

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется невырожденной, если определитель этой матрицы отличен от нуля

Определение

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A , если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

1. Матрицы A и A^{-1} перестановочны, при этом A^{-1} - квадратная матрица того же порядка, что и A

2. Из свойств определителя и правила умножения

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E \implies \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$
$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

Обратная матрица

Теорема

(о существовании и единственности квадратной матрицы)

Всякая невырожденная матрица A имеет обратную и она единственна

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^{-1}_{n \times n} = ?$$

1 этап $\det A \neq 0 \Rightarrow$ матрица A невырожденная, а значит имеет обратную матрицу

Обратная матрица

2 этап

Присоединенная матрица, состоящая из алгебраических дополнений, стоящих на местах элементов, к которым они относятся:

$$\overline{A}_{n \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

3 этап

Союзная матрица, полученная при транспонировании присоединенной матрицы \bar{A}

$$A^*_{n \times n} = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

4 этап

Умножим матрицу A^* на число $\frac{1}{\det A}$

$$A_{n \times n}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

5 этап

Проверка по определению обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

2. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

$$2.1. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.2. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$