

Числовые последовательности

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел \mathbf{N} :

$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$

Функцию $y=f(x)$, $x \in \mathbf{N}$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают $y=f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n=f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n ; эта формула называется формулой общего члена.



Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, ... – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, ... – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, ... – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, ... – ряд вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$;

и т.д.



Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

Пример

1. Последовательность простых чисел:
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...
2. Арифметическая прогрессия:
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
3. Геометрическая прогрессия:
$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$



Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **ограниченной сверху**, если все ее члены **не больше** некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ **ограничена сверху**, если существует число **M** такое, что для любого **n** выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число **M** называют **верхней границей** последовательности.

Пример: $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$ - ограничена сверху 0.



Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **ограниченной снизу**, если все ее члены **не меньше** некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ **ограничена снизу**, если существует число **m** такое, что для любого **n** выполняется неравенство:

$$y_n \geq m$$

Число **m** называют **нижней границей** последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, ..., n^2 , ... - ограничена снизу 1.

Если последовательность **ограничена и сверху и снизу**, то ее называют **ограниченной** последовательностью.



Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **возрастающей последовательностью**, если каждый ее член **больше** предыдущего: $y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, $2n-1$, ... - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют **убывающей последовательностью**, если каждый ее член **меньше** предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$

Пример: 1, $1/3$, $1/5$, $1/7$, $1/(2n-1)$, ... - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют **МОНОТОННЫМИ**



Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу a при увеличении порядкового номера n . В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет **предел**.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε , что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$



Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n .

Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N , что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**; в противном случае – **расходящейся**.



Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ – гармонический ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$
расходится



Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Функция не может иметь более одного предела.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x).$$

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

- $$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [Cf(x)] = C \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x).$$

Основные теоремы о пределах

Следствие 2. Предел степени равен степени предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \right]^n.$$

Теорема 4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, при условии, что предел делителя не равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)}.$$

Если $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$$



Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) =$$
$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$$

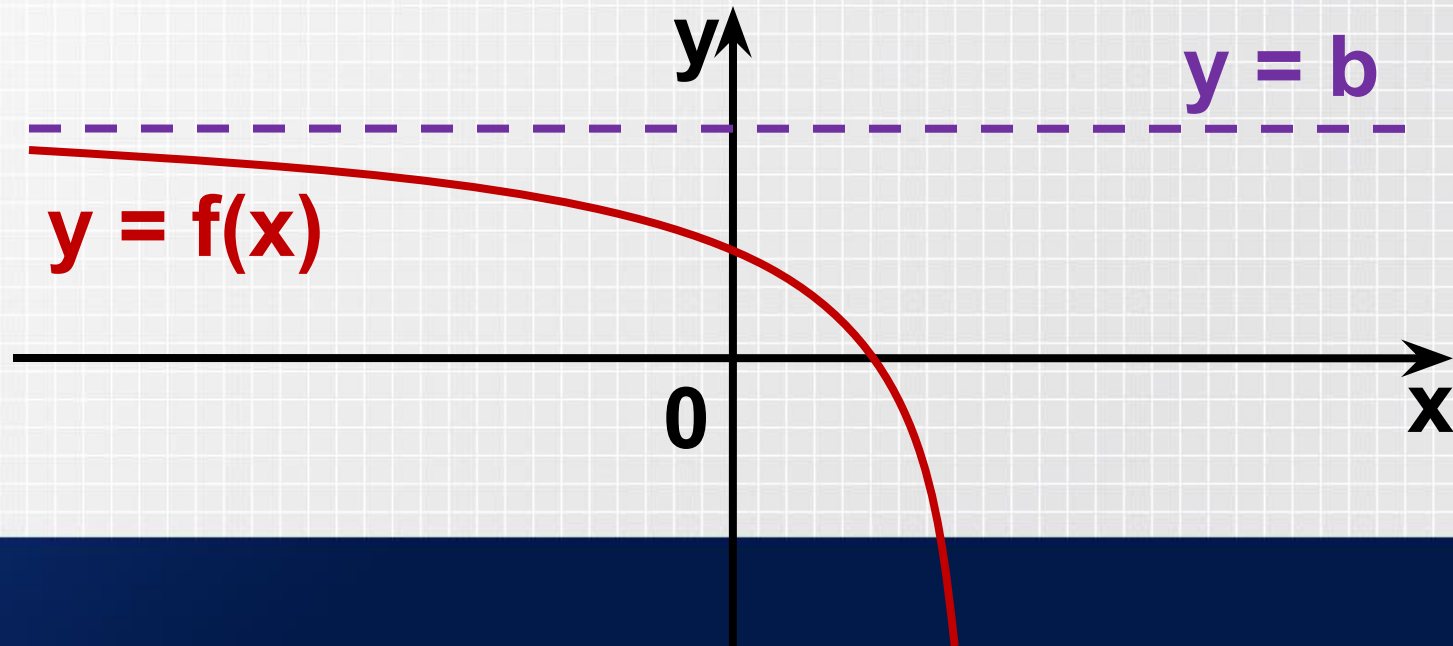


Предел функции на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow \infty$, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число M , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

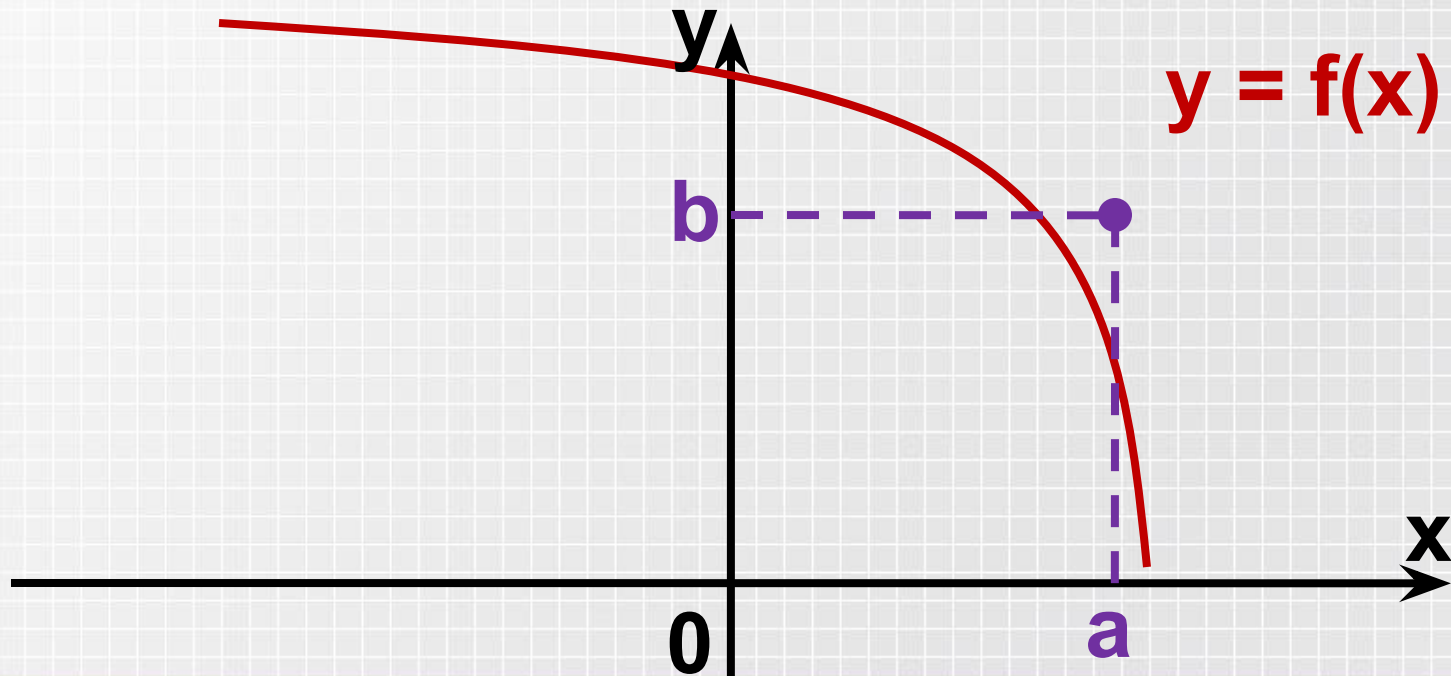
В этом случае прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.



Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Функция $y=f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow a$, если для каждого положительного числа ε , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Непрерывность функции в точке

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x=a$, если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -\frac{3}{2}$$

