

$$\det A = \det A^T$$

Свойства определителей

3

Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ

Замечание из свойства 3

Если в определителе элементы некоторой строки или столбца содержат общий множитель λ, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя

Свойства определителей

4 При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный

5 Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

Если i=j, то имеем определитель n-ого порядка

Свойства определителей

6 Определитель матрицы не изменится если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число

Свойства определителей

7 Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю

8 Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, то есть

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Минор элемента матрицы

Определение

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-ого порядка называется определитель матрицы (n-1)-ого порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i строки и j столбца

M_{ij} - минор элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Строка №1

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Столбец №2

Столбец №2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 9 \\ 2 & -7 & 11 & 5 \\ -9 & 4 & 25 & 84 \\ 3 & 12 & -5 & 58 \end{pmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 11 & 5 \\ 3 & -5 & 58 \end{vmatrix}$$

Строка №3

Алгебраическое дополнение элемента матрицы

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -M_{12}$$

$$A_{22} = M_{22}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -1 \cdot \left[a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31} \right]$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 1 \cdot \left[a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} \right]$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\7 & 9\end{vmatrix}=1\cdot 9-3\cdot 7=9-21=-12$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}=4\cdot 8-5\cdot 7=32-35=-3$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 6-3\cdot 4=6-12=-6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & 9\end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 9-3\cdot 8)=-(-6)=6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-2\cdot 4=5-8=-3$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\7 & 8\end{vmatrix}=-1\cdot(1\cdot 8-2\cdot 7)=-(-6)=6$$

Теорема о разложении определителя

Определитель любой квадратной матрицы n-ого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраическое дополнение

Разложение определителя по строке

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

$$i = \overline{1, n}$$

Разложение определителя по столбцу

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

$$j = \overline{1, n}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} = 5(-1)^{2+1} M_{21} + 4(-1)^{2+2} M_{22} +$$

$$+1(-1)^{2+3} M_{23} = -5\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -5(3 \cdot 9 - 7 \cdot 8) +$$

$$+4(2 \cdot 9 - 7 \cdot 6) - (2 \cdot 8 - 3 \cdot 6) = 51$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \cdot 7) - (7 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 2) =$$

$$= 72 + 18 + 280 - 168 - 135 - 16 = 51$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по элементам второго столбца.

ешение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -(-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(5+0) + 4(10+9) - 7(0-3) = 122$$