

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 11: Изображение производной по переменной t от свертки

$$f(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

определяется по формуле $f'(t) \rightarrow pG(p)H(p)$,

если $g(t) \rightarrow G(p)$, $h(t) \rightarrow H(p)$.

Доказательство.

На основании теоремы 10 $f(t) \rightarrow G(p)H(p)$.

Найдем оригинал для функции $pG(p)H(p)$:

$$\begin{aligned} pG(p)H(p) &= [pG(p) - g(0)]H(p) + g(0)H(p) \leftarrow \\ \leftarrow \text{_____} &= g(0)h(t) + \int_0^t g'(\tau)h(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

или

$$pG(p)H(p) = G(p)[pH(p) - h(0)] + h(0)G(p) \leftarrow$$
$$\leftarrow \frac{f'(t)}{p} = h(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)h'(t-\tau)d\tau. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют **интегралами Дюамеля**.

На основании теоремы 10 $f(t) \rightarrow G(p)H(p)$.

Теперь применим теорему о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \rightarrow pG(p)H(p) + f(0),$$

так как $f(0)=0$, то получаем $f'(t) \rightarrow pG(p)H(p)$.

С учетом (2) получаем формулу для производной свертки

$$f'(t) = \left(\int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau \right)' = h(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)h'(t-\tau)d\tau.$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 12 (умножение оригиналов): Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются функциями оригиналами с показателями роста соответственно a_1 и a_2 , и $F_1(p)$ и $F_2(p)$ их соответствующие изображения, то изображением их произведения является

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq,$$

где $\text{Re}q=\sigma>a_1$ и $\text{Re}p>a_2+\sigma$.

Доказательство. Произведение двух функций оригиналов также является функцией оригиналом (доказать самостоятельно).

По условию $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$.

Изображение произведения считаем по формуле

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-pt} dt. \quad (3)$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Функцию $f_1(t)$ можно определить следующим образом, используя интеграл Бромвича:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(q) e^{qt} dq.$$

Подставляем это выражение в (3), получаем

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-pt} dt = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Меняем порядок интегрирования

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(q) \left(\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-(p-q)t} dt \right) dq.$$

По условию $\operatorname{Re} q = \sigma > a_1$ и $\operatorname{Re} p > a_2 + \sigma$, и следовательно $\operatorname{Re}(p-q) > a_2$. Тогда

$$\int_0^{\infty} f_2(t) e^{-(p-q)t} dt = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Получаем:

$$f_1(t)f_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Величина σ может быть сколь угодно близка к a_1 . Поэтому можно считать, что произведение функций оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определено для значений p , удовлетворяющих неравенству $\text{Re}p > a$, где $a = a_1 + a_2$ – показатель роста функции произведения.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 13 (обобщенная теорема умножения изображений): Если изображением функции оригинала $f(t)$ является функция $F(p)$ и заданы аналитические функции $\Phi(p)$ и $q(p)$, такие что

$$\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) e^{-pt} dt = e^{-q(p)\tau} \Phi(p).$$

Тогда выполняется следующее соотношение

$$\Phi(p)F[q(p)] \leftarrow \int_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau.$$

Доказательство.

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} f(\tau)\varphi(t, \tau)d\tau.$

Его преобразование Лапласа имеет вид

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Поменяем порядок интегрирования

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau.$$

Используя условие теоремы $\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) e^{-pt} dt = e^{-q(p)\tau} \Phi(p)$,

получаем

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \left(\int_0^{\infty} \varphi(t, \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = \Phi(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau.$$

Так как $\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau = F[q(p)]$,

то

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau \rightarrow \Phi(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau = \Phi(p) F[q(p)].$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Замечание: Если в теореме принять в качестве $q(p)=p$, а $\varphi(t,\tau)=\varphi(t-\tau)$, то получим теорему о преобразовании свертки (умножении изображений).

Доказать самостоятельно.

Теорема 14 (обобщенная теорема умножения оригиналов): Если известны изображения функций оригиналов

$$f_1(t) \rightarrow F_1(p), \quad f_2(t)e^{q(t)\omega} \rightarrow F_2(\omega, p),$$

тогда изображением функции $f_1(t)f_2(q(t))$ является

$$f_1(t)f_2(q(t)) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)F_2(\omega, p)d\omega.$$

Доказательство.

Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega)F_2(\omega, p)d\omega.$

Найдем его функцию оригинал, используя интеграл Бромвича.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega) F_2(\omega, p) d\omega \right) dp.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_2(\omega, p) e^{pt} dp \right) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\omega) e^{q(t)\omega} d\omega = \\ & = f_2(t) f_1(q(t)). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Замечание: Если в теореме 14 принять в качестве $q(t)=t$, то получим теорему об изображении произведения оригиналов (теорема 12).

Доказать самостоятельно.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Теорема 15: Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(t) \rightarrow F(p).$

2) $\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty, \quad \sigma_0 \geq 0.$

3) Функция $q(p)$ является аналитической и регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$,
Причем $\operatorname{Re} q(p) > \sigma_0$.

Тогда оригиналом функции $F[q(p)]$ является следующая функция

$$F[q(p)] \leftarrow \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau,$$

где $\varphi(t, \tau) \rightarrow \frac{e^{-q(p)\tau}}{p}.$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Доказательство.

Покажем, что интеграл $\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau$ является ограниченной и регулярной функцией при

$$\operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

$$\left| \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |f(\tau)| e^{-\operatorname{Re} q(p)\tau} d\tau \leq \int_0^{\infty} |f(\tau)| e^{-\sigma_0\tau} d\tau.$$

Используем первый пункт условия $F(p) \leftarrow \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$ (4)

Подставляем вместо p в (4) $q(p)$. Получаем

$$F[q(p)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-q(p)t} dt.$$

$$|F[q(p)]| \leq \int_0^{\infty} |f(\tau)| e^{-\sigma_0\tau} d\tau.$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Следовательно существует

$$F[q(p)] \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F[q(p)] e^{pt} dp = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F[q(p)]}{p} e^{pt} dp. \quad (5)$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-q(p)\tau + pt}}{p} dp \right\} d\tau.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \left\{ \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau \right\} dp = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Сравнивая с (5), получаем

$$F[q(p)] \leftarrow \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 16: Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(t) \rightarrow F(p).$

2) Интеграл $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$ дифференцируем для $t > 0$.

3) $\frac{e^{q(t)\omega}}{t} \rightarrow \Phi(p, \omega).$

Тогда изображением функции $f[q(t)]$ является следующая функция

$f[q(t)] \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) \Phi(p, q(t)) \omega dp$. ограничена.

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

Доказательство.

Так как по условию функция $q(t)$ ограничена, а функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp$$

дифференцируема, то функция

$$f[q(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pq(t)} dp$$

тоже дифференцируема и

$$f[q(t)] \rightarrow \int_0^{\infty} f[q(t)]e^{-pt} dt = -\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{f[q(t)]}{t} e^{-pt} dt. \quad (6)$$

Рассмотрим выражение

$$f[q(t)] \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega)\Phi(p,\omega)d\omega.$$

Операционное исчисление.

Некоторые свойства оригиналов и изображений.

По условию
$$\Phi(p, \omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{q(t)\omega}}{t} e^{-pt} dt.$$

Получаем

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega) \Phi(p, \omega) d\omega = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{q(t)\omega}}{t} e^{-pt} dt \right\} d\omega.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega) \Phi(p, \omega) d\omega &= -\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega) e^{q(t)\omega} d\omega \right\} dt = \\ &= \underline{\hspace{2cm}}. \end{aligned}$$

Сравнивая с (6), получаем
$$f[q(t)] \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\omega) \Phi(p, \omega) d\omega.$$

Что и требовалось доказать.