НОВО колледж

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

Обратная матрица

Квадратная матрица А называется невырожденной, если определитель этой матрицы отличен от нуля

Определение

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

1. Матрицы А и A^{-1} перестановочны, при этом A^{-1} - - квадратная матрица того же порядка, что и А

2. Из свойств определителя и правила умножения матриц $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Обратная матрица

Теорема

(о существовании и единственности квадратной матрицы)

Всякая невырожденная матрица А имеет обратную и она единственна

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{-1}{}_{n\times n}=?$$

1 этап $\det A \neq 0 \Rightarrow$ матрица А невырожденная, а значит имеет обратную матрицу

Обратная матрица

2 этап

Присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений, стоящих на местах элементов, к которым они относятся:

$$\overline{A}_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

3 этап

Союзная матрица, полученная при транспонировании присоединенной матрицы $\overline{A}$

$$A^{*}_{n\times n} = (\overline{A})^{T} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

4 этап

Умножим матрицу A^* на число $\dfrac{1}{\det A}$

$$A_{n\times n}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

5 этап

Проверка по определению обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

2.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.