ЛЕКЦИЯ №2

Понятие матрицы. Виды матриц, действия над матрицами.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Числа этой таблицы называются элементами матрицы.

Матрица, имеющая одинаковое количество строк и столбцов называется *квадратной*. Порядком квадратной матрицы называется число ее строк.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*. Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие выше и ниже главной диагонали равны нулю, называется *диагональной*.

Например:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется *единичной*. Единичная матрица обозначается буквой Е и имеет вид:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица называется *треугольной,* если все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю.

Например:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Две матрицы называются *равными*, если они одинаковой размерности и их соответствующие элементы равны.

Если у матрицы А заменить все строки соответствующими столбцами, то получится матрица $A^т$, называемая *транспонированной*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Если в транспонированной матрице все элементы заменить соответствующими алгебраическими дополнениями, то получится матрица, называемая *присоединенной:*

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Определителем квадратной матрицы А называется определитель, составленный из элементов данной матрицы .Обозначение: $\Delta A,\ \det A,\ |A|$.

Матрица называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной.*

Матрицы А и В называются *согласованными,* если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Например:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Матрица А имеет два столбца, а матрица В имеет две строки, значит матрицы А и В согласованные.

Действия над матрицами.

Основными действиями над матрицами являются сложение, вычитание, умножение матрицы на число и умножение матрицы на матрицу.

1. *Сложение матриц.*

Суммой двух матриц А и В одинаковой размерности называется матрица С=А+В, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц слагаемых, т.е.

$c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$,$(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$.

2. *Вычитание матриц.*

Вычитание матриц определяется аналогично сложению.

Пример. Найти сумму и разность матриц А и В, если

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. По определению суммы и разности матриц имеем:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -1+5 & 0+(-3) & 5+1 \\ 2+1 & -4+2 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 16 \end{bmatrix},$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} -1-5 & 0-(-3) & 5-1 \\ 2-1 & -4-2 & 6-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы А на число λ, называется матрица В, элементы которой равны произведениям элементов матрицы А на число λ : В = λ А.

Пример. Найти матрицу В = -2А, если $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. $B = -2A = -2\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(-3) & -2\cdot 4 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$.

Операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A$
4) $A - A = 0$
5) $1 \cdot A = A$
6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$
7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
8) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \beta) \cdot A$

3. *Умножение матриц.*

Произведением матриц А и В называется матрица С, элементы которой равны суммам произведений элементов i-той строки матрицы А на соответствующие элементы j-того столбца матрицы В, т.е. элементы матрицы С определяются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}\ , \quad i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,k.$$

Умножать можно только согласованные матрицы.

Пример. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, поэтому произведение АВ возможно. По определению произведения матриц получаем

$$AB = \begin{bmatrix} -3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 3 & -3\cdot(-1) + 2\cdot(-3) + 0\cdot(-2) & -3\cdot 3 + 2\cdot 0 + 0\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 2 + 7\cdot 3 & 4\cdot(-1) + 1\cdot(-3) + 7\cdot(-2) & 4\cdot 3 + 1\cdot 0 + 7\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3+4+0 & 3-6+0 & -9+0+0 \\ 4+2+21 & -4-3-14 & 12+0+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 27 & -21 & 40 \end{bmatrix}.$$

Умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$

3) $(A + B) \cdot C = AC + BC$

4) $\alpha \cdot (AB) = (\alpha A) \cdot B$

Эти свойства верны, если написанные суммы и произведения имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$

2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3) $(A^T)^T = A$

4) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

Обратная матрица

Для невырожденных матриц вводится понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы А, если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$ где Е – единичная матрица.

Обратная матрица определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*},$$ где A^{*} - присоединенная матрица.

Пример. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ найти обратную.

Решение. Находим определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 4 - 2 - 4 - 3 = 2 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Обратная матрица будет равна:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 2 & 0\\ 1/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ -1 & 2 & 0\\ 1/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}\\ 1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(-1)+1\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 2+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 0+1\cdot\frac{1}{2}\\ 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot 0+3\cdot\frac{1}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1-1+1 & 1+2-3 & -1+0+1\\ \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+2-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-2+\frac{3}{2} & \frac{1}{2}+4-\frac{9}{2} & -\frac{1}{2}+0+\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E$$

Обратная матрица обладает следующими свойствами

1) $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$ 2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ | 3) $\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$

Контрольные вопросы к лекции №2

1. Что называется матрицей? Как обозначаются матрицы?
2. Перечислить виды матриц и дать им определение.
3. Что называется суммой матриц? Какие матрицы можно складывать?
4. Что называется разностью матриц?
5. Как умножить матрицу на число?
6. Какими свойствами обладают сложение и умножение матрицы на число?
7. Что называется произведением матриц? Какие матрицы можно перемножать?
8. Перечислить свойства произведения матриц.
9. Дать определение обратной матрицы.
10. Как вычисляется обратная матрица?
11. Что называется рангом матрицы?
12. Нахождение ранга матрицы методом окаймления.
13. В чем заключается метод эквивалентных преобразований?