

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Квантовая радиофизика

Лекция 8

Санкт-Петербург, 2017

# Матрицы плотности



## Матрицы плотности

$$I_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_x = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -i \sin \frac{\phi}{2} \\ -i \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$I_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad U_y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_H = \begin{bmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{bmatrix}$$



## Спиновое эхо

$$U_x^{90} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_x^{180} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_H(\tau) = \begin{bmatrix} e^{i\omega\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\tau/2} \end{bmatrix}$$

$$M_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(M_{\perp} U_H U_x^{180} U_H U_x^{90} I_z U_x^{90-1} U_H^{-1} U_x^{180-1} U_H^{-1})$$



## Операторное представление

- Рассмотрим результат действия матриц поворота

$$U_x I_z U_x^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \phi & i \sin \phi \\ -i \sin \phi & -\cos \phi \end{bmatrix}$$

$$U_x I_y U_x^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin \phi & -i \cos \phi \\ i \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

$$U_x I_x U_x^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## Операторное представление

- Для различных комбинаций поворотов

$$U_x I_z U_x^{-1} = \cos \phi I_z - \sin \phi I_y$$

$$U_x I_y U_x^{-1} = \cos \phi I_y + \sin \phi I_z$$

$$U_x I_x U_x^{-1} = I_x$$

$$U_y I_z U_y^{-1} = \cos \phi I_z + \sin \phi I_x$$

$$U_y I_x U_y^{-1} = \cos \phi I_x - \sin \phi I_z$$

$$U_y I_y U_y^{-1} = I_y$$



# Операторное представление

- Вращение вокруг оси  $z$ , эволюция

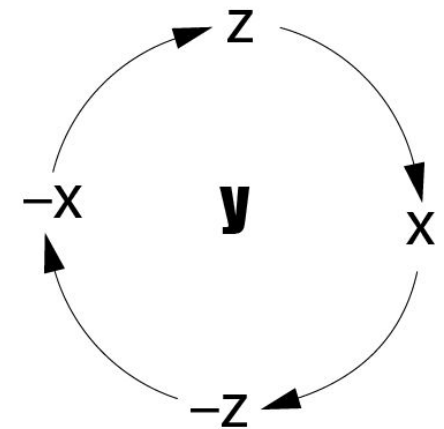
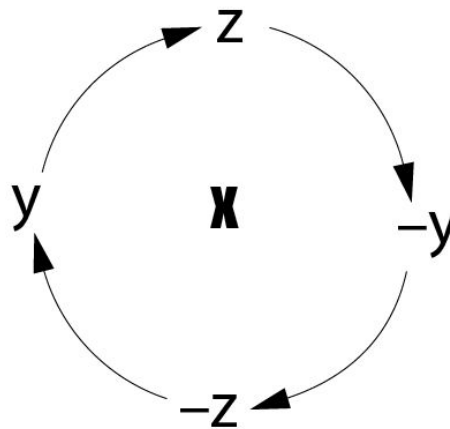
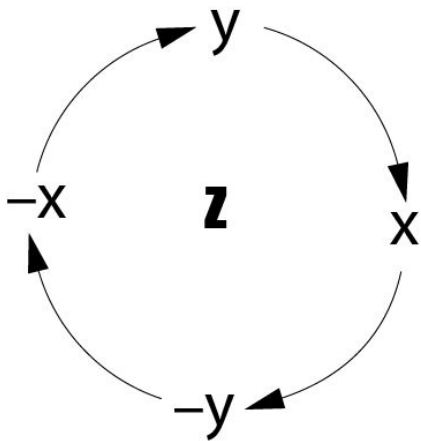
$$U_H I_x U_H^{-1} = \cos \omega t I_x - \sin \omega t I_y$$

$$U_H I_y U_H^{-1} = \cos \omega t I_y + \sin \omega t I_x$$

$$U_H I_z U_H^{-1} = I_z$$

# Операторное представление

- Дополнительные вращения







# Операторное представление

- Спиновое эхо
- $I_z \rightarrow -I_y$
- $-I_y \rightarrow -\cos(\omega T)I_y - \sin(\omega T)I_x$
- $-\cos(\omega T)I_y - \sin(\omega T)I_x \rightarrow \cos(\omega T)I_y - \sin(\omega T)I_x$
- $\cos(\omega T)I_y - \sin(\omega T)I_x \rightarrow \cos(\omega T)(\cos(\omega T)I_y + \sin(\omega T)I_x) - \sin(\omega T)(\cos(\omega T)I_x - \sin(\omega T)I_y) = I_y$

# Матрицы плотности для системы спинов



## Система двух спинов АХ

- 2 связанных спина с  $l=1/2$

$$|\Psi\rangle = c_{\alpha\alpha}|\alpha\alpha\rangle + c_{\alpha\beta}|\alpha\beta\rangle + c_{\beta\alpha}|\beta\alpha\rangle + c_{\beta\beta}|\beta\beta\rangle$$

- Измерение физической величины

$$\langle\Psi|M|\Psi\rangle = \sum_{n,m=\alpha\alpha,\alpha\beta,\beta\alpha,\beta\beta} c_m^* c_n \langle m|M|n\rangle$$

- 16 элементов матрицы плотности



## Система двух спинов AX

- 16 матриц физических величин – результатов прямого произведения матриц величин каждого спина

$$A_x = I_x \otimes E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

•  
•  
•



## Система двух спинов AS

- Намагниченности каждого спина

$$A_x = I_x \otimes E \quad A_y = I_y \otimes E \quad A_z = I_z \otimes E$$

$$S_x = E \otimes I_x \quad S_y = E \otimes I_y \quad S_z = E \otimes I_z$$

- Связанные спиновые намагниченности (x2)

$$2A_x S_y = 2I_x \otimes I_y \quad 2A_y S_x = 2I_y \otimes I_x$$

- Противофазные намагниченности (x2)

$$2A_x S_z = 2I_x \otimes I_z \quad 2A_z S_x = 2I_z \otimes I_x$$

- Двойная противофазная намагниченность

$$2A_z S_z = 2I_z \otimes I_z$$



## Система двух спинов AS

- Состояния с явной намагниченностью

$$|\Psi\rangle = |\alpha\alpha\rangle$$

$$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}|\alpha\alpha\rangle + 1/\sqrt{2}|\alpha\beta\rangle$$

$$|\Psi\rangle = i/\sqrt{2}|\beta\alpha\rangle + 1/\sqrt{2}|\alpha\alpha\rangle$$

- Состояния с коррелирующей намагниченностью

$$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}|\beta\alpha\rangle + 1/\sqrt{2}|\alpha\beta\rangle$$



## Система двух спинов AS

- Операторное представление импульсов (аналогично случаю спина одного типа)

$$A_z S_z \rightarrow \phi_x^S \rightarrow A_z (\cos \phi S_z - \sin \phi S_y)$$

$$A_z S_z \rightarrow \phi_x^A \rightarrow (\cos \phi A_z - \sin \phi A_y) S_z$$

- Операторное представление вращения (аналогично случаю спина одного типа)

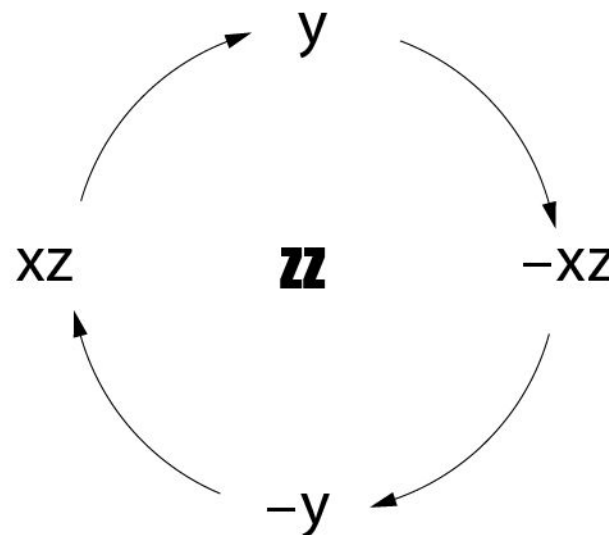
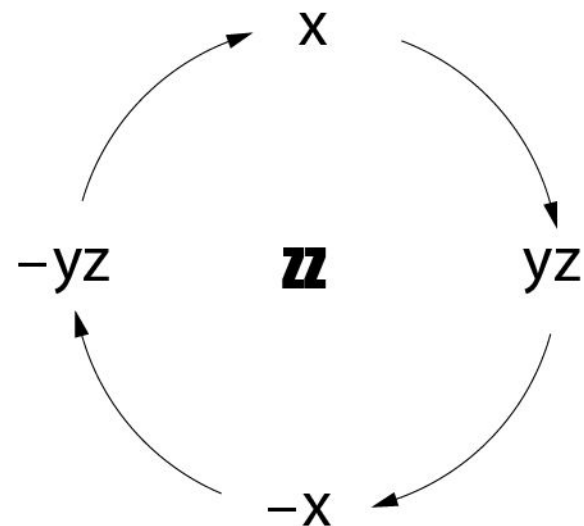
$$A_z S_y \rightarrow \tau \rightarrow A_z (\cos \omega_s \tau S_y + \sin \omega_s \tau S_x)$$

## Система двух спинов AS

- Перенос когерентности

$$A_z S_y > 90_x^{AS} > -A_y S_z$$

- Эволюция вследствие скалярного взаимодействия







## Система двух спинов AS

- Скалярное взаимодействие в спиновом эхе

$$A_x > \tau > 180 \frac{AS}{x} > \tau$$

- Только фаза, вследствие скалярного взаимодействия

$$A_x \rightarrow \cos(J_{AS}\tau) A_x + \sin(J_{AS}\tau) A_y S_z$$

- Инверсия A относительно оси x

$$\sin(J_{AS}\tau) A_y S_z \rightarrow -\sin(J_{AS}\tau) A_y S_z$$

- Инверсия S относительно оси x

$$-\sin(J_{AS}\tau) A_y S_z \rightarrow \sin(J_{AS}\tau) A_y S_z$$



## Система двух спинов AS

- Перенос синфазной намагниченности в противофазную
- Спиновое эхо со временем эволюции  $\tau = 1/4J_{AS}$

$$A_x > \tau > 180_x^{IS} > \tau > A_y S_z$$

- Спиновое эхо с селективным импульсом

$$A_x > \tau > 180_x^I > \tau$$

$$A_x > \tau > 180_x^S > \tau$$

- После инверсии  
 $\cos(J_{AS}\tau) A_x - \sin(J_{AS}\tau) A_y S_z \rightarrow A_x$



## Система двух спинов AS

- INEPT
- Время эволюции  $\tau = 1/4J_{AS}$

$$A_z > 90_x^A > \tau > 180_x^{IS} > \tau > 90_x^{IS} > \tau > 180_x^{IS} > \tau$$