Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Формулировка теорем, когда $x \to x_0$ или $x \to \infty$ аналогичны, поэтому будем пользоваться обозначением: $\lim f(x)$.

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению пределов:

$$\lim\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim\left[C \cdot f(x)\right] = C \cdot \lim f(x)$$

Основные теоремы о пределах

- Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)} \qquad \left(\lim f_2(x) \neq 0\right)$$

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim \left[f(x)\right]^n = \left[\lim f(x)\right]^n$$

- Предел показательно – степенной функции:

$$\lim \left[f(x)\right]^{g(x)} = \left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad \infty^{0};\ \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

Найти пределы указанных функций

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n-5}{1-n^2}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}.$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Найти пределы указанных функций

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}.$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

Найти пределы указанных функций

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\right).$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

№ варианта	Ф.И.О обучающегося
1	Аджем Юрий Сергеевич
2	Балабеков Балабек Исаевич
3	Бачиев Алексей Александрович
4	Бессонов Даниил Юрьевич
5	Вилькишов Иван Николаевич
6	Дагаев Ислам Лом-Алиевич
7	Дворниченко Евгений Сергеевич
8	Ильина Полина Анатольевна
9	Кузнецов Иван Олегович
10	Макшанцев Валерий Сергеевич
11	Москаев Артём Сергеевич
12	Начмутдинов Руслан Ренатович
13	Некрасов Алексей Юрьевич
14	Осокин Илья Евгеньевич
15	Пекуров Петр Антонович
16	Подколзин Александр Михайлович
17	Сибер Яков Михайлович
18	Сосновский Дмитрий Сергеевич
19	Столярова Анастасия Геннадьевна
20	Тарханова Ольга Сергеевна
21	Усманов Максим Александрович
22	Хайрулин Сергей Евгеньевич
23	Хамидов Алишер Туйчибоевич
24	Чинякин Вячеслав Викторович
25	Щепина Ольга Павловна

ИДЗ-5.1

Найти указанные пределы.

1.30. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

2

2.30. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$.

3

3.30. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.

4

4.30. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$.

6

6.30. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$.

https://www.kstu.kz/wp-content/uploads/docs/restricted/lib/portfolio/folder/rus/matematika/ryabushko1.pdf

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$

Найти пределы указанных функций

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$.

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется равенство:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

2.7182818284

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx}=e$$

Второй замечательный предел применяется для раскрытия неопределенности 1^{∞}.

Другие полезные формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$$

$$\left(\frac{4}{x-1}=\frac{1}{y}\quad\Rightarrow\quad x=4y+1;\quad x\to\infty;\quad y\to\infty\right)$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y+1+3}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{4}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}=e^{4}\cdot 1^{4}=e^{4}$$

Найти пределы указанных функций

4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x+3}{2x-1} \right)^{x}$.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1} \right)^{4x-1}$.

6. $\lim\limits_{x \to \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1) - \ln(3x-2)))$.

ИДЗ-5.1

Найти указанные пределы.

7

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

8

8.30. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$.

9

9.30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

https://www.kstu.kz/wp-content/uploads/docs/restricted/lib/portfolio/folder/rus/matematika/ryabushko1.pdf

Бесконечно малые функции

Функция ***y = f(x)*** называется бесконечно малой при

$x \to x_0 \quad (x \to \infty)$ если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами; обозначают обычно греческими буквами ***α, β*** и т. д.

Например: $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha(x) = \sin x$ - бесконечно малая функция при $x \to 0$

Теорема

Если функция ***y = f(x)*** имеет предел, равный ***A***, то ее можно представить как сумму числа ***A*** и бесконечно малой функции ***α(x)***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x)$$

Бесконечно малые функции

Сравнение бесконечно малых

Пусть **α(x), β(x)** – бесконечно малые функции

- Если $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

то говорят, что **α(x)** является ***бесконечно малой высшего порядка*** по сравнению с **β(x)** : $\alpha = o(\beta)$

- Если $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m \quad (m \neq 0)$$

то говорят, что **α(x)** и **β(x)** – ***бесконечно малые одного и того же порядка.***

- Если $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$ то **α(x)** и **β(x)** – эквивалентные ***бесконечно малые*** $\alpha \sim \beta$

Бесконечно малые функции

Полезно иметь в виду эквивалентность следующих бесконечно малых при $x \to 0$

$\sin x \sim x;$ $\quad e^x - 1 \sim x;$ $\quad (1+x)^m - 1 \sim mx;$

$tgx \sim x;$ $\quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a;$ $\quad 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}.$

$\arcsin x \sim x;$ $\quad \ln(x+1) \sim x;$

$arctg\ x \sim x;$ $\quad \log_a(x+1) \sim x \cdot \log_a e;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[4]{1+x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left(\begin{array}{c} \sin x \sim x \\ (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim \frac{1}{4}x \end{array}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{0.25x} = 4$$

1. Найти $\lim_{x \to 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найти $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$.

3. Найти $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{\sin 7x}$.