

Лекция 2 *Операции над кодами чисел*

Цель лекции:

Рассмотреть систематизированные основы знаний по кодированию числовой информации и выполнению операций над кодами чисел

Учебные вопросы:

1. Представление целых беззнаковых чисел
2. Представление чисел с фиксированной точкой
3. Операции над числами с фиксированной точкой
4. Представление чисел с плавающей точкой
5. Арифметические операции над числами с плавающей точкой

1. Представление целых беззнаковых чисел

Структура памяти

- Память состоит из **нумерованных ячеек**.
- **Линейная структура** (адрес ячейки – одно число).
- **Байт** – это наименьшая ячейка памяти, имеющая собственный адрес.

На современных компьютерах **1 байт = 8 бит**.



Целые беззнаковые числа

Беззнаковые данные – не могут быть отрицательными.

Для представления беззнаковых чисел может использоваться **1 или несколько байт**.

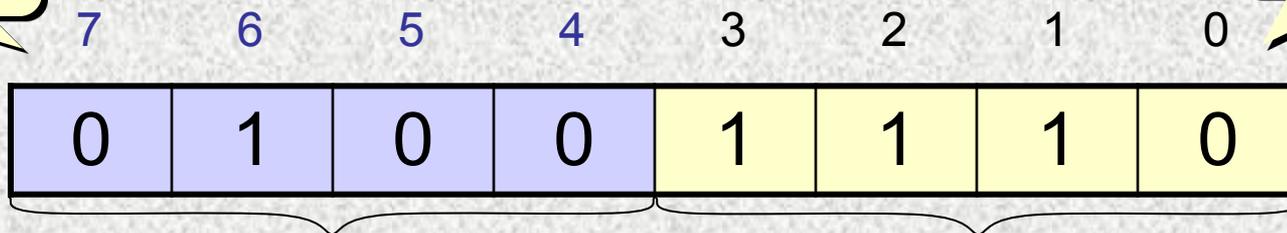
Для беззнаковых в **1 байт (8 бит)** диапазон значений **$0 \dots 255$, $0 \dots FF_{16} = 2^8 - 1$.**

Си: *unsigned char*

Паскаль: *byte*

Старший
байт

Младший
байт



старший полубайт
старшая цифра

младший полубайт
младшая цифра

$$4_{16} \quad E_{16}$$
$$1001110_2 = 4E_{16} = 'N'$$

Примеры

78 =

0	1	0	0	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

115 =

0	1	1	1	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

221 =

1	1	0	1	1	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

255 =

1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

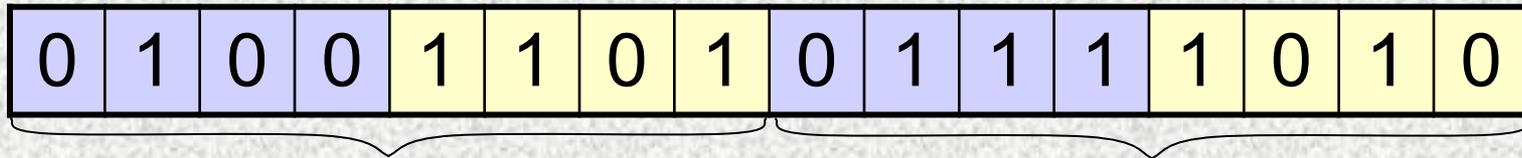
Целое без знака размером 2 байта (16 бит)

диапазон значений $0 \dots 65535$, $0 \dots \text{FFFF}_{16} = 2^{16} - 1$

Си: *unsigned int*

Паскаль: *word*

15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 биты



старший байт

$4D_{16}$

младший байт

$7A_{16}$

$100110101111010_2 = 4D7A_{16}$

Длинное целое без знака размером 4 байта

диапазон значений $0 \dots \text{FFFFFFFF}_{16} = 2^{32} - 1$

Си: *unsigned long int*

Паскаль: *dword*

2. Представление чисел с фиксированной точкой

Числа с фиксированной точкой — форма представления вещественных чисел, когда точкой отделяется целая часть от дробной. Например, 12.54

С фиксированной точкой все числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением точки, отделяющей целую часть числа от дробной.

Число в компьютере занимает определенное количество разрядов (бит), кратное 8:

8, 16, 32, 64.

Пример 1.

Пусть даны числа **123.6**, **0.01** и **1.5143**.

Записать их в виде числа с фиксированной точкой при условии, что под каждое число выделяется 8 разрядов – **4** под целую часть и **4** под дробную.

Ответ:

Десятичное число	Число с фиксированной точкой
123.6	0123.6000
0.01	0000.0100
1.5143	0001.5143

Такая форма представления наиболее проста для восприятия, но имеет существенный **недостаток**:

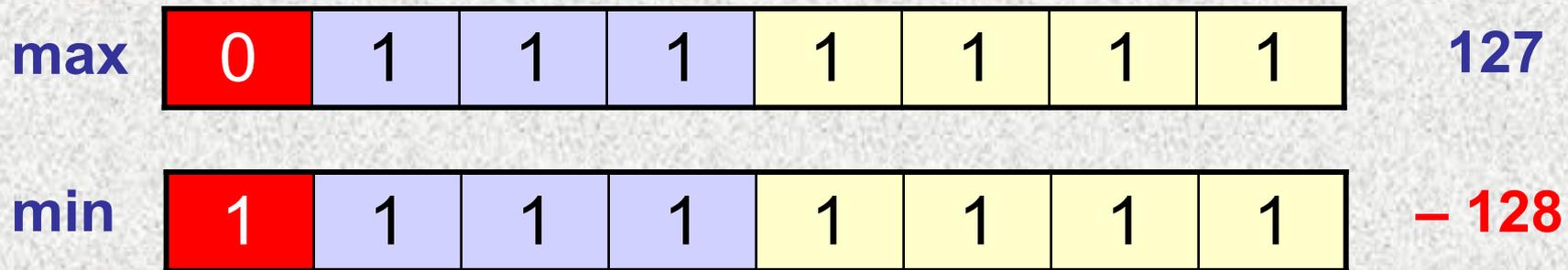
- программирование операций для чисел с фиксированной точкой, требует усилий по отслеживанию положения точки.

Поэтому в современных компьютерах форма представления чисел с фиксированной точкой используется как вспомогательная.

Числа с фиксированной точкой в ЭВМ

Старший (знаковый) бит числа определяет его знак. Если он равен **0**, число **положительное**, если **1**, то **отрицательное**.

В восьми разрядной сетке числа с фиксированной точкой (байтовые числа) могут быть представлены в диапазоне значений:



$$-2^{n-1} \dots 2^{n-1}-1$$

$$-128 = -2^7 \dots 127 = 2^7 - 1$$



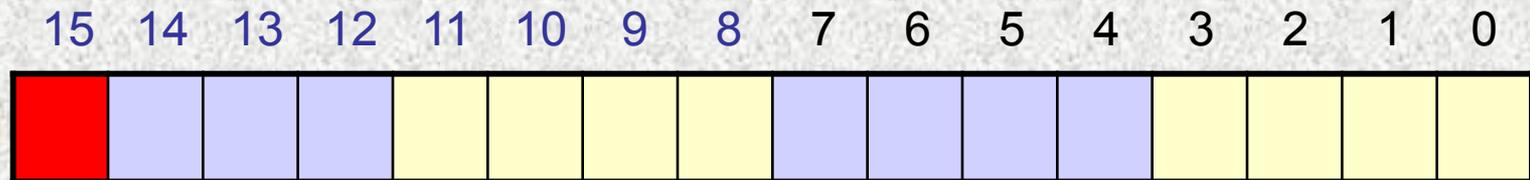
можно работать с отрицательными числами



уменьшился диапазон положительных чисел

Слово со знаком занимает 2 байта (16 бит) и может быть представлено в диапазоне значений

$$-2^{15} \dots 2^{15}-1$$
$$- 32768 \dots 32767$$



Си: *int*

Паскаль: *integer*

Двойное слово со знаком занимает 4 байта и диапазон значений

$$-2^{31} \dots 2^{31}-1$$

Си: *long int*

Паскаль: *longint*

3. Коды чисел и операции над ними

3. Коды чисел и операции над ними

3.1 Прямой код

Такой способ представления числа является наиболее естественным, так как обеспечивает простой переход от двоичной записи числа к записи его двоичного (прямого) кода:

$$\begin{aligned} X_{10} &\Rightarrow X_2 \Rightarrow X_{ПК} \\ -X_{10} &\Rightarrow -X_2 \Rightarrow X_{ПК} \end{aligned}$$

Прямой код имеет существенные недостатки:

- использовании **прямого кода** имеется целых два кода для представления **0**

+0 представляется как **0000 0000**

-0 представляется как **1000 0000**;

- сложно реализовать операцию вычитания, умножения и деления чисел.

3.2 Обратный код

Обратный код для положительных чисел совпадает с прямым кодом,

$$X_{OK} = X_{ПК}$$

Обратный код для отрицательных чисел получается инвертированием всех цифр двоичного кода абсолютной величины числа.

$$-X_{10} \Rightarrow -X_2 \Rightarrow X_{ПК} \Rightarrow \overline{X}_{OK}$$

где - \overline{X} операция инвертирования двоичного кода абсолютной величины числа.

Пример представления числа -123_{10} в обратном
коде:

1. Перевод числа -123_{10} в двоичное число:

$$-123_{10} \Rightarrow -1111011_2$$

2. Запись двоичного числа в прямом коде:

$$-1111011_2 \Rightarrow 11111011_{ПК}$$

3. Перевод прямого кода двоичного числа в обратный:

$$11111011_{ПК} \Rightarrow 10000100$$

Для обратного кода справедливо следующее
соотношение:

$$X_{10} = x_{sign} * (-2^{n-1} + 1) + \sum_{i=0}^{n-2} x_i * 2^i$$

где

x_{sign} – значение знакового разряда,

x_i – значение i -го разряда,

n – разрядность числа.

Например:

$$1010 = 1 * (-2^3 + 1) + 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 = -7 + 2 = -5$$

При использовании обратного кода арифметические операции для отрицательных чисел выполняются проще.

Само получение обратных кодов не требует значительных усилий.

Но, как и в случае прямого кода, 0 представляется 2 кодами:

+0 представляется как **0000 0000**

-0 представляется как **1111 1111**

3.3 Дополнительный код

Дополнительный код для положительных чисел совпадает с прямым кодом,

$$X_{OK} = X_{ПК}$$

Дополнительный код для отрицательных чисел получается прибавлением к младшему разряду обратного кода числа 1.

$$X_{ПК} = X_{OK} + 1$$

Пример представления числа -115_{10} в
дополнительном коде:

1. Перевод числа -115_{10} в двоичное число:

$$-115_{10} \Rightarrow -1110011_2$$

2. Запись двоичного числа в прямом коде:

$$-1111011_2 \Rightarrow 11110011_{ПК}$$

3. Перевод прямого кода двоичного числа в обратный:

$$11111011_{ПК} \Rightarrow 10001100_{ОК}$$

4. Перевод обратного кода двоичного числа в дополнительный:

$$\begin{array}{r} + 10001100_{ОК} \\ 00000001 \\ \hline 10001101_{ДК} \end{array}$$

Для дополнительного кода справедливо следующее соотношение:

$$X = x_{sign} * (-2^{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} x_i * 2^i$$

где

x_{sign} – значение знакового разряда,

x_i – значение i -го разряда,

n – разрядность числа.

Например:

$$1011 = 1 * (-2^3) + 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 = -8 + 3 = -5$$

Анализ дополнительного кода.

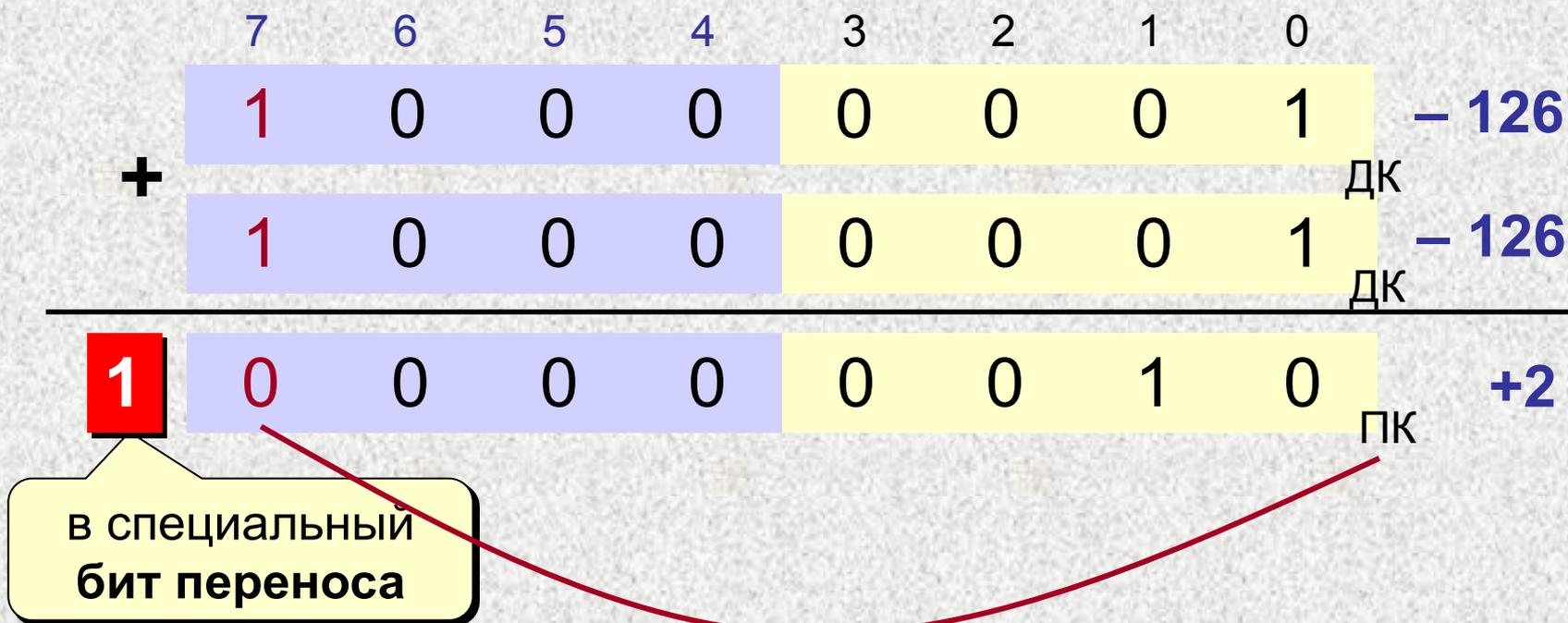
- Получение дополнительного кода происходит несколько сложнее, чем обратного.
- Использование дополнительного кода упрощает арифметические операции, что будет показано позже.
- В дополнительном коде **0** имеет единственное представление :

$$\begin{aligned} +0 &= 0000\ 0000 \\ -0 &= 1111\ 1111_{\text{OK}} + 1 = 0000\ 0000_{\text{ДК}} \end{aligned}$$

- Использование дополнительного кода дает возможность расширить диапазон представления чисел (закодировать **256** чисел) по сравнению с прямым и обратным кодами (**255** чисел).

Последнее утверждение доказать самостоятельно!

Перенос: при сложении больших (по модулю) отрицательных чисел получается положительное (перенос за границы разрядной сетки).



Учебные вопросы для самостоятельного изучения

4. Представление чисел с плавающей точкой

$$X = s \cdot M \cdot 2^e$$

s – знак (1 или -1)

M – мантисса, $M = 0$ или $1 \leq M < 2$

e – порядок 2

Пример:

знак мантисса порядок

$$15,625 = 1111,101_2 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1,111101}_2 \cdot \mathbf{2^3}$$

$$3,375 =$$

Нормализованные числа в памяти

IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic (IEEE 754)

$$15,625 = 1 \cdot 1,111101_2 \cdot 2^3$$

$$s = 1 \quad e = 3$$

$$M = 1,111101_2$$



Порядок со сдвигом:
 $p = e + E$ (сдвиг)

Дробная часть мантиссы:
 $m = M - 1$

Знаковый бит:
0, если $s = 1$
1, если $s = -1$



Целая часть M всегда 1,
поэтому не хранится в памяти!

Нормализованные числа в памяти

Тип данных	Размер, байт	Мантисса, бит	Порядок, бит	Сдвиг порядка, E	Диапазон модулей	Точность, десятичн. цифр
float single	4	23	8	127	$3,4 \cdot 10^{-38}$... $3,4 \cdot 10^{38}$	7
double double	8	52	11	1023	$1,7 \cdot 10^{-308}$... $1,7 \cdot 10^{308}$	15
long double extended	10	64	15	16383	$3,4 \cdot 10^{-4932}$... $3,4 \cdot 10^{4932}$	19

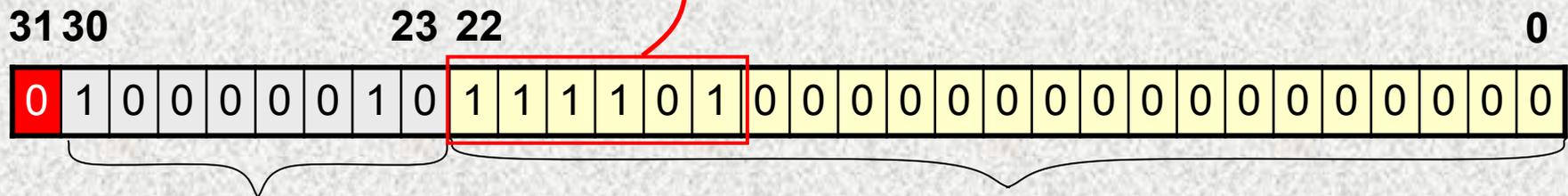
Типы данных для языков: **Си**

Паскаль

Вещественные числа в памяти

$$15,625 = \cancel{1},111101_2 \cdot 2^3$$

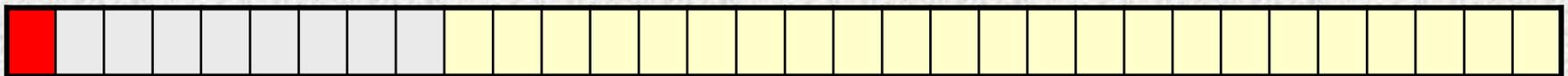
4 байта = 32 бита



$$p = e + 127 = 130 \\ = 10000010_2$$

$$m = M - 1 = 0,111101_2$$

$$3,375 =$$



5. Арифметические операции над числами с плавающей точкой

сложение

$$5,5 + 3 = 101,1_2 + 11_2 = 8,5 = 1000,1_2$$

1. Порядок выравнивается до большего

$$5,5 = 1,011_2 \cdot 2^2$$

$$3 = 1,1_2 \cdot 2^1 = 0,11_2 \cdot 2^2$$

2. Мантиссы складываются

$$\begin{array}{r} 1,011_2 \\ + 0,110_2 \\ \hline 10,001_2 \end{array}$$

3. Результат нормализуется (с учетом порядка)

$$10,001_2 \cdot 2^2 = 1,0001_2 \cdot 2^3 = 1000,1_2 = 8,5$$

ВЫЧИТАНИЕ

$$10,75 - 5,25 = 1010,11_2 - 101,01_2 = 101,1_2 = 5,5$$

1. Порядок выравнивается до большего

$$10,75 = 1,01011_2 \cdot 2^3$$

$$5,25 = 1,0101_2 \cdot 2^2 = 0,10101_2 \cdot 2^3$$

2. Мантиссы вычитаются

$$\begin{array}{r} 1,01011_2 \\ - 0,10101_2 \\ \hline 0,10110_2 \end{array}$$

3. Результат нормализуется (с учетом порядка)

$$0,1011_2 \cdot 2^3 = 1,011_2 \cdot 2^2 = 101,1_2 = 5,5$$

умножение

$$7 \cdot 3 = 111_2 \cdot 11_2 = 10101_2 = 21$$

1. Мантиссы умножаются

$$7 = 1,11_2 \cdot 2^2$$

$$3 = 1,1_2 \cdot 2^1$$

$$\begin{array}{r} 1,11_2 \\ \times 1,1_2 \\ \hline 111_2 \\ 111_2 \\ \hline 10,101_2 \end{array}$$

2. Порядки складываются: $2 + 1 = 3$

3. Результат нормализуется (с учетом порядка)

$$10,101_2 \cdot 2^3 = 1,0101_2 \cdot 2^4 = 10101_2 = 21$$

деление

$$17,25 : 3 = 10001,01_2 : 11_2 = 101,11_2 = 5,75$$

1. Мантиссы делятся

$$17,25 = 1,000101_2 \cdot 2^4$$

$$3 = 1,1_2 \cdot 2^1$$

$$1,000101_2 : 1,1_2 = 0,10111_2$$

2. Порядки вычитаются: $4 - 1 = 3$

3. Результат нормализуется (с учетом порядка)

$$0,10111_2 \cdot 2^3 = 1,0111_2 \cdot 2^2 = 101,11_2 = 5,75$$

