Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 11: Изображение производной по переменной t от свертки

$$f(t)=\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

определяется по формуле $\quad f'(t)\to pG(p)H(p),$

если $\quad g(t)\to G(p), \quad h(t)\to H(p).$

Доказательство.

На основании теоремы 10 $\quad f(t)\to G(p)H(p).$

Найдем оригинал для функции $\quad pG(p)H(p):$

$$\begin{aligned} pG(p)H(p)&=\left[pG[p]-g(0)\right]H(p)+g(0)H(p)\leftarrow \\ \leftarrow \underline{\hspace{6cm}} &= g(0)h(t)+\int_0^t g'(\tau)h(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \qquad (1)$$

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

или

$$pG(p)H(p) = G(p)\left[pH[p] - h(0)\right] + h(0)G(p) \leftarrow \tag{2}$$

$$\leftarrow \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = h(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)h'(t-\tau)d\tau.$$

Формулы (1) и (2) называют **интегралами Дюамеля**.

На основании теоремы 10 $f(t) \rightarrow G(p)H(p)$.

Теперь применим теорему о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \rightarrow pG(p)H(p) + f(0),$$

так как $f(0)=0$, то получаем $f'(t) \rightarrow pG(p)H(p)$.

С учетом (2) получаем формулу для производной свертки

$$f'(t) = \left(\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau\right)' = h(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)h'(t-\tau)d\tau.$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 12 (умножение оригиналов): Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются функциями оригиналами с показателями роста соответственно a_1 и a_2, и $F_1(p)$ и $F_2(p)$ их соответствующие изображения, то изображением их произведения является

$$f_1(t)f_2(t) \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq,$$

где $\mathrm{Re}q=\sigma>a_1$ и $\mathrm{Re}p>a_2+\sigma$.

Доказательство. Произведение двух функций оригиналов также является функцией оригиналом (доказать самостоятельно).

По условию $\quad f_1(t) \to F_1(p), \quad f_2(t) \to F_2(p).$

Изображение произведения считаем по формуле

$$f_1(t)f_2(t) \to \int\limits_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-pt}dt. \qquad (3)$$

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Функцию $f_1(t)$ можно определить следующим образом, используя интеграл Бромвича:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_1(q) e^{qt} dq.$$

Подставляем это выражение в (3), получаем

$$f_1(t) f_2(t) \to \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-pt} dt = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Меняем порядок интегрирования

$$f_1(t) f_2(t) \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_1(q) \left(\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-(p-q)t} dt \right) dq.$$

По условию Req=σ>a_1 и Rep>a_2+σ, и следовательно Re$(p\text{-}q)$>a_2. Тогда

$$\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-(p-q)t} dt = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Получаем:

$$f_1(t)f_2(t) \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Величина σ может быть сколь угодна близка к a_1. Поэтому можно считать, что произведение функций оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определено для значений p, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Re}\, p > a$, где $a = a_1 + a_2$ – показатель роста функции произведения.

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 13 (обобщенная теорема умножения изображений): Если изображением функции оригинала *f(t)* является функция *F(p)* и заданы аналитические функции *Φ (p)* и *q(p)*, такие что

$$\int_{0}^{\infty} \varphi(t,\tau)e^{-pt}dt = e^{-q(p)\tau}\Phi(p).$$

Тогда выполняется следующее соотношение

$$\Phi(p)F\left[q(p)\right] \leftarrow \int_{0}^{\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau.$$

Доказательство.
Рассмотрим интеграл $\int_{0}^{\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau.$

Его преобразование Лапласа имеет вид

________________________.

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Поменяем порядок интегрирования

$$\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty \varphi(t,\tau)e^{-pt}dt\right)d\tau.$$

Используя условие теоремы $\int_0^\infty \varphi(t,\tau)e^{-pt}dt = e^{-q(p)\tau}\Phi(p),$

получаем

$$\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty \varphi(t,\tau)e^{-pt}dt\right)d\tau = \Phi(p)\int_0^\infty f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau.$$

Так как $\int_0^\infty f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau = F[q(p)],$

то

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau \to \Phi(p)\int_0^\infty f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau = \Phi(p)F[q(p)].$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Замечание: Если в теореме принять в качестве $q(p)=p$, а $\varphi(t,\tau)=\varphi(t-\tau)$, то получим теорему о преобразовании свертки (умножении изображений).
Доказать самостоятельно.

Теорема 14 (обобщенная теорема умножения оригиналов): Если известны изображения функций оригиналов

$$f_1(t) \to F_1(p), \qquad f_2(t)e^{q(t)\omega} \to F_2(\omega, p),$$

тогда изображением функции $f_1(t)f_2(q(t))$ является

$$f_1(t)f_2(q(t)) \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)F_2(\omega, p)\,d\omega.$$

Доказательство.
Рассмотрим интеграл $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)F_2(\omega, p)\,d\omega.$

Найдем его функцию оригинал, используя интеграл Бромвича.

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)F_2(\omega,p)d\omega\right)dp.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_2(\omega,p)e^{pt}dp\right)d\omega =$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = f_2(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)e^{q(t)\omega}d\omega =$$

$$= f_2(t)f_1(q(t)).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Если в теореме 14 принять в качестве $q(t)=t$, то получим теорему об изображении произведения оригиналов (теорема 12).
Доказать самостоятельно.

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 15: Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(t) \to F(p).$

2) $\int\limits_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty, \quad \sigma_0 \geq 0.$

3) Функция $q(p)$ является аналитической и регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$,
Причем $\operatorname{Re} q(p) > \sigma_0.$

Тогда оригиналом функции $F[q(p)]$ является следующая функция

$$F[q(p)] \leftarrow \frac{d}{dt} \int\limits_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t,\tau) d\tau,$$

где $\quad \varphi(t,\tau) \to \dfrac{e^{-q(p)\tau}}{p}.$

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Доказательство.

Покажем, что интеграл $\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau$ является ограниченной и регулярной функцией при

$\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

$$\left|\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau\right| \le \int_0^{\infty} |f(\tau)|e^{-\operatorname{Re} q(p)\tau}d\tau \le \int_0^{\infty} |f(\tau)|e^{-\sigma_0\tau}d\tau.$$

Используем первый пункт условия $$F(p) \leftarrow \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (4)$$

Подставляем вместо p в (4) $q(p)$. Получаем

$$F[q(p)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-q(p)t}dt.$$

$$|F[q(p)]| \le \int_0^{\infty} |f(\tau)|e^{-\sigma_0\tau}d\tau.$$

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Следовательно существует

$$F\left[q(p)\right] \leftarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F\left[q(p)\right] e^{pt}\,dp = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F\left[q(p)\right]}{p}e^{pt}\,dp. \qquad (5)$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int\limits_0^{\infty} f(\tau)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{-q(p)\tau+pt}}{p}\,dp\right\}d\tau.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left\{\int\limits_0^{\infty} f(\tau)e^{-q(p)\tau}\,d\tau\right\}dp = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Сравнивая с (5), получаем

$$F[q(p)] \leftarrow \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 16: Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(t) \to F(p).$

2) Интеграл $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$ дифференцируем для $t>0$.

3) $\frac{e^{q(t)\omega}}{t} \to \Phi(p,\omega).$

Тогда изображением функции *f[q(t)]* является следующая функция

$$f[q(t)] \to -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega.$$

Функция $q(t)$ – ограничена.

Операционное исчисление.
Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Доказательство.

Так как по условию функция *q(t)* ограничена, а функция

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

дифференцируема, то функция

$$f\left[q(t)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pq(t)}dp$$

тоже дифференцируема и

$$f\left[q(t)\right]\to\int_0^{\infty}f\left[q(t)\right]e^{-pt}dt=-\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{f\left[q(t)\right]}{t}e^{-pt}dt. \qquad (6)$$

Рассмотрим выражение

$$f\left[q(t)\right]\to-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega.$$

Операционное исчисление. Некоторые свойства оригиналов и изображений.

По условию $$\Phi(p,\omega)=\int_0^{\infty}\frac{e^{q(t)\omega}}{t}e^{-pt}dt.$$

Получаем

$$-\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega=-\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{q(t)\omega}}{t}e^{-pt}dt\right\}d\omega.$$

Меняем порядок интегрирования

$$-\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega=-\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}\frac{e^{-pt}}{t}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)e^{q(t)\omega}d\omega\right\}dt=$$

$$=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Сравнивая с (6), получаем $$f[q(t)]\to-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega.$$

Что и требовалось доказать.