

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

**Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович**

Новосибирск – 2022

Определитель

Любой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие найденное по определенному закону некоторое число, называемое определителем n -ого порядка этой матрицы

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель

$$A_{1 \times 1} = (a_{11}) \quad |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|7| = 7; \quad |-3| = -3; \quad \left| \frac{5}{8} \right| = \frac{5}{8}$$

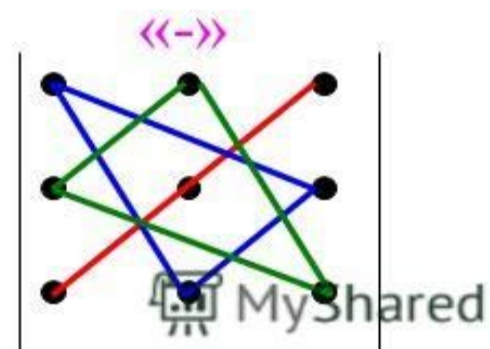
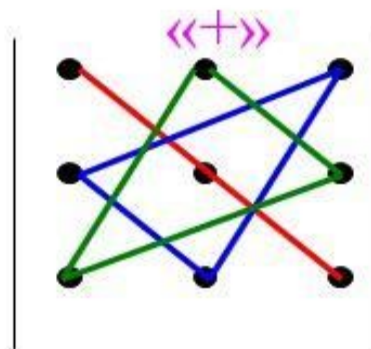
$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 2 + 6 = 8$$

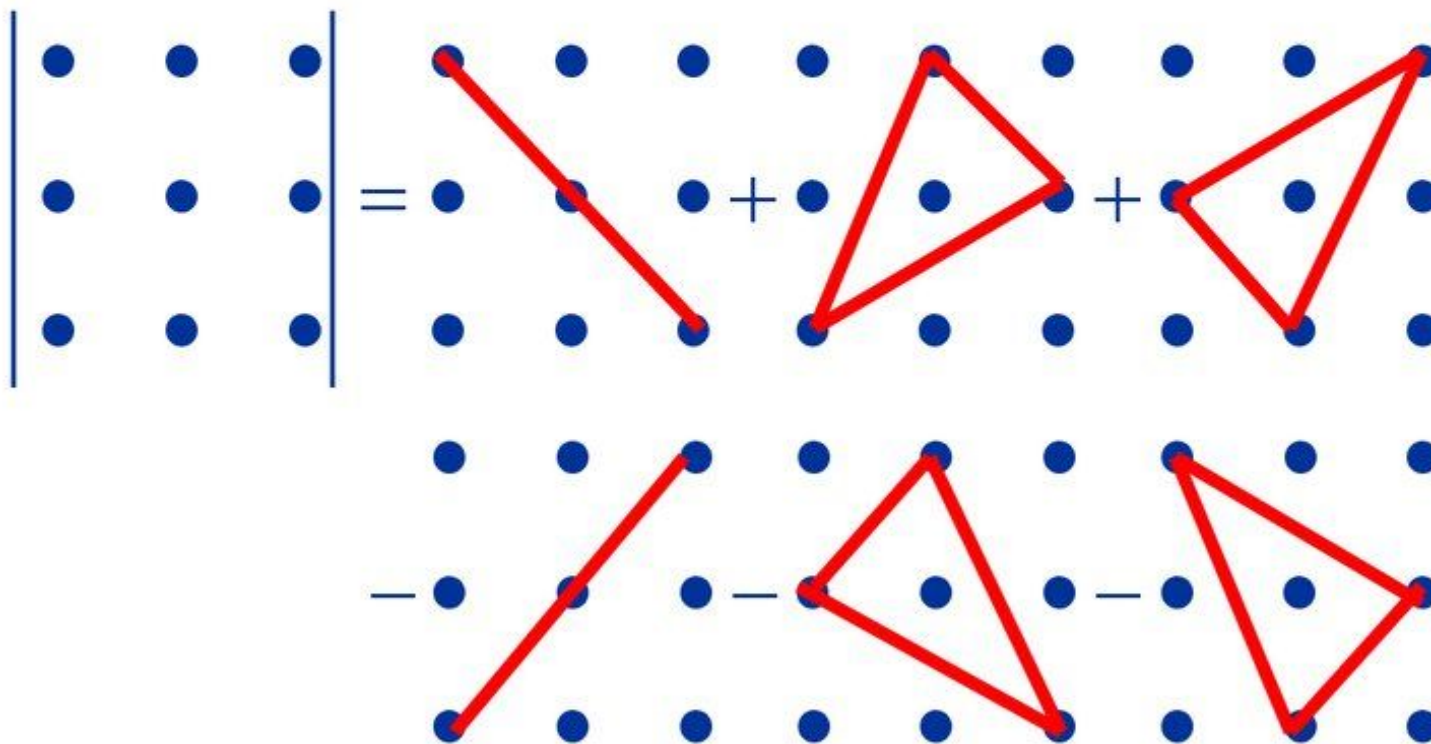
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 6 = -6 + 6 = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - \text{определитель третьего порядка.}$$

Правило треугольника: три положительных члена определителя третьего порядка представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Три его отрицательных члена представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.



- 2) Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом треугольников:



где выделенные элементы нужно перемножить.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Применяем правило треугольника для нахождения определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 70 - 9 - 84 + 0 + 12 = -11.$$

Свойства определителей

1 Если некоторая строка (столбец) в определителе состоит из нулей, то этот определитель равен нулю

2 При транспонировании матрицы ее определитель не изменится

$$\det A = \det A^T$$

Свойства определителей

3

Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ , то ее определитель умножится на это число λ

Замечание из свойства 3

Если в определителе элементы некоторой строки или столбца содержат общий множитель λ , то этот общий множитель можно вынести за знак определителя

Свойства определителей

4 При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный

5 Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

Если $i=j$, то имеем определитель n -ого порядка

Свойства определителей

6

Определитель матрицы не изменится если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число

Свойства определителей

7

Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю

8

Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, то есть

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Минор элемента матрицы

Определение

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -ого порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -ого порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i строки и j столбца

M_{ij} - минор элемента a_{ij} матрицы $A_{n \times n}$

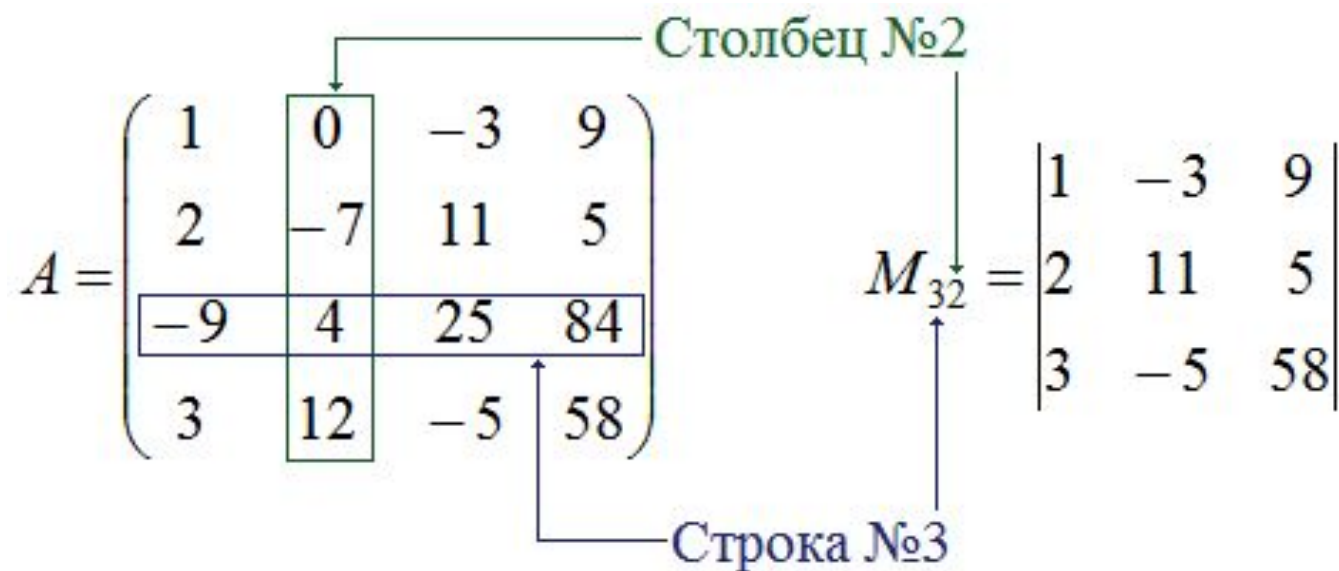
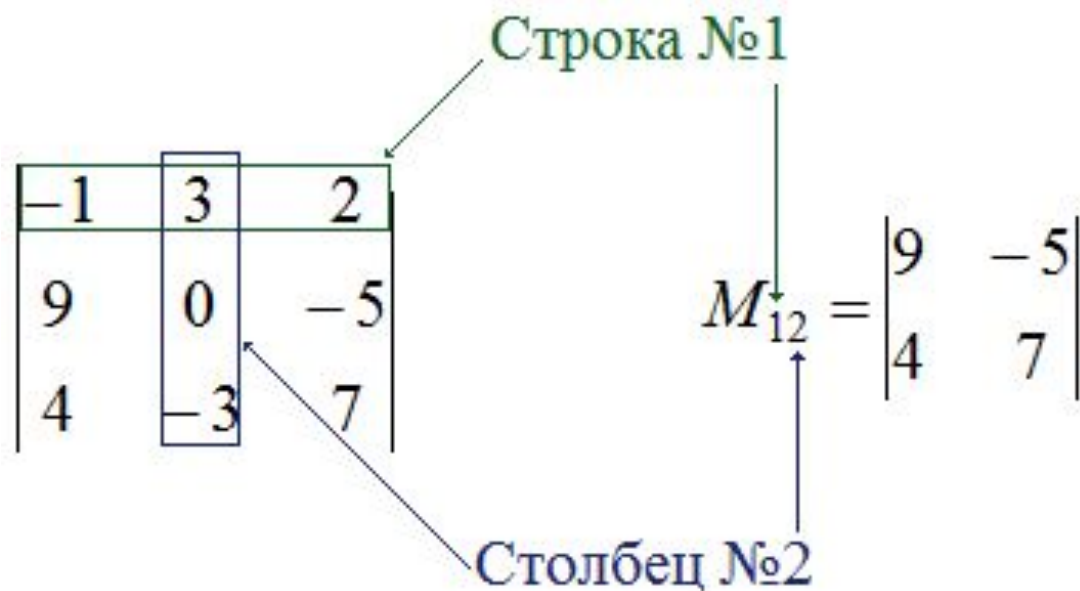
$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ a_{23} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{32} \\ a_{12} & a_{31} \end{vmatrix}$$



Алгебраическое дополнение элемента матрицы

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $A_{n \times n}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -M_{12}$$

$$A_{22} = M_{22}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -1 \cdot \left[a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31} \right]$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 1 \cdot \left[a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} \right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = 9 - 21 = -12$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = 32 - 35 = -3$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = -(-6) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = -(-6) = 6$$

Определители

Теорема о разложении определителя

Определитель любой квадратной матрицы n -ого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраическое дополнение

Разложение определителя по строке

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}$$

$i = \overline{1, n}$

Разложение определителя по столбцу

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj}$$

$j = \overline{1, n}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} = 5(-1)^{2+1} M_{21} + 4(-1)^{2+2} M_{22} + \\ + 1(-1)^{2+3} M_{23} = -5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -5(3 \cdot 9 - 7 \cdot 8) + \\ + 4(2 \cdot 9 - 7 \cdot 6) - (2 \cdot 8 - 3 \cdot 6) = 51$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \cdot 7) - (7 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 2) = \\ = 72 + 18 + 280 - 168 - 135 - 16 = 51$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ разложением по элементам второго столбца.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -(-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(5+0) + 4(10+9) - 7(0-3) = 122$$