

# **Числовые последовательности**

# Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел  $\mathbf{N}$ :

$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$

Функцию  $y=f(x)$ ,  $x \in \mathbf{N}$  называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают  $y=f(n)$  или  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  или  $\{y_n\}$ .

Величина  $y_n$  называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой  $y_n=f(n)$ , позволяющей найти любой член последовательности по его номеру  $n$ ; эта формула называется формулой общего члена.



# Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, ... – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, ... – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, ... – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ , ... – ряд вида  $1/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ;

и т.д.



# Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

## Пример

1. Последовательность простых чисел:  
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...
2. Арифметическая прогрессия:  
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
3. Геометрическая прогрессия:  
$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$



# Ограниченность числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют **ограниченной сверху**, если все ее члены **не больше** некоторого числа.

Последовательность  $\{y_n\}$  **ограничена сверху**, если существует число  **$M$**  такое, что для любого  **$n$**  выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число  **$M$**  называют **верхней границей** последовательности.

**Пример:**  $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$  - ограничена сверху 0.



# Ограниченность числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют **ограниченной снизу**, если все ее члены **не меньше** некоторого числа.

Последовательность  $\{y_n\}$  **ограничена снизу**, если существует число **m** такое, что для любого **n** выполняется неравенство:

$$y_n \geq m$$

Число **m** называют **нижней границей** последовательности.

**Пример:** 1, 4, 9, 16, ...,  $n^2$ , ... - ограничена снизу 1.

Если последовательность **ограничена и сверху и снизу**, то ее называют **ограниченной** последовательностью.



# Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют **возрастающей последовательностью**, если каждый ее член **больше** предыдущего:  $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$

**Пример:** 1, 3, 5, 7, 9,  $2n-1$ , ... - возрастающая последовательность.

Последовательность  $\{y_n\}$  называют **убывающей последовательностью**, если каждый ее член **меньше** предыдущего:  $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$

**Пример:** 1,  $1/3$ ,  $1/5$ ,  $1/7$ ,  $1/(2n-1)$ , ... - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют **МОНОТОННЫМИ**



# Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу  $a$  при увеличении порядкового номера  $n$ . В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет **предел**.

Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{u_n\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$$

если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $N = N(\varepsilon)$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что  $|u_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$



## Предел числовой последовательности

Это определение означает, что  $a$  есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к  $a$  при возрастании  $n$ .

Геометрически это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое число  $N$ , что начиная с  $n > N$  все члены последовательности расположены внутри интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**; в противном случае – **расходящейся**.



## Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$  – гармонический ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если  $|q| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Если  $|q| > 1$ , то последовательность  $y_n = q^n$   
расходится



# Основные теоремы о пределах

**Теорема 1.** Функция не может иметь более одного предела.

**Теорема 2.** Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x).$$

**Теорема 3.** Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x).$$

**Следствие 1.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

- $$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [Cf(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x).$$

# Основные теоремы о пределах

**Следствие 2.** Предел степени равен степени предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \right]^n.$$

**Теорема 4.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, при условии, что предел делителя не равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)}.$$

Если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$$



# Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) =$$
$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$$

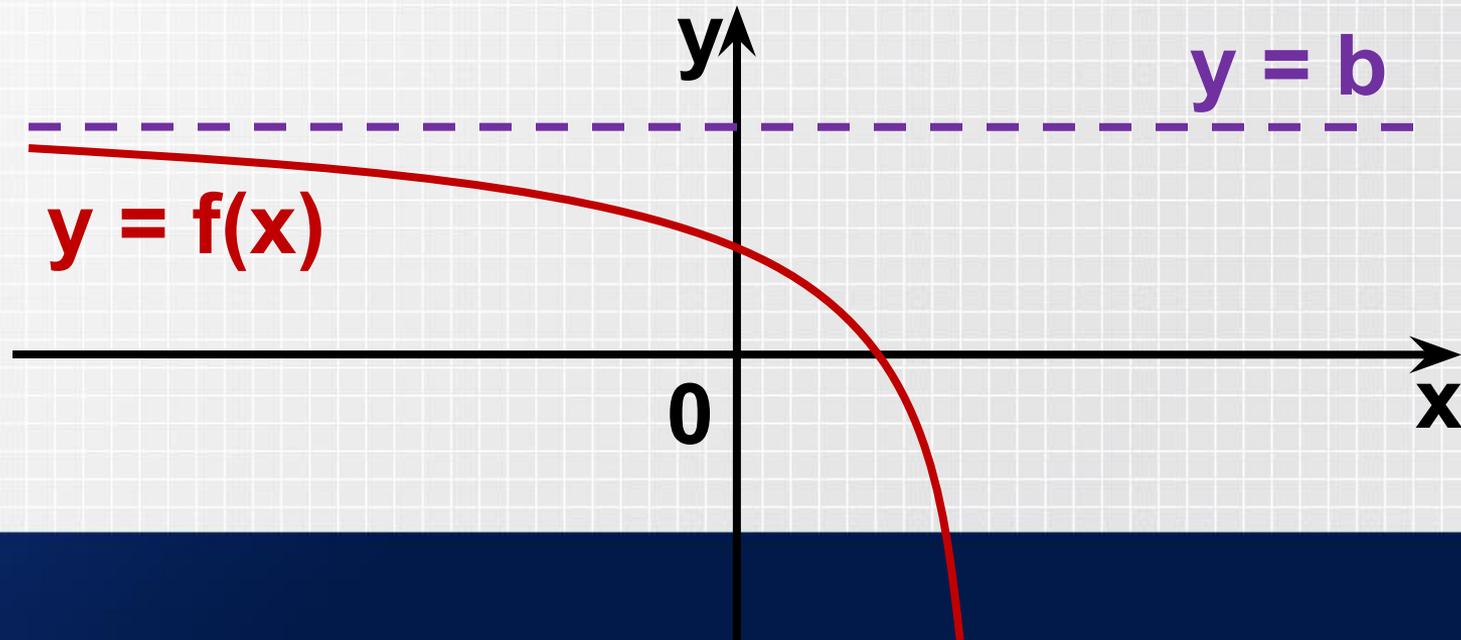


# Предел функции на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Будем говорить, что функция  $f(x)$  стремится к пределу  $b$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для произвольного малого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое положительное число  $M$ , что для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > M$ , выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

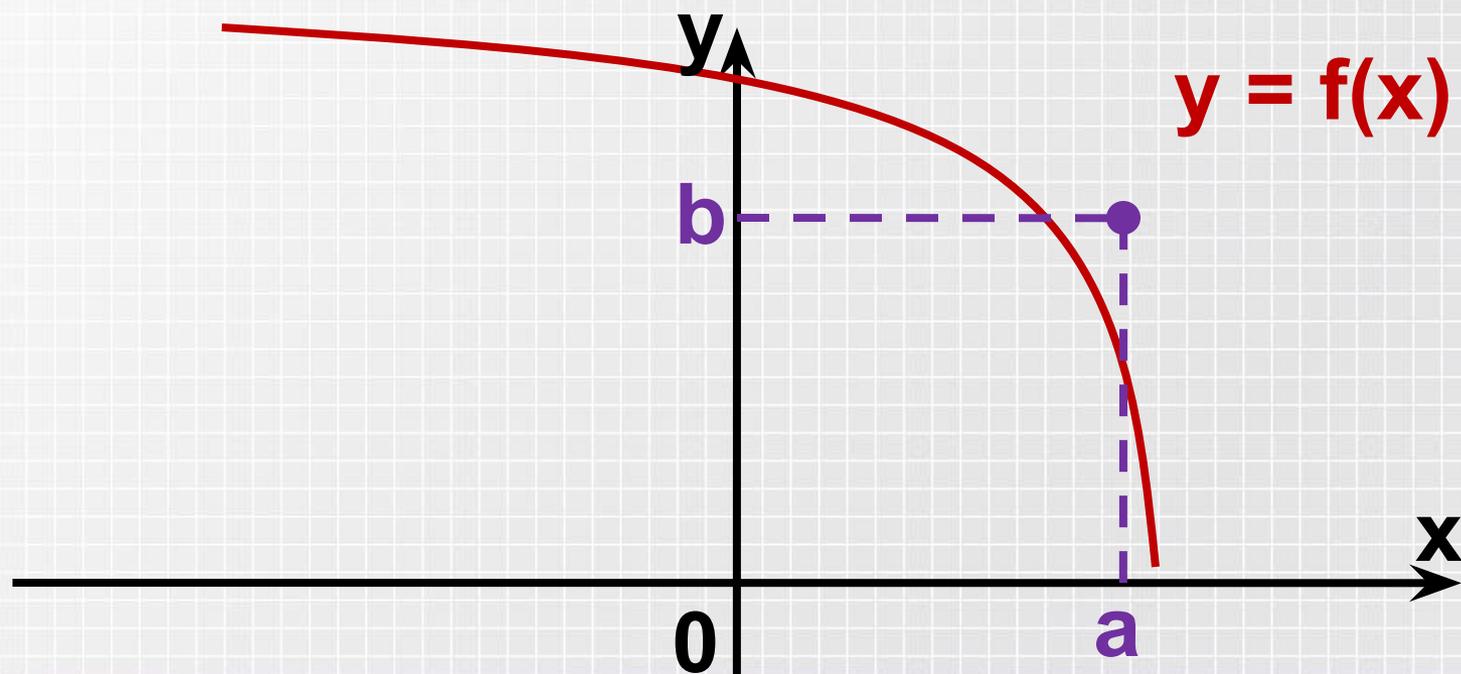
В этом случае прямая  $y=b$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y=f(x)$ .



## Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Функция  $y=f(x)$  стремится к пределу  $b$  при  $x \rightarrow a$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$ , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число  $\delta$ , что при всех  $x \neq a$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ , имеет место неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .



# Непрерывность функции в точке

Функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной в точке  $x=a$ , если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

## Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -\frac{3}{2}$$

