Числовые последовательности

Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел **N**:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

Функцию $y=f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y=f(n)$ или $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$ или $\{y_n\}$.

Величина y_n называется **общим членом** последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой $y_n=f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n; эта формула называется **формулой общего члена**.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида 1/n, где $n \in N$;

и т.д.

Способы задания последовательностей

1. Перечислением членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

Примеры:

1. Последовательность простых чисел:
   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; …
2. Арифметическая прогрессия:
   $a_n = a_1 + (n – 1)d$
3. Геометрическая прогрессия:
   $b_{n + 1} = b_n \cdot q$

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **ограниченной сверху,** если все ее члены **не больше** некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ **ограниченна сверху,** если существует число **М** такое, что для любого **п** выполняется неравенство

$$y_п \leq M$$

Число **М** называют **верхней границей последовательности**.

Пример: -1, -4, -9, -16, …, $-п^2$, … - ограничена сверху 0.

Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **ограниченной снизу,** если все ее члены **не меньше** некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ **ограниченна снизу,** если существует число **m** такое, что для любого **п** выполняется неравенство:

$$y_п \geq m$$

Число **m** называют **нижней границей последовательности**.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, $п^2$, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность **ограничена и сверху и снизу,** то ее называют **ограниченной** последовательностью.

Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют **возрастающей последовательностью,** если каждый ее член **больше** предыдущего: $y_1 < y_2 < y_3 < y4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots$

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2п-1, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{y_n\}$ называют **убывающей последовательностью,** если каждый ее член **меньше** предыдущего: $y_1 > y_2 > y_3 > y4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots$

Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п–1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют **монотонными**

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу **a** при увеличении порядкового номера **n**. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет **предел**.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = a}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$

Предел числовой последовательности

Это определение означает, что a есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n.

Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое число N, что начиная с $n>N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.

Рассмотрим **последовательность:**

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \dots;\ \frac{1}{n};\ \dots$ – гармонический ряд

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

Если $|q| < 1$, то $\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0}$

Если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ **расходится**

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Функция не может иметь более одного предела.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) + \lim_{x \to x_0(\infty)} g(x).$$

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0(\infty)} g(x).$$

Следствие. 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

- $$\lim_{x \to x_0(\infty)} [Cf(x)] = C \lim_{x \to x_0(\infty)} f(x).$$

Основные теоремы о пределах

Следствие 2. Предел степени равен степени предела, т.е.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} [f(x)]^n = [\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x)]^n.$$

Теорема 4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, при условии, что предел делителя не равен нулю, т.е.

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} g(x)}.$$

Если $m \in N$, $k \in R$, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0}$$

Примеры:

$$1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

$$2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

$$3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$$

$$4)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=$$

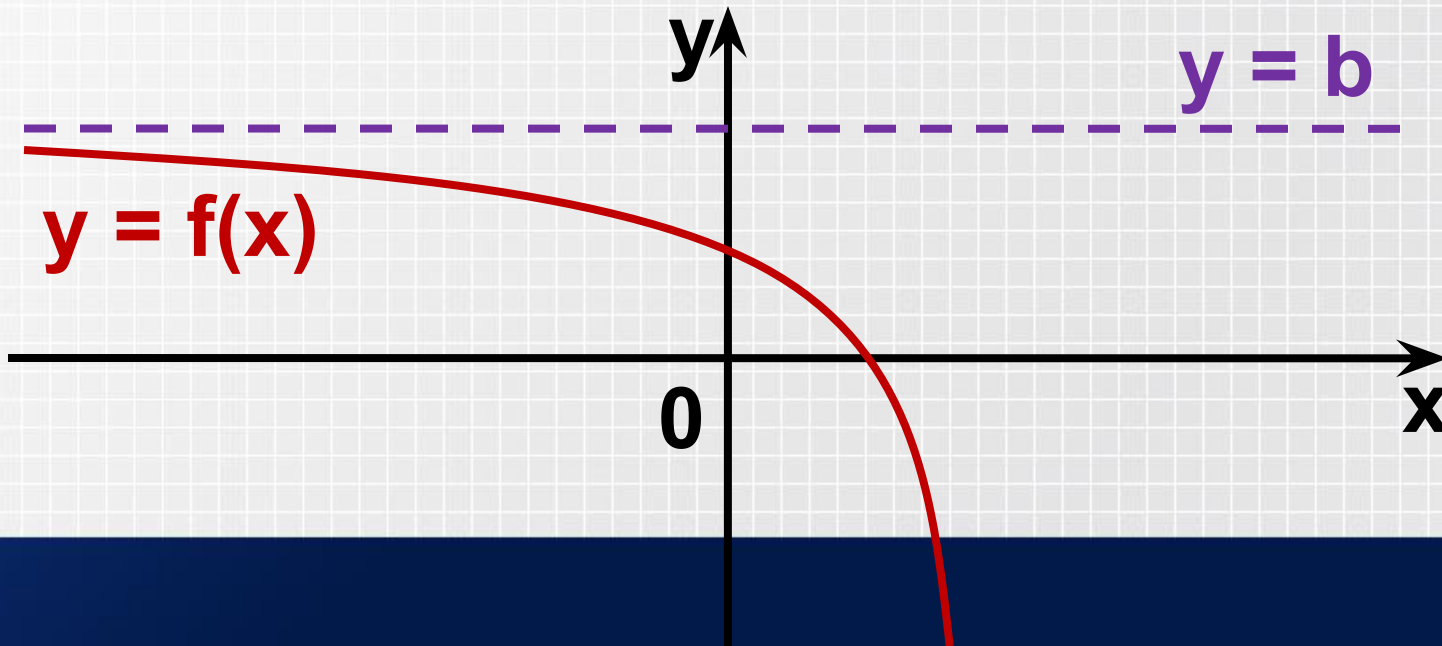
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

Предел функции на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Будем говорить, что функция **f(x)** стремится к пределу **b** при **$x \to \infty$**, если для произвольного малого положительного числа ε можно указать такое положительное число **M**, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству **$|x|>M$**, выполняется неравенство **$|f(x) - b| < \varepsilon$.**

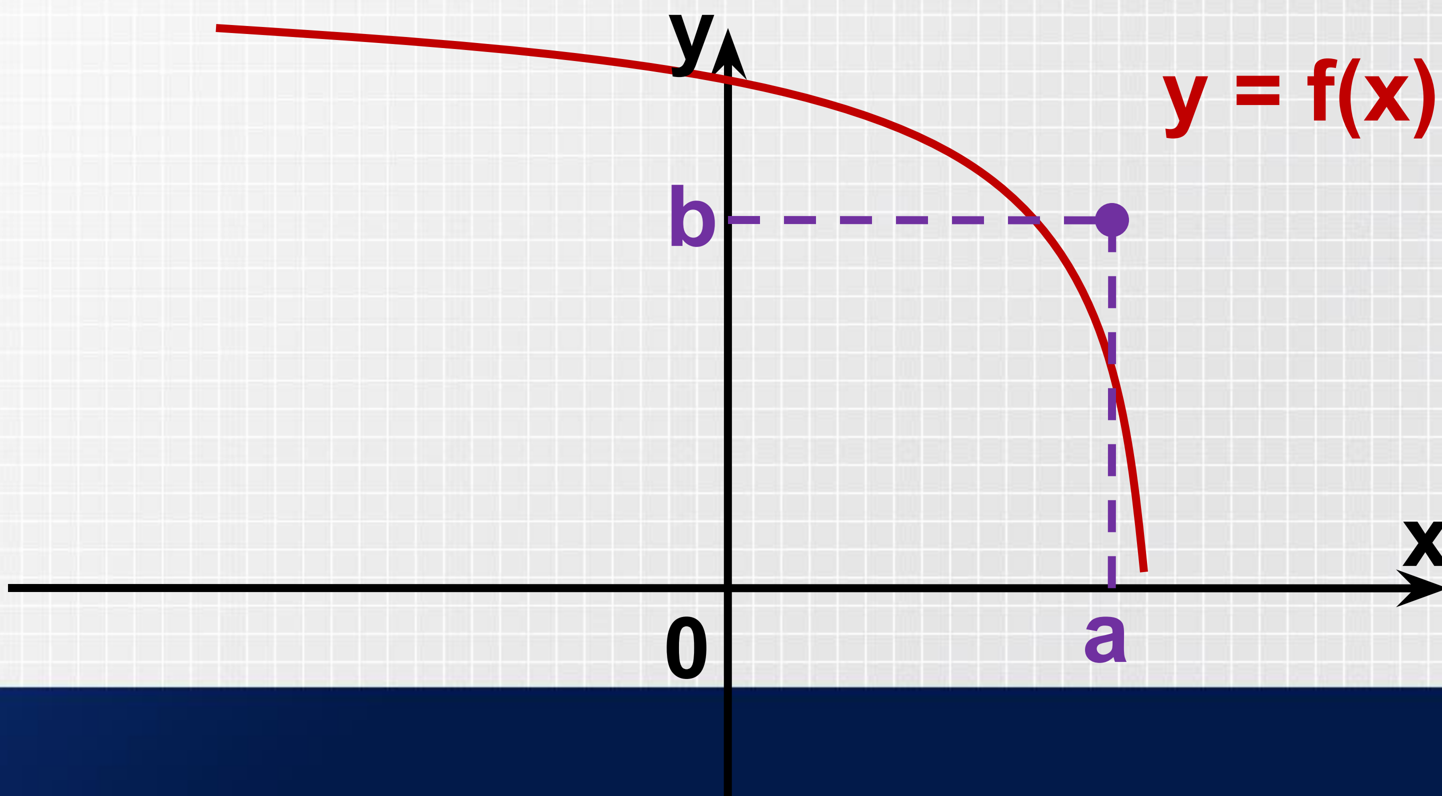
В этом случае прямая **y=b** является горизонтальной асимптотой графика функции **y=f(x)**.



Предел функции в точке

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Функция **y=f(x)** стремится к пределу **b** при **x→a**, если для каждого положительного числа **ε**, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число **δ**, что при всех **x≠a** из области определения функции, удовлетворяющих неравенству **|x - a| < δ**, имеет место неравенство **|f(x) - b| < ε**.



Непрерывность функции в точке

Функцию y = f(x) называют непрерывной в точке x=a, если выполняется условие

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{x \to 1}\left(x^3 - 2x^2 + 5x + 3\right) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2)\ \lim_{x \to 2}\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3)\ \lim_{x \to -3}\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \to -3}\frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -\frac{3}{2}$$