Тригонометрические функции

Зачем нужны синусы и косинусы?

Древние греки обычный треугольник называли **тригон**, поэтому слово **тригонометрия** с их языка переводится просто как «измерение треугольника». Правда, необходимость таких измерений в первую очередь была связана с астрономией. Даже для того, чтобы знать точное время восхода Солнца в тот или иной день года, требовались специальные вычисления. Современная тригонометрия в первую очередь имеет дело с косинусами, синусами и тангенсами — всех
их понятий греки ещё не знали. Тем не менее греческие
трономы Гиппарх и Птолемей составили подробные та-
ицы для вычисления хорд, стягивающих различные
лы с вершиной в центре окружности: эти таблицы были
прямую связаны с синусами данных углов (рис. 1).

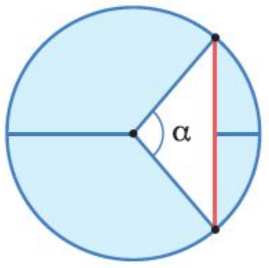


Рис. 1

Слово «синус» возникло в работах индийских астрономов V—VI вв. Они называли его «джива», что означало «тетива», то есть хорда окружности. Арабы стали называть его «джайб», а затем на латынь это перевели как sinus, что значит «изгиб или кривизна»

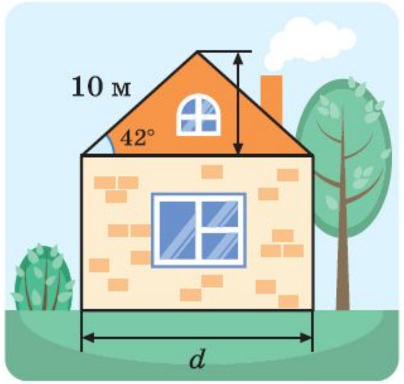


Рис. 2

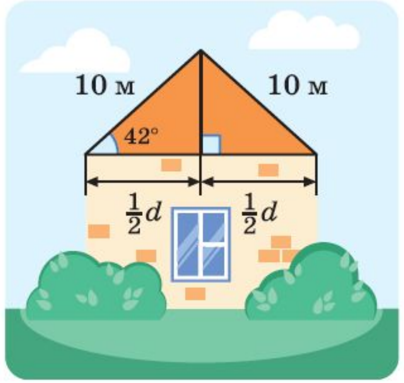


Рис. 3

Рис. 4

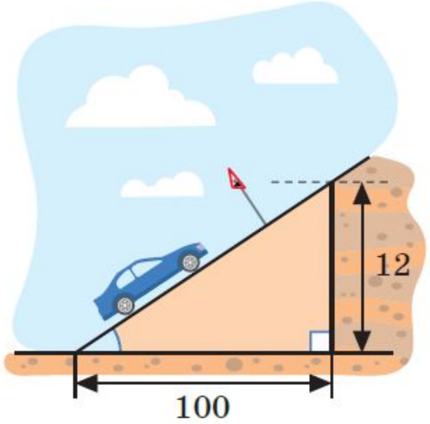
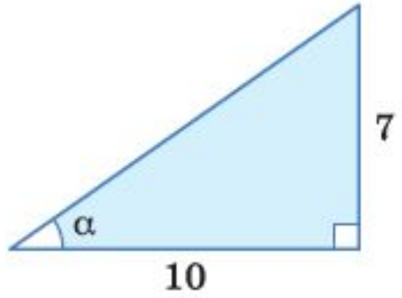


Рис. 5



Критический уклон дороги для автомобиля имеет тангенс 0,7,

Тригонометрия прямоугольного треугольника

Всю тригонометрию для острых углов можно вывести из прямоугольного треугольника — ведь именно с него она и начиналась. Давайте возьмём прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Пусть в этом треугольнике против катета a лежит острый угол α. Тогда все тригонометрические величины угла α можно записать через отношения сторон данного треугольника.

Синусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, лежащего против этого угла, к гипотенузе.

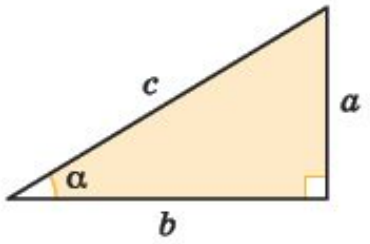
Синус угла α обозначают так: $\sin\alpha$.

Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначают так: $\cos\alpha$.

Тангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называют отношение его катетов — противоположного от угла α к прилежащему.

Тангенс угла α обозначают так: $\operatorname{tg}\alpha$.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

УПРАЖНЕНИЕ

2. Найдите тангенсы углов MEK и ABC, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 10).

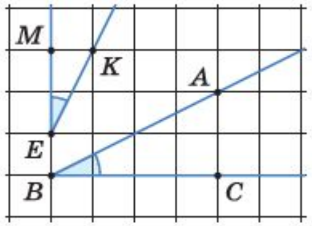
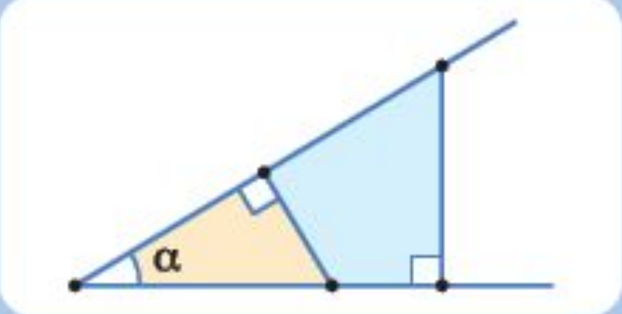


Рис. 10

ТЕОРЕМА

Синус, косинус и тангенс острого угла не зависят от выбора прямоугольного треугольника, который вписан в данный угол.



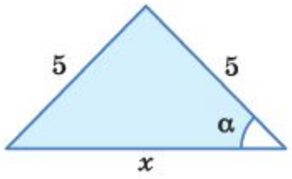


Рис. 12

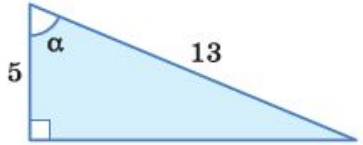


Рис. 13

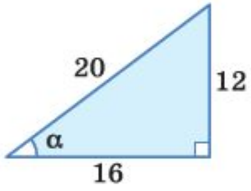


Рис. 14

УПРАЖНЕНИЯ

3. На рисунках 12 и 13 найдите: а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$.

4. Найдите основание треугольника, изображённого на рисунке 14, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

5. Найдите синус и косинус угла ABC, изображённого на клетчатой бумаге (рис. 15).

6. Найдите тангенсы углов α и β, изображённых на клетчатой бумаге (рис. 16).

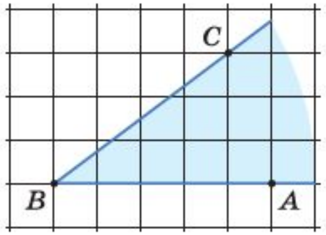


Рис. 15

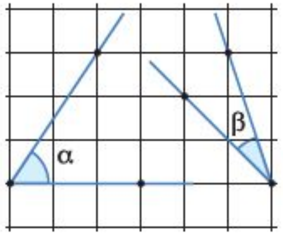


Рис. 16

Тест

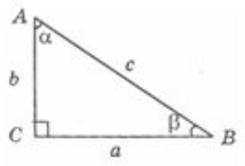
класс)

1 вариант

1. Используя рисунок, выбери правильный ответ

а) $\cos\alpha = \frac{a}{b}$; б) $\cos\alpha = \frac{a}{c}$; в) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;

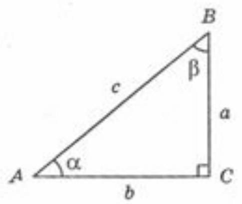
г) $\cos\alpha = \frac{b}{a}$.



2. Используя рисунок, выбери правильный ответ

а) $tg\beta = \frac{a}{b}$; б) $tg\beta = \frac{b}{c}$; в) $tg\beta = \frac{a}{c}$;

г) $tg\beta = \frac{b}{a}$.

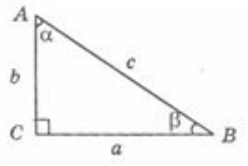


2 вариант

1. Используя рисунок, выбери правильный ответ

а) $tg\beta = \frac{a}{b}$; б) $tg\beta = \frac{a}{c}$; в) $tg\beta = \frac{b}{c}$;

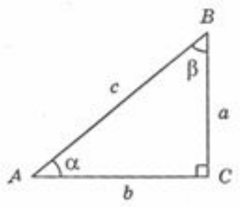
г) $tg\beta = \frac{b}{a}$.



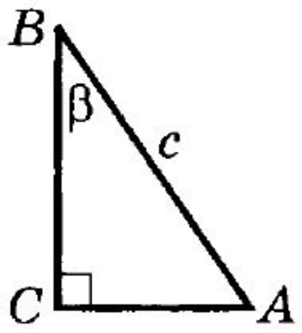
2. Используя рисунок, выбери правильный ответ

а) $\sin\alpha = \frac{a}{b}$; б) $\sin\alpha = \frac{b}{c}$; в) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;

г) $\sin\alpha = \frac{b}{a}$.



1

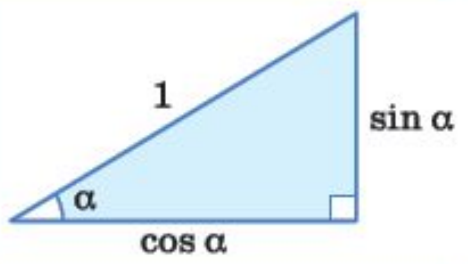


Дано: $\angle C = 90°$; $\angle B = \beta$; $AB = c$.

Найти: AC, BC, $\angle A$.

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



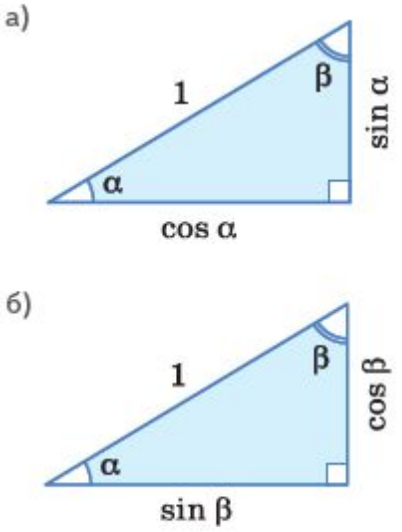


Рис. 17

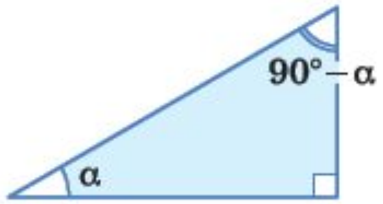
$$\sin\beta = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$



На что умножать гипотенузу?

На практике для большинства расчётов в треугольниках полезно помнить даже не определения синуса или косинуса угла, а общий принцип, который можно образно назвать так: «На что умножать гипотенузу?»

Рассмотрим два прямоугольных треугольника с одним и тем же острым углом α, гипотенузы которых равны 1 и C (рис. 18, 19).

Эти треугольники подобны по двум углам, поэтому их стороны должны быть пропорциональны. Мы знаем, что у треугольника с гипотенузой 1 катеты равны $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Значит, треугольник с гипотенузой, равной C, будет иметь катеты $C \cdot \sin\alpha$ и $C \cdot \cos\alpha$.

Отсюда и вытекает этот нехитрый принцип:

- **чтобы найти катет, противоположный острому углу прямоугольного треугольника, нужно его гипотенузу умножить на синус данного угла;**
- **чтобы найти прилежащий катет, гипотенузу нужно умножить на косинус угла.**

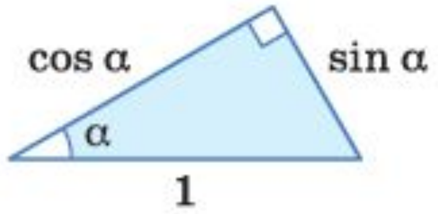


Рис. 18

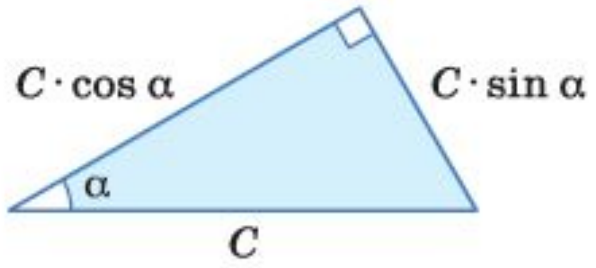
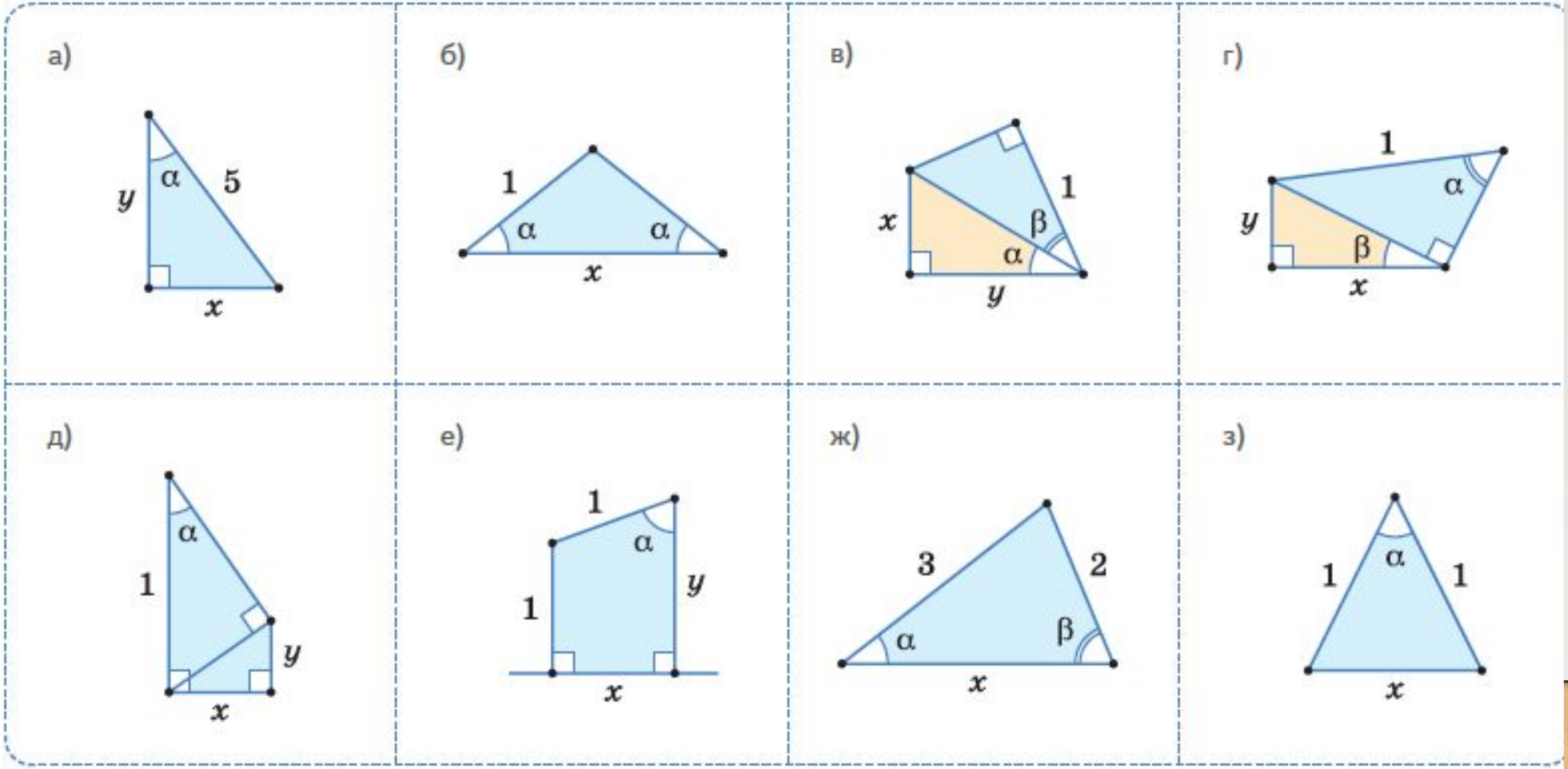


Рис. 19

УПРАЖНЕНИЕ

7. Выразите через тригонометрические функции углов α и β отрезки, обозначенные на рисунках буквами x и y (рис. 20, *а–з*).

Рис. 20



УГЛЫ 30° и 60°

Мы начнём с угла 30°. На самом деле синус этого угла вы уже давно знаете... Можете вы сказать, чему он равен? Не будем спешить, а просто нарисуем прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и острым углом 30° (рис. 21). Все правильно — этот треугольник обладает хорошо известным свойством: его катет, лежащий против данного угла, равен половине гипотенузы! Поэтому $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

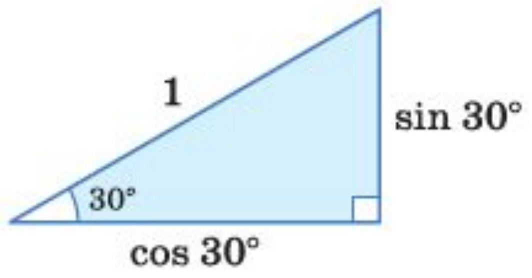


Рис. 21

Второй катет рассматриваемого нами треугольника по определению равен $\cos 30^\circ$. Давайте обозначим его длину буквой x (рис. 22) и запишем для этого треугольника теорему Пифагора: $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$. Откуда $x^2 = \frac{3}{4}$. Значит, $x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так мы получим точное значение $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

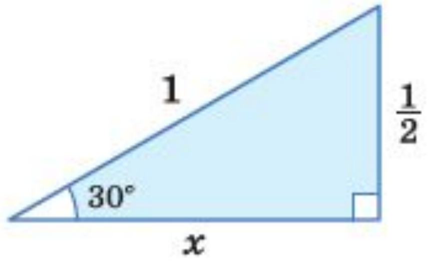


Рис. 22

Тангенс угла 30° равен отношению катетов этого треугольника, поэтому $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что второй острый угол нашего прямоугольного треугольника равен $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (рис. 23). Поэтому мы можем так же написать, что $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

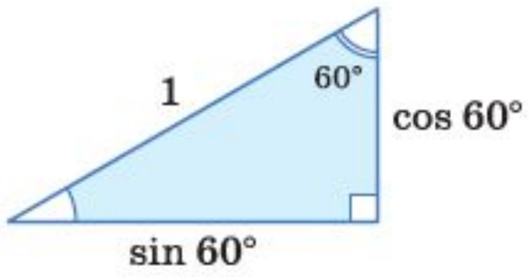


Рис. 23

Рис.

УГОЛ 45°

Чтобы найти тригонометрические величины угла 45°, рассмотрим прямоугольный треугольник с таким углом и гипотенузой, равной 1. Понятно, что второй острый угол этого треугольника равен $90° - 45° = 45°$.

Значит, данный треугольник будет равнобедренным

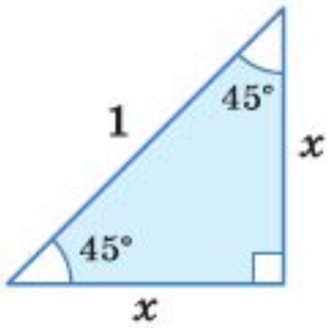


Рис. 24

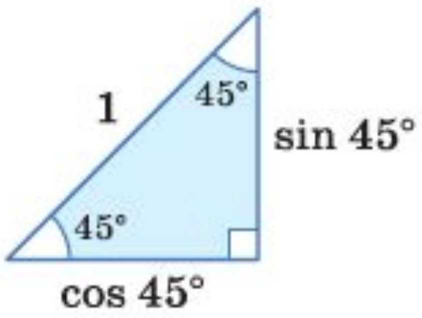


Рис. 25

по признаку, поэтому мы обозначим его катеты одной буквой x (рис. 24). Запишем для него теорему Пифагора: $x^2 + x^2 = 1$. Откуда $x^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Поскольку гипотенуза такого треугольника равна 1, его катеты равны синусу и косинусу угла 45° (рис. 25), то есть $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отношение катетов этого треугольника равно 1, поэтому $\operatorname{tg} 45° = 1$.

УГЛЫ 90° и 0°

Как определить значения синуса или косинуса для угла 90°? Ведь прямоугольного треугольника с двумя прямыми углами нет. А угла с величиной 0° вообще не существует! Всё это так, но мы с вами скоро выясним, что синус, косинус и тангенс можно правильно определить не только для прямого угла, но даже для тупых углов — и чтобы это сделать, вполне достаточно здравого смысла.

Возьмём прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB которого равна 1. Зафиксируем его вершину A и начнём менять острый угол α при этой вершине (рис. 26). Для удобства будем считать, что катет AC нашего треугольника всё время лежит на горизонтальной прямой.

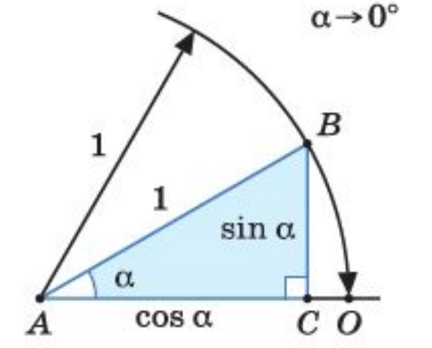


Рис. 26

Если угол α делать всё меньше и меньше, вершина B треугольника по окружности радиуса 1 будет приближаться к точке O, лежащей на луче AC. При этом катет BC этого треугольника тоже будет уменьшаться, пока не станет равен 0. А мы знаем, что его длина равна $\sin\alpha$. Поэтому логично считать, что $\sin 0° = 0$. Вместе с тем катет AC треугольника будет стремиться к отрезку AO, равному 1. Поскольку длина этого катета равна $\cos\alpha$, то естественно положить, что $\cos 0° = 1$.

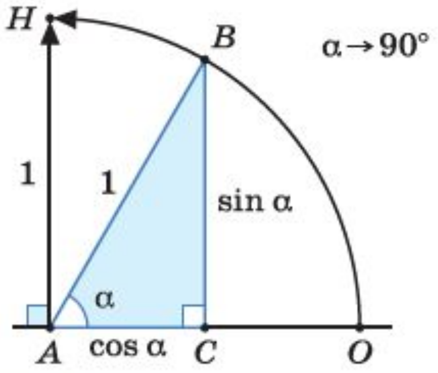


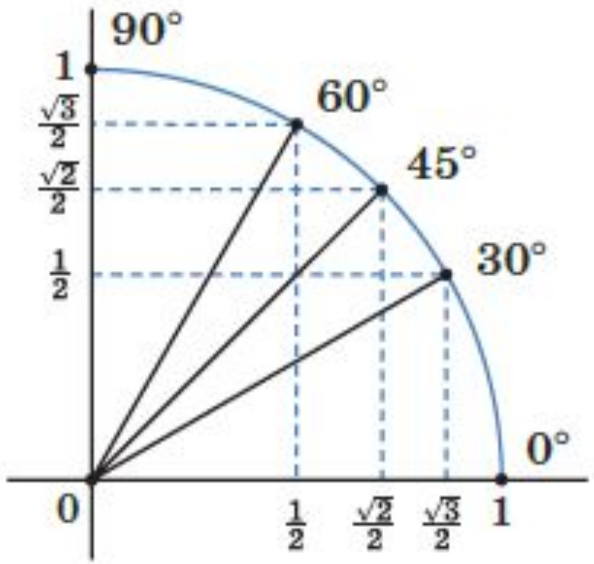
Рис. 27

Примерно так же можно разобрать ситуацию, когда угол α треугольника стремится к 90° (рис. 27). Точка B тогда по окружности будет приближаться к точке H, пока катет BC треугольника ABC не станет равен 1. Следовательно, в этом случае мы получим, что $\sin 90° = 1$. При этом точка C совпадёт с точкой A — и катет AC станет равен 0. Но тогда естественно считать, что $\cos 90° = 0$.

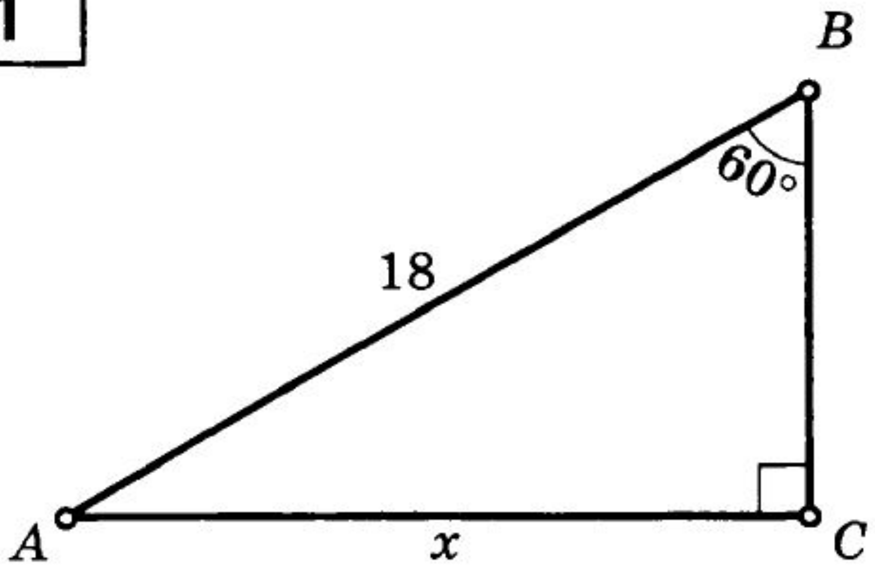
Тангенс 0° можно получить так же, как и для острого угла, просто разделив синус на косинус. Поэтому

И теперь давайте заполним всю таблицу.

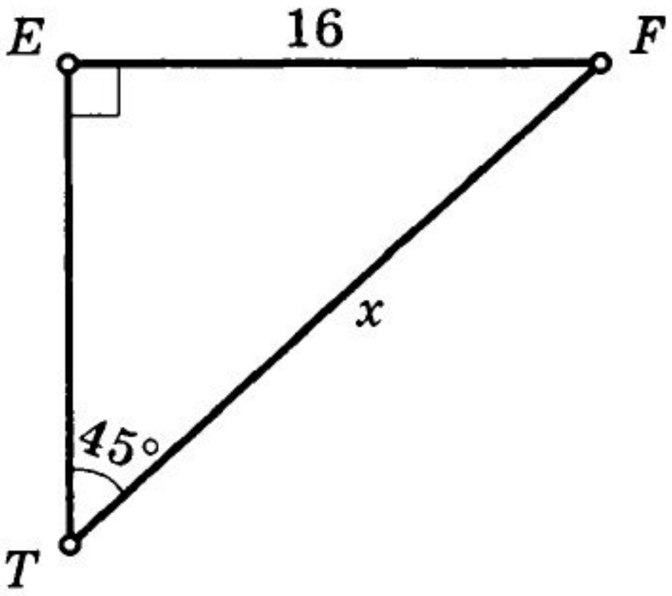
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



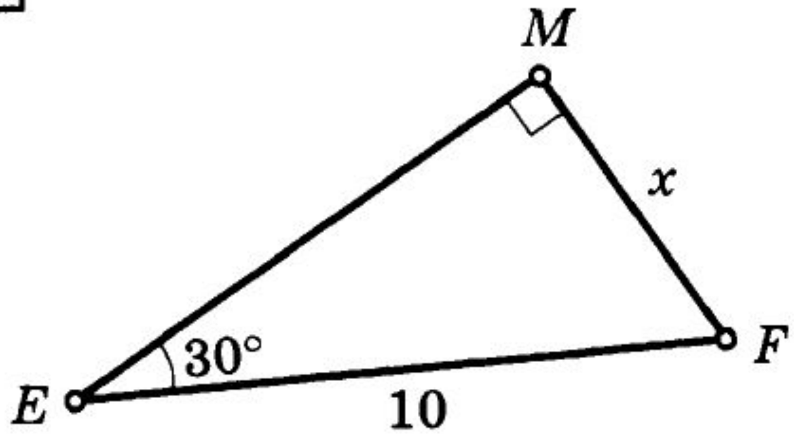
1



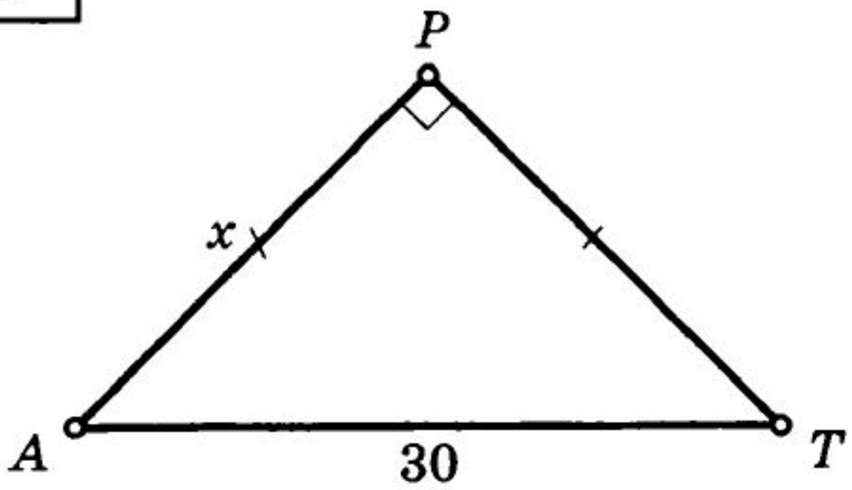
2



5



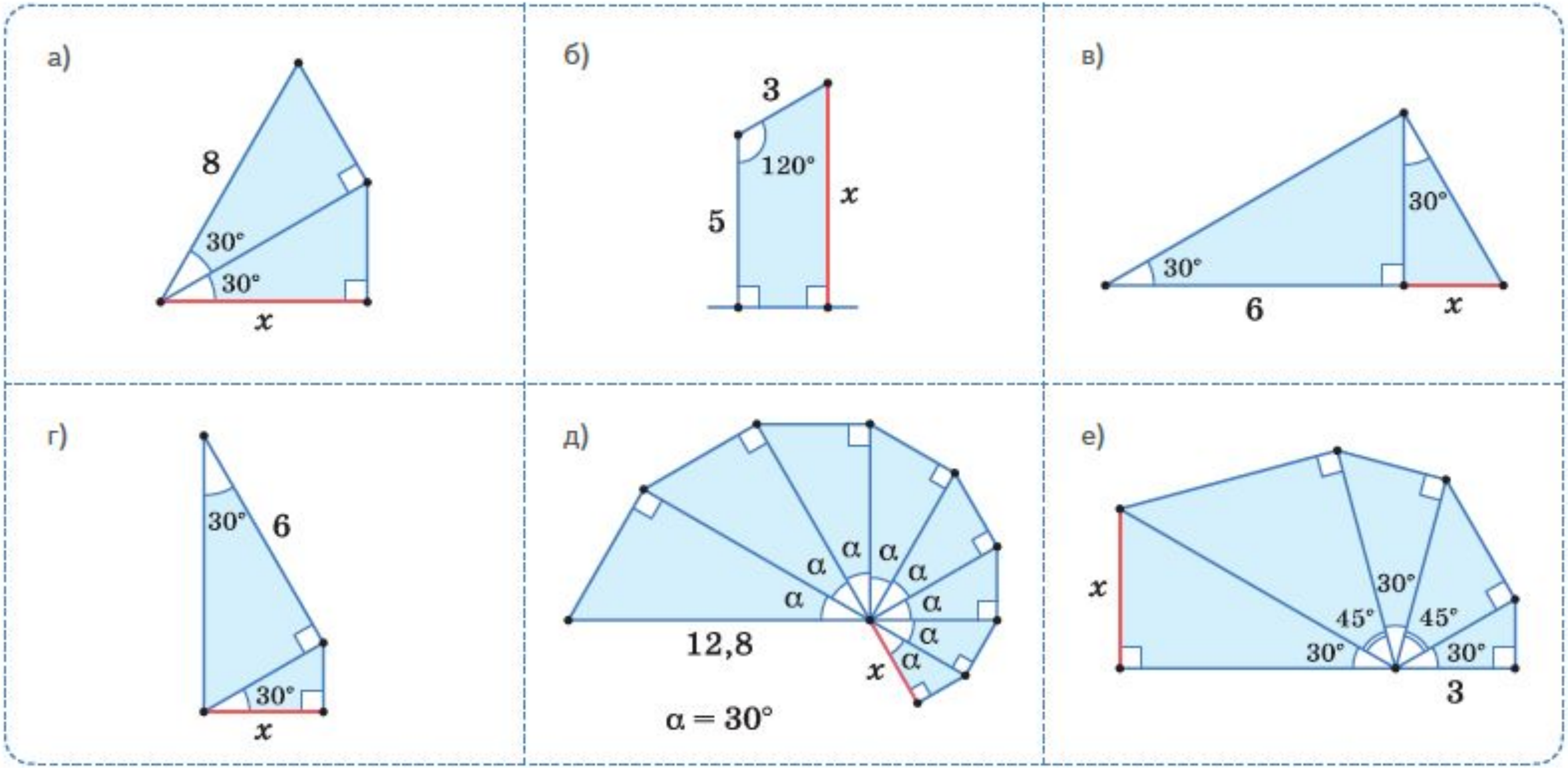
6



УПРАЖНЕНИЕ

8. Найдите длину отрезка, обозначенного на рисунках буквой x (рис. 29, *а*—*е*).

Рис. 29



Тригонометрические формулы

СИНУС И КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМУ КРУГУ

α	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
sin α	0,017	0,034	0,052	0,069	0,087	0,104	0,122	0,139	0,156	0,173
cos α	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990	0,987	0,984
tg α	0,017	0,034	0,052	0,069	0,087	0,105	0,122	0,140	0,158	0,176
ctg α	57,3	28,6	19,1	14,3	11,4	9,51	8,14	7,11	6,31	5,67
α	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
sin α	0,190	0,207	0,225	0,251	0,258	0,275	0,292	0,309	0,325	0,342
cos α	0,981	0,978	0,974	0,970	0,965	0,961	0,956	0,951	0,945	0,939
tg α	0,194	0,212	0,230	0,249	0,267	0,286	0,305	0,324	0,344	0,364
ctg α	5,14	4,70	4,33	4,01	3,73	3,48	3,27	3,07	2,90	2,74
α	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
sin α	0,358	0,374	0,390	0,406	0,422	0,438	0,454	0,469	0,484	0,500
cos α	0,933	0,927	0,920	0,913	0,906	0,889	0,891	0,882	0,874	0,866
tg α	0,383	0,404	0,424	0,445	0,466	0,487	0,509	0,531	0,554	0,577
ctg α	2,60	2,47	2,35	2,24	2,14	2,05	1,96	1,88	1,80	1,73
α	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°
sin α	0,515	0,529	0,544	0,559	0,573	0,587	0,601	0,615	0,629	0,642
cos α	0,857	0,848	0,838	0,829	0,819	0,809	0,798	0,788	0,777	0,766
tg α	0,600	0,624	0,649	0,674	0,700	0,726	0,753	0,781	0,809	0,839
α	41°	42°	43°	44°	45°					
sin α	0,656	0,669	0,682	0,694	0,707					
cos α	0,754	0,743	0,731	0,719	0,707					
tg α	0,869	0,900	0,932	0,965	1,000					

СИНУС ОДНОГО ГРАДУСА

sin 1° астрономы вычисляли особо точно. Для этого Аль-Бируни даже решал кубическое уравнение. Так он получил значение sin 1° ≈ 0,017452.

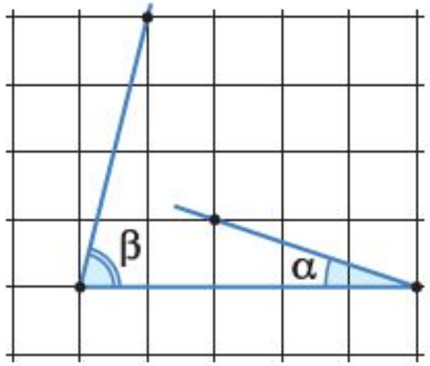


Рис. 31

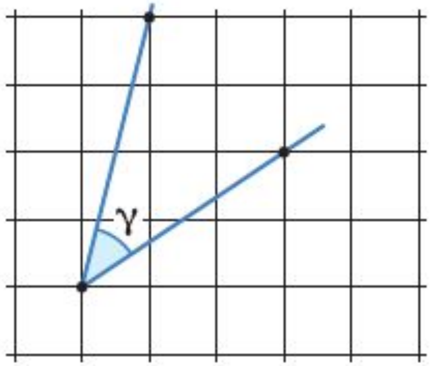


Рис. 32

Синус двойного угла

ФОРМУЛА СИНУСА ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

УПРАЖНЕНИЯ

21. Проверьте с помощью формулы синуса двойного угла:
а) $\sin 60° = 2\ \sin 30° \cdot \cos 30°$;
б) $\sin 90° = 2\sin 45° \cdot \cos 45°$;
в) $\sin 40° = 2\sin 20° \cdot \cos 20°$.

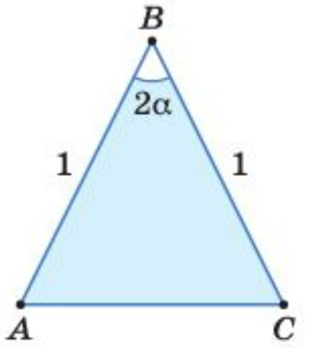


Рис. 37

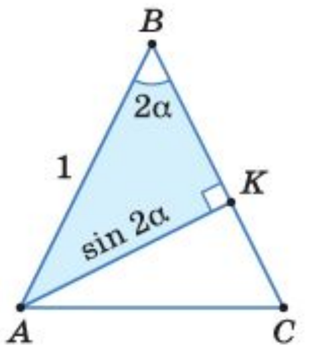


Рис. 38

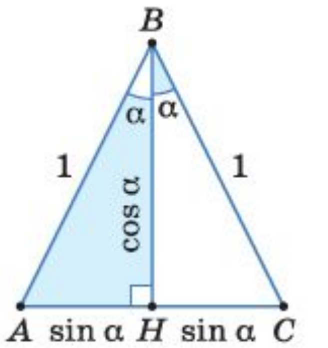


Рис. 39

Косинус двойного угла

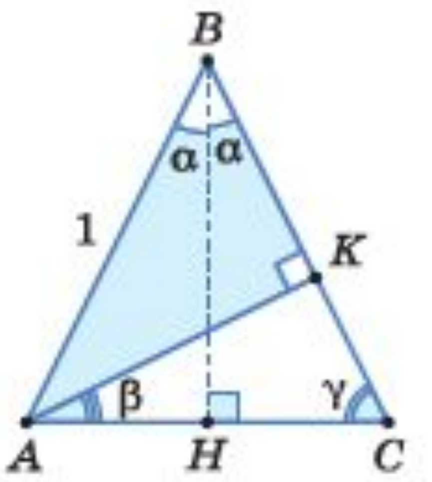


Рис. 40

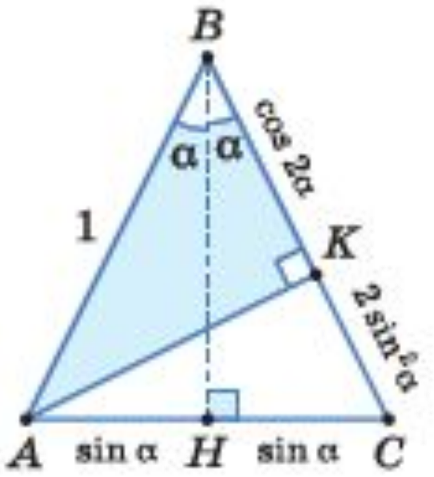


Рис. 41

ФОРМУЛА КОСИНУСА ДВОЙНОГО УГЛА

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

СИНУС И КОСИНУС СУММЫ ДВУХ УГЛОВ

Синус и косинус суммы двух углов можно выразить через косинусы и синусы этих углов с помощью таких формул:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Доказать эти формулы для углов α и β, сумма которых меньше 90°, можно с помощью рисунка 42. На нём прямоугольник $ABCD$ разбит на четыре прямоугольных треугольника. Величины углов MAK и KAD на этом рисунке соответственно обозначены как α и β, а отрезок AM равен 1. Каждое из слагаемых, входящих в обе формулы, равно одному из отрезков на данном чертеже. Проверьте, что угол CKM на этом рисунке равен β.

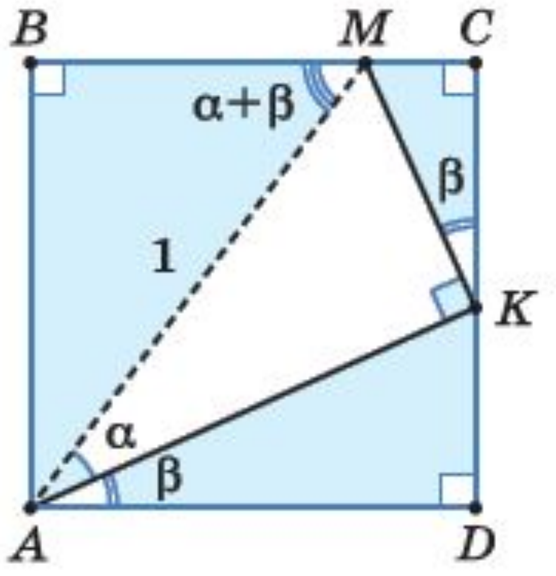
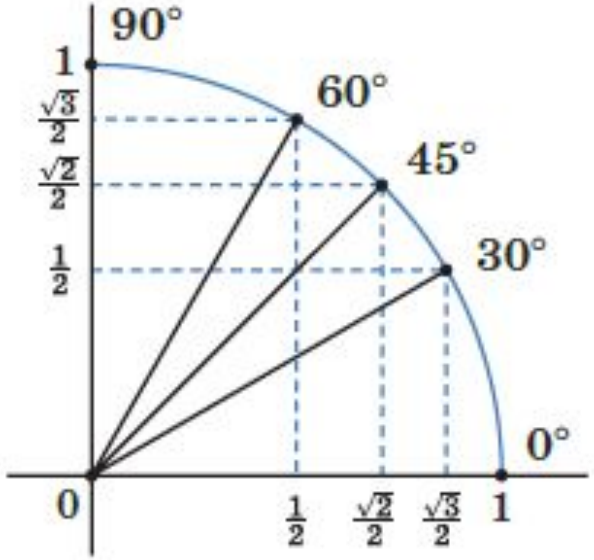


Рис. 42

Тригонометрический круг. Формулы приведения

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



Тригонометрический круг

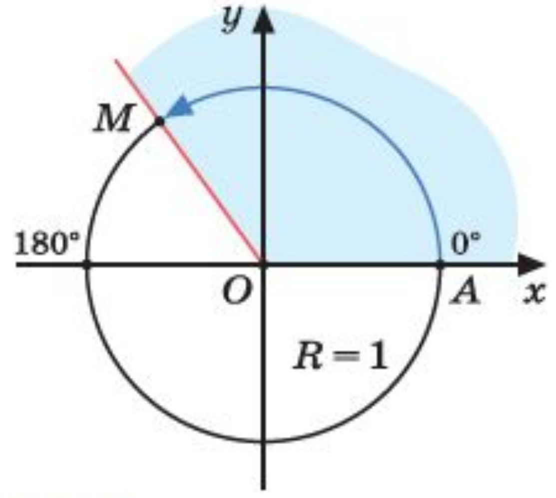


Рис. 43

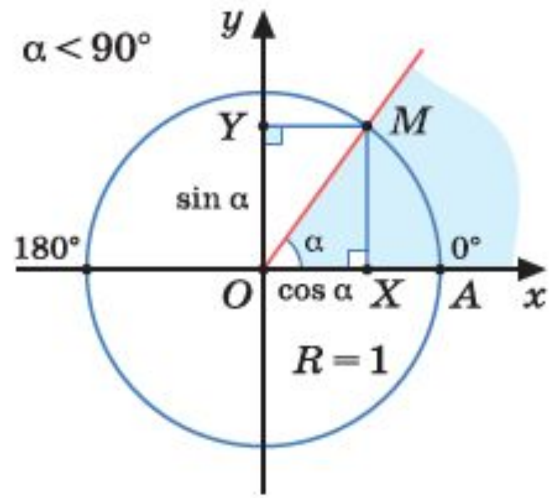
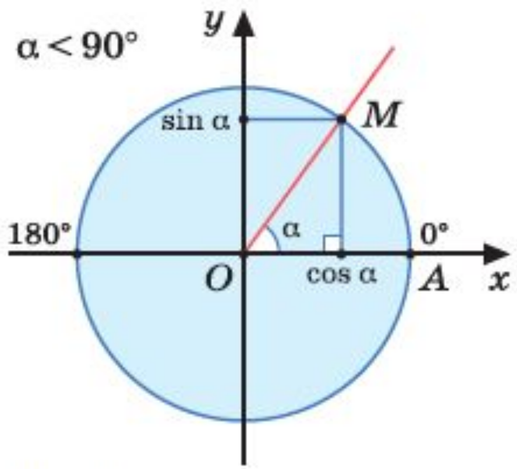


Рис. 44



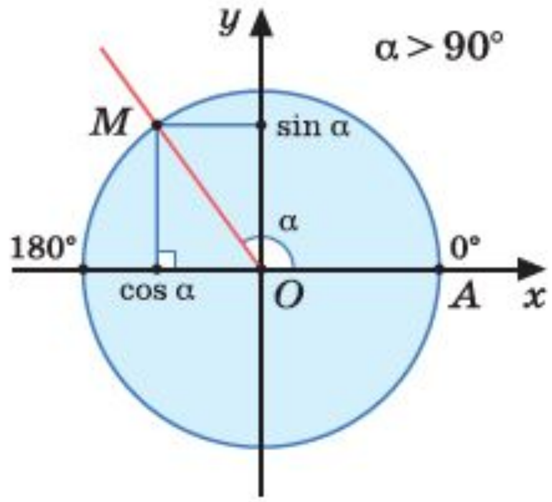


Рис. 46

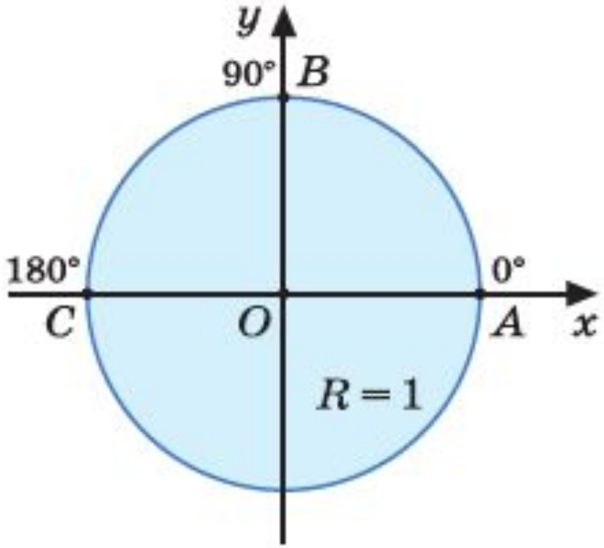


Рис. 47

$$|\sin\alpha|,\ |\cos\alpha| \leqslant 1$$

УПРАЖНЕНИЯ

30. На тригонометрическом круге (рис. 48) отметили 6 точек. В таблицу записали соответствующие этим точкам углы и значения их синуса и косинуса. Какие числа нужно поставить в пустые клетки этой таблицы?

Точка	A	B	C	D	E	F
Угол α	150°	135°	120°			
$\sin\alpha$	0,5				$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos\alpha$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0,5		0,8

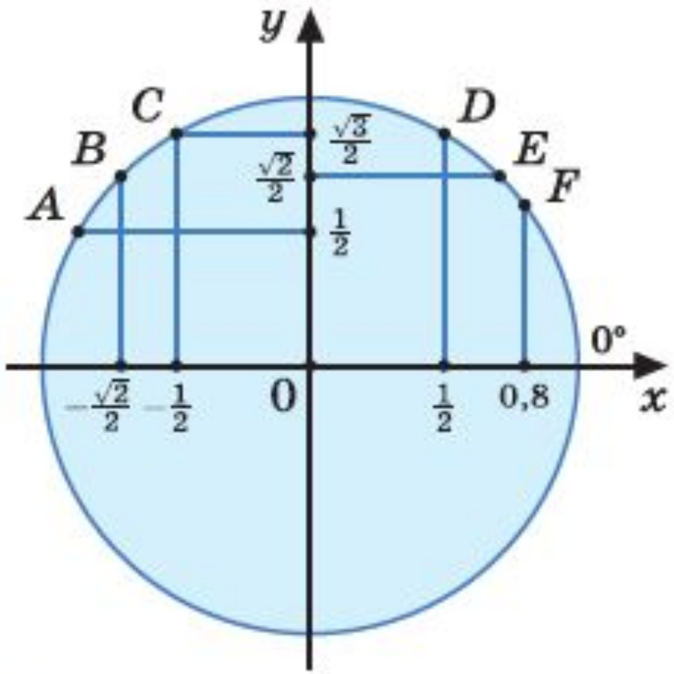


Рис. 48

на тригонометрическом круге

Для каких ещё тупых углов можно точно вычислить значения их синуса и косинуса? На самом деле все такие углы прямо связаны с таблицей, которую мы с вами заполняли для острых углов. И понять нам это поможет простое соображение:

> **углы с величинами α и $180° - \alpha$ на тригонометрическом круге расположены симметрично относительно оси Oy.**

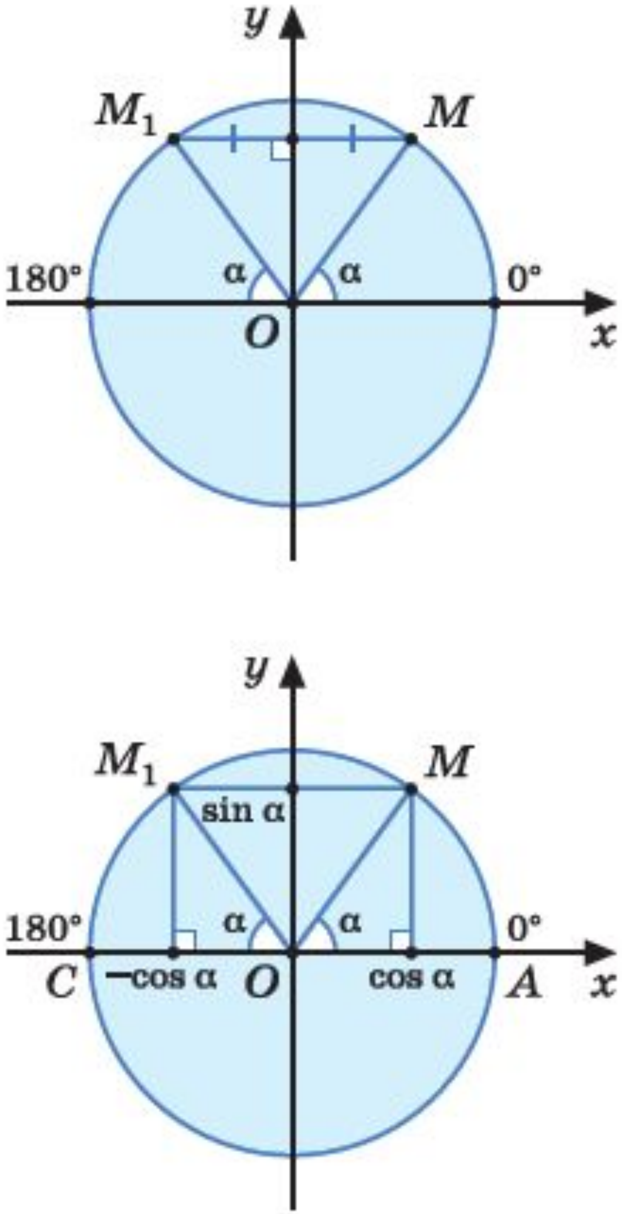
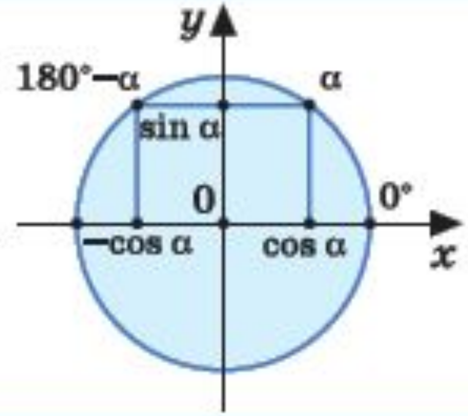


Рис. 49

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$



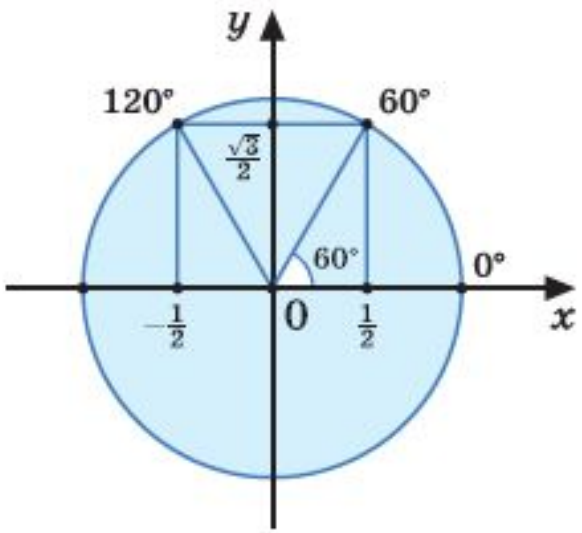


Рис. 50

УПРАЖНЕНИЯ

32. Запишите значения синусов и косинусов тупых углов в таблицу:

α	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			0
$\cos\alpha$	0				–1

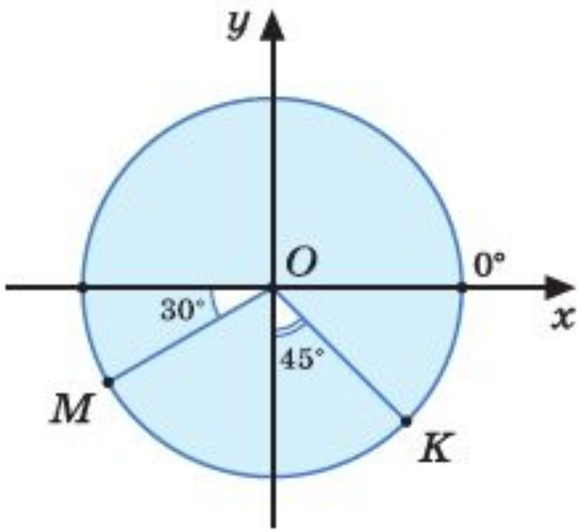


Рис. 51

33. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите синус и косинус точек M и K на рисунке 51.

34. Пользуясь тригонометрическим кругом, для острого угла α докажите равенство $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$.

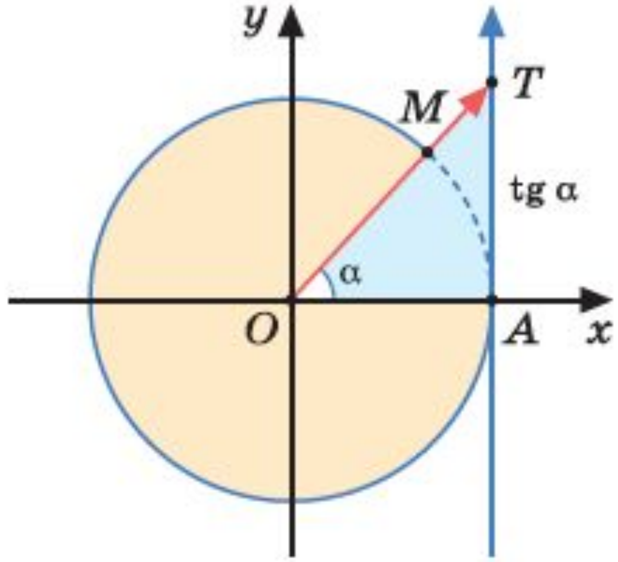


Рис. 52

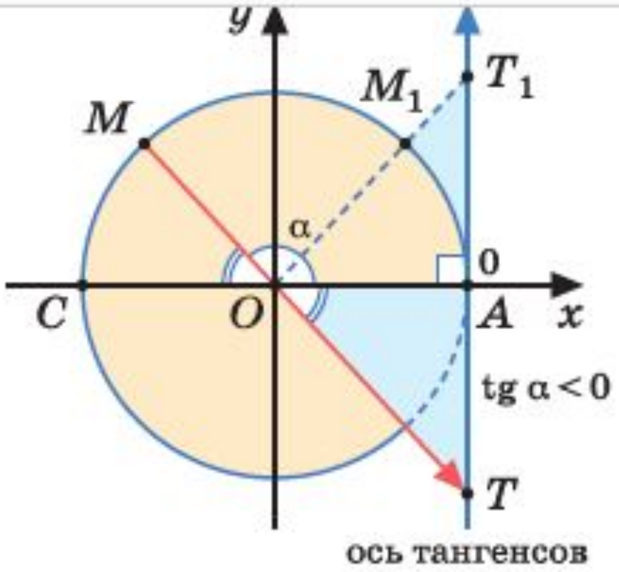


Рис. 53

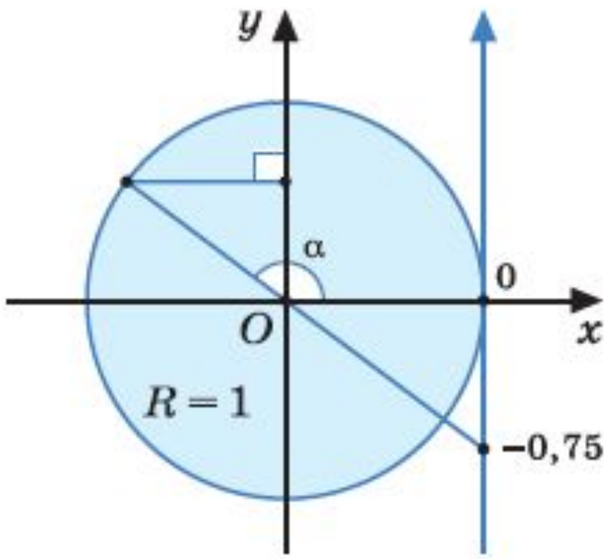


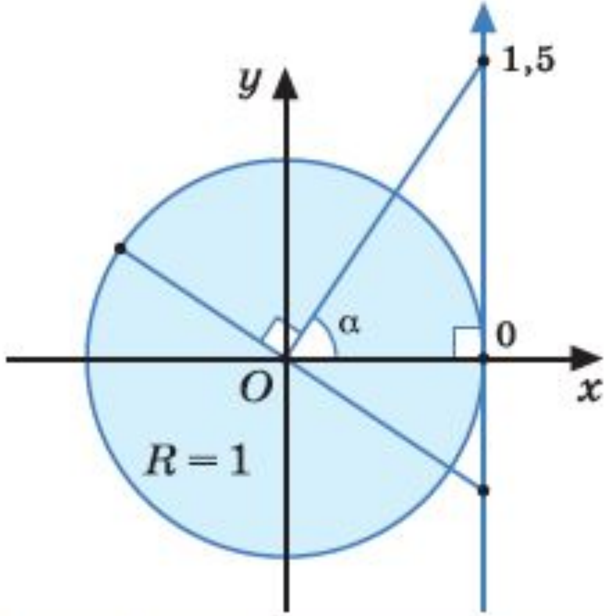
Рис. 54

УПРАЖНЕНИЯ

35. Найдите значения $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{tg} 135°$ и $\operatorname{tg} 150°$.

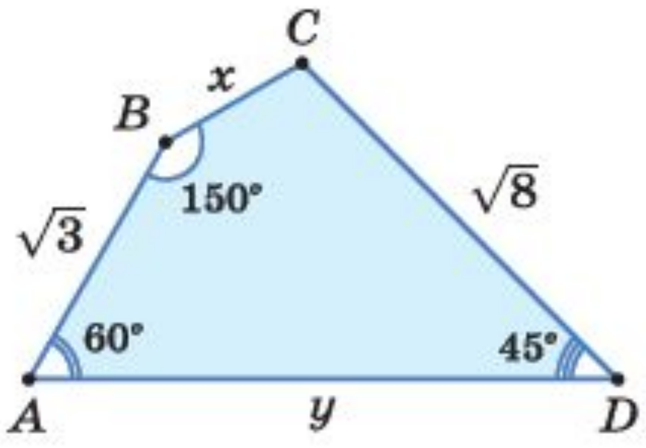
36. Тангенс тупого угла α равен $-0{,}75$. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите $\sin \alpha$ (рис. 54).

37. Тангенс острого угла α равен $1{,}5$. Пользуясь тригонометрическим кругом, найдите $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$ (рис. 55).



Формулы площадей треугольника, параллелограмма, произвольного четырехугольника

ПРИМЕР 3. ★★☆ В четырёхугольнике $ABCD$ углы при его вершинах A, B и D соответственно равны $60°$, $150°$ и $45°$ (рис. 69). Найдите длины его сторон BC и AD, если $AB = \sqrt{3}$, $CD = \sqrt{8}$.



РЕШЕНИЕ

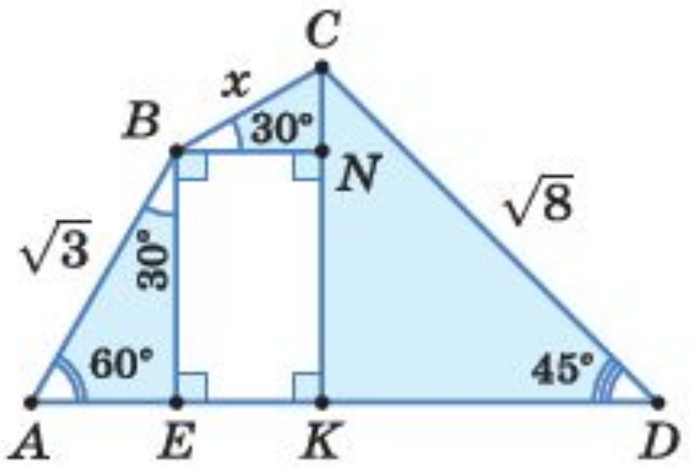
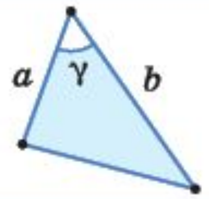


Рис. 70

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

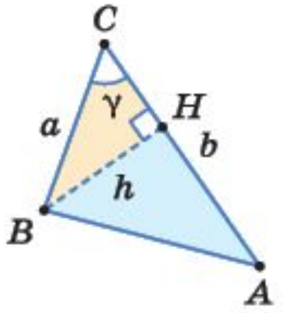


Рис. 56

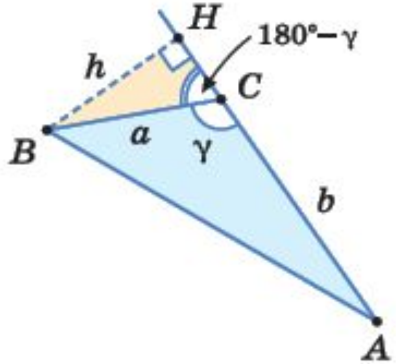
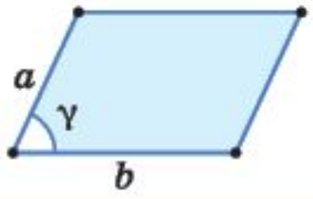


Рис. 57

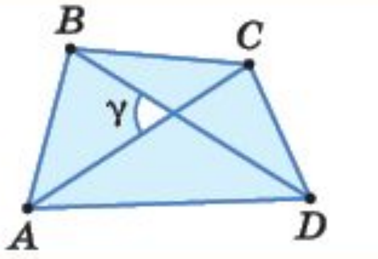
ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними $S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$.



ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведём доказательство для выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке M, а острый угол между ними равен γ. Опустим из точек B и D высоты на диагональ AC и обозначим их длины как h_1 и h_2 (рис. 58). Тогда эти две высоты можно выразить через угол и части диагонали BD: $h_1 = BM \cdot \sin\gamma$, $h_2 = DM \cdot \sin\gamma$.

Обозначим площади треугольников ABC и ACD как S_1 и S_2 (рис. 59). Тогда площадь всего четырёхугольника $ABCD$ будет равна $S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \dfrac{AC \cdot h_1}{2} + \dfrac{AC \cdot h_2}{2}$.

Подставим в это равенство выражения для h_1 и h_2. Тогда $S_1 + S_2 = \dfrac{AC \cdot BM \cdot \sin\gamma}{2} + \dfrac{AC \cdot DM \cdot \sin\gamma}{2}$.

Вынесем общие множители и запишем сумму этих дробей в виде одной дроби. Тогда мы получим:

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 = \frac{AC \cdot (BM + DM) \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

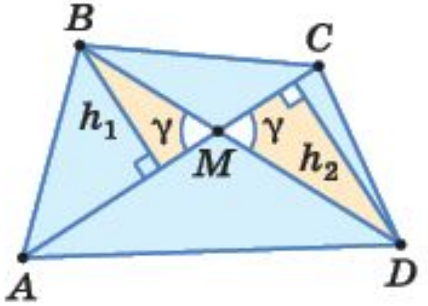


Рис. 58

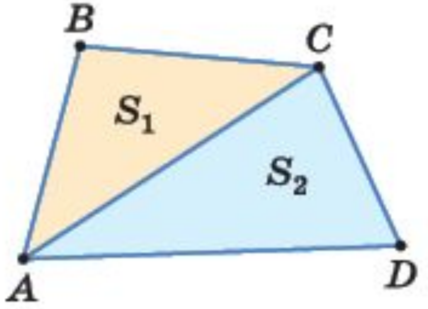


Рис. 59

ВОПРОСЫ

1. Что называют синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называют тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Может ли косинус угла быть больше 1? Может ли он быть меньше нуля?
4. Может ли тангенс острого угла равняться 2? Может ли он равняться -5?
5. В чём заключается основное тригонометрическое тождество?
6. Какие вы знаете формулы приведения?
7. Чему равны $\cos 180°$ и $\sin 90°$?
8. Чему равны $\cos 60°$ и $\sin 45°$?
9. Чему равны $\cos 120°$ и $\sin 150°$?
10. Как расположена ось тангенсов относительно тригонометрического круга?
11. Две точки на тригонометрической окружности симметричны относительно оси Oy. Что можно сказать про координаты этих точек?
12. Какую вы знаете формулу синуса двойного угла?
13. Какую вы знаете формулу косинуса двойного угла?
14. Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?
15. Какую вы знаете формулу для площади четырёхугольника?
16. Как выражается биссектриса треугольника через две его стороны и угол между ними?

ПРИМЕР 5. ★★☆ Катеты прямоугольного треугольника равны a и b ($a < b$). Прямая проходит через вершину его прямого угла и образует с большим катетом угол $60°$. Найдите отрезок этой прямой, находящийся внутри треугольника (рис. 73).

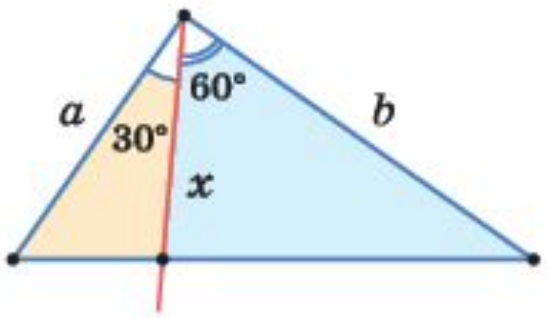
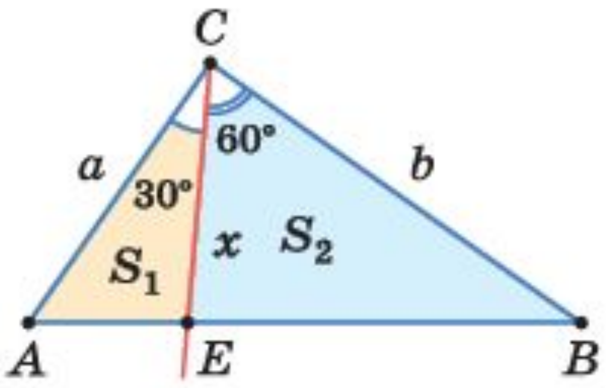
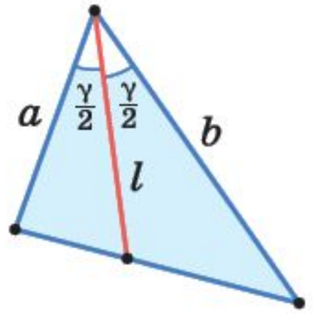


Рис. 73



ФОРМУЛА БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если две стороны треугольника равны a и b, а угол между ними равен γ, то биссектриса треугольника, выходящая из вершины этого угла, имеет длину $l = \dfrac{2ab \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.



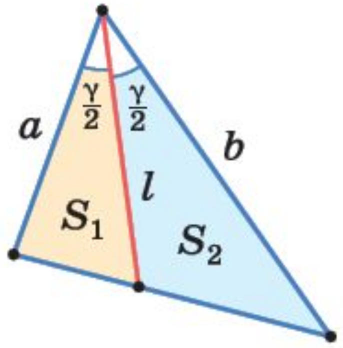
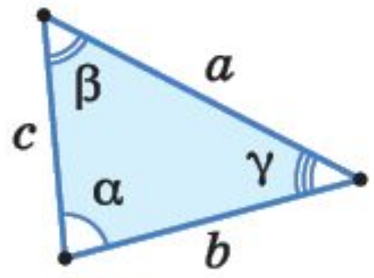


Рис. 62

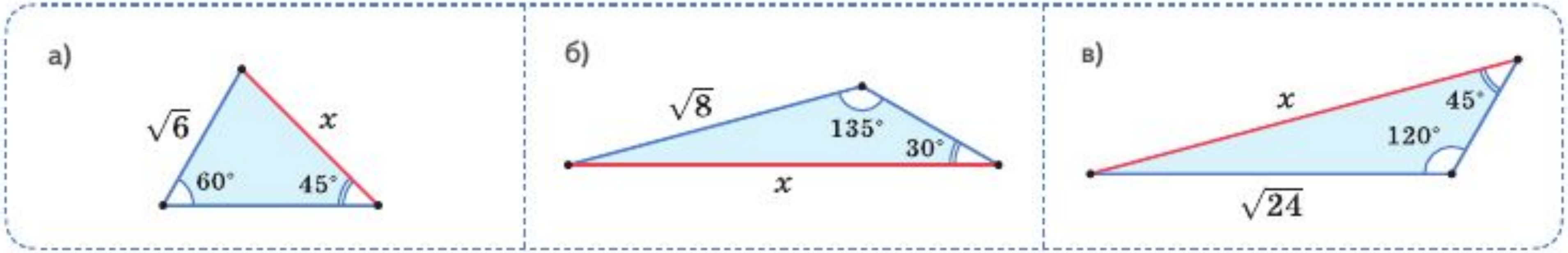
Теорема синусов

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Стороны в треугольнике пропорциональны синусам противолежащих углов:
$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$

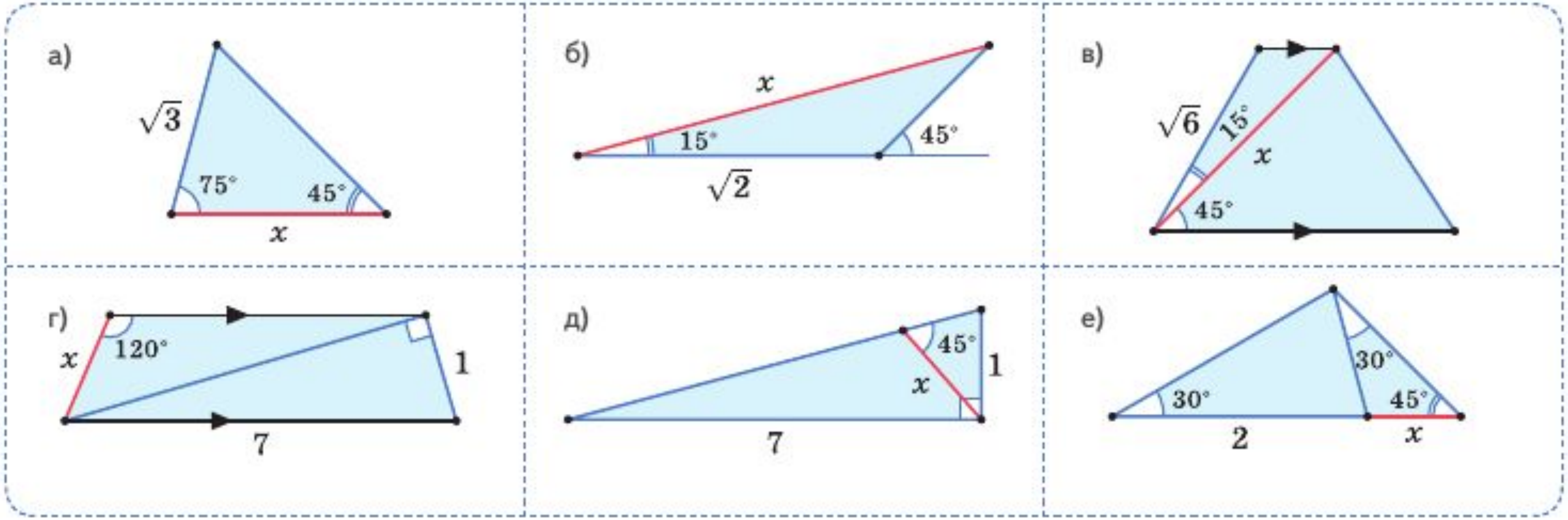


1. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенную буквой x (рис. 4).



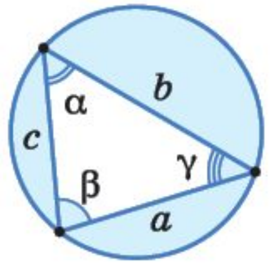
2. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенную буквой x. Стрелками на некоторых из них отмечены параллельные прямые (рис. 5).

Рис. 4



ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Отношение любой стороны в треугольнике к синусу противоположного ей угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



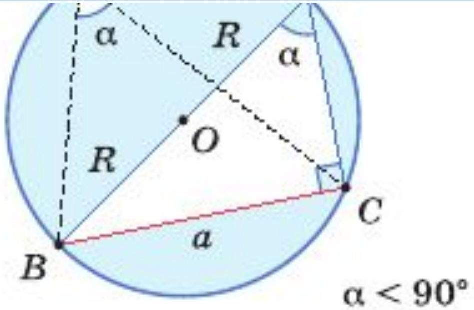
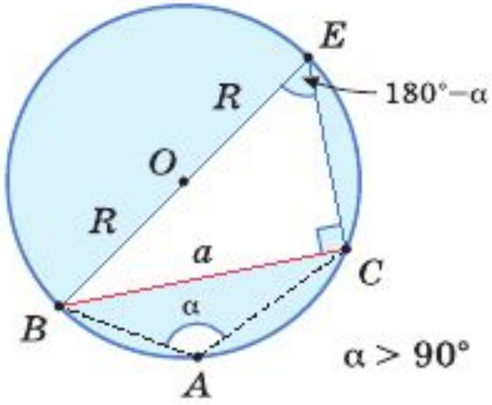
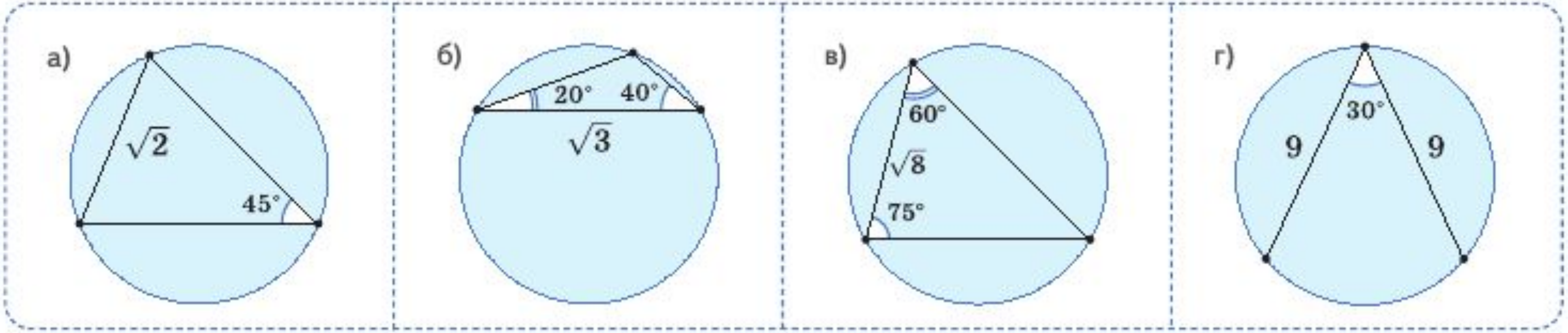


Рис. 6



5. С помощью теоремы синусов удобно находить радиусы окружностей. Найдите радиусы окружностей, изображённых на рисунках (рис. 9).



Домашнее задание

6. В окружности радиуса 50 провели хорду длиной 39. С точностью до одного градуса найдите величины вписанных углов, опирающихся на данную хорду.

7. Две стороны треугольника равны 6 и 7, а высота, опущенная на его третью сторону, равна 5. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

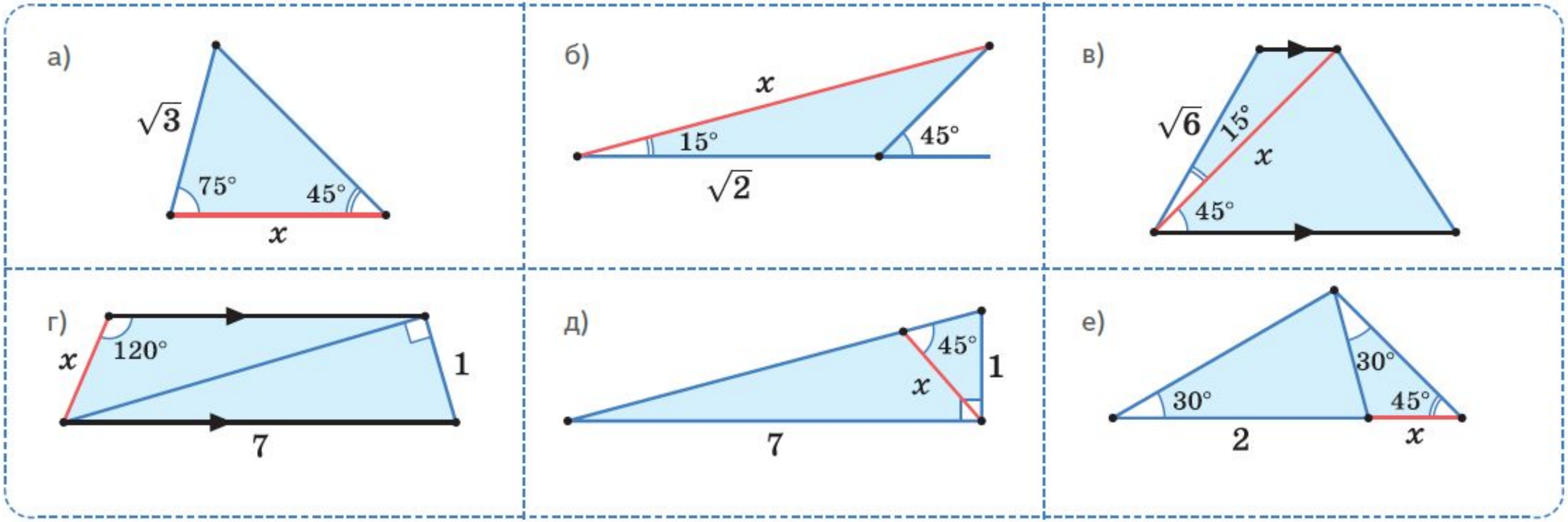
Вычисление радиусов окружностей

ВОПРОСЫ

1. В чём заключается теорема синусов?
2. Могут ли синусы углов одного треугольника относиться между собой как $1 : 2 : 3$?
3. Синусы углов треугольника относятся между собой как $3 : 4 : 5$. Чему равен больший угол этого треугольника?

2. Найдите на каждом рисунке длину отрезка, обозначенную буквой x. Стрелками на некоторых из них отмечены параллельные прямые (рис. 5).

Рис. 4



ПРИМЕР 1. ★☆☆ Человек на склоне холма увидел внизу дерево под углом 45° по отношению к его поверхности. Затем он спустился по склону на 54 м и оказался возле дерева. Определите примерную высоту дерева, если угол склона равен 15° (рис. 19).

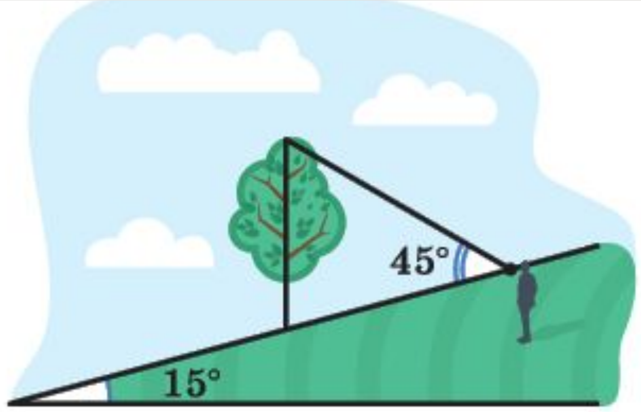


Рис. 19

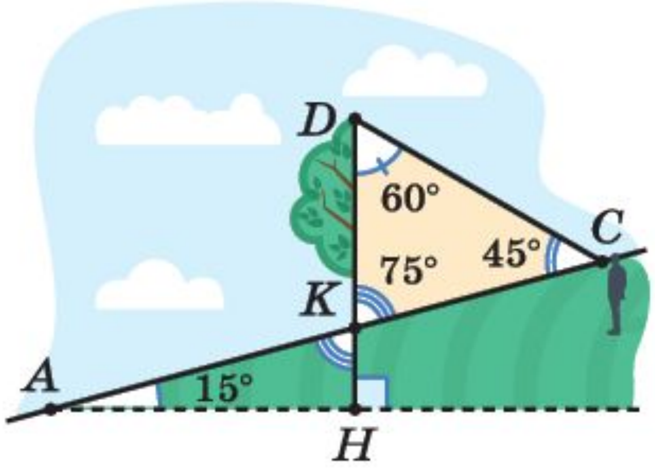
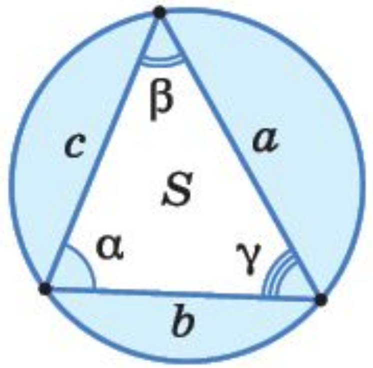


Рис. 20

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если треугольник со сторонами a, b, c и углами α, β, γ вписан в окружность радиуса R, то для его площади S справедливы формулы:

$$S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$



Сначала докажем первую формулу. Возьмём уже известную вам формулу для площади треугольника $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ и подставим в неё выражения для его сторон a и b через радиус R описанной окружности. Тогда мы получим, что:

$$S = \frac{(2R \cdot \sin\alpha) \cdot (2R \cdot \sin\beta) \cdot \sin\gamma}{2} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

$$S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Докажем вторую формулу. По теореме синусов для стороны c и угла γ треугольника можно записать: $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

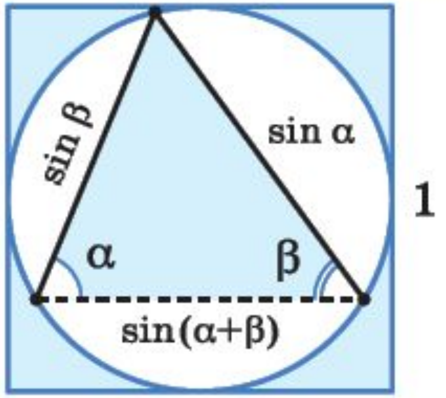
Если мы подставим это выражение в ту же формулу для площади треугольника, то получим:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Что и требовалось доказать.

ФОРМУЛА СИНУСА СУММЫ ДВУХ УГЛОВ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство мы проведём для углов, сумма которых не превышает 180°, ведь для расчётов в треугольниках этого вполне достаточно. Возьмём окружность, диаметр которой равен 1, и впишем в неё углы ACE и BCE с величинами α и β (рис. 12). По теореме синусов для хорд можно записать: $AE = \sin\alpha$, $BE = \sin\beta$.

На хорду AB опирается угол $\alpha + \beta$, поэтому $AB = \sin(\alpha + \beta)$.

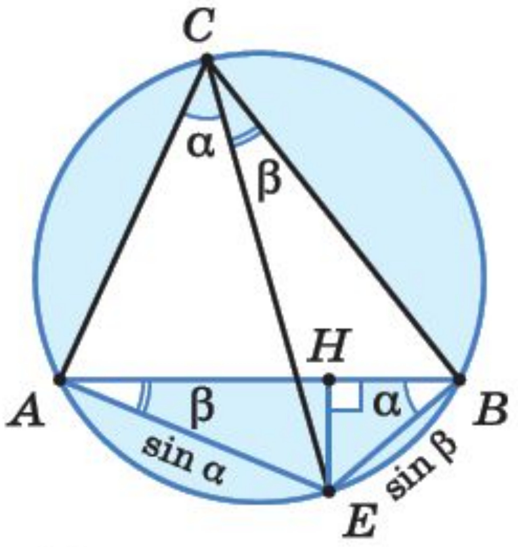


Рис. 12

ПРИМЕР 3. ★☆☆ Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны BC в точке K. Отрезки AK и DK пересекают окружность в точках P и Q (рис. 22). Найдите длину отрезка PQ, если сторона квадрата равна 1.

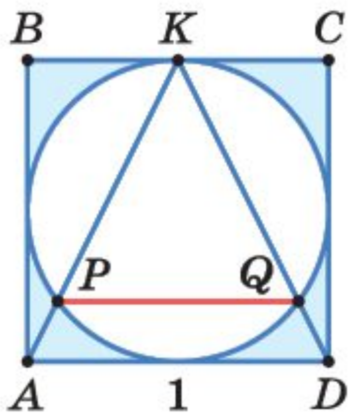


Рис. 22

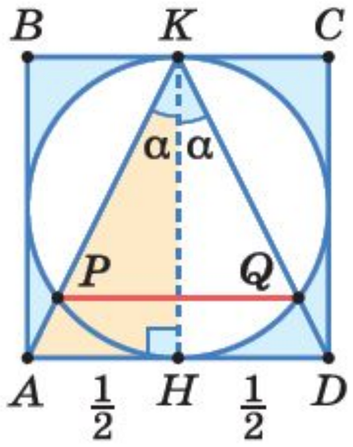


Рис. 23