Княгининский университет

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ
Модуль 2. Интегральное исчисление функции одной переменной
Модульная единица 4. Первообразная и неопределенный интеграл. Методы интегрирования (8ч.)

Сутягина Ольга Владимировна
ст. преподаватель кафедры
«Физико-математические науки»

ЧАСТЬ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

План лекционного занятия:

1. Понятие неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных неопределенных интегралов.
4. Основные методы интегрирования.

   4.1. Метод непосредственного интегрирования.

   4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).

   4.3. Метод интегрирования по частям.

1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции* $f(x)$ *найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию* $F(x)$, *зная ее производную* $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

1. Понятие неопределенного интеграла

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

1. Понятие неопределенного интеграла

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла***.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

2. Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)\,dx, \qquad \Big(\int f(x)\,dx\Big)' = f(x).$$

❑ Действительно,

$$d\Big(\int f(x)\,dx\Big) = d(F(x)+C) = dF(x) + d(C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

и

$$\Big(\int f(x)\,dx\Big)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x). \qquad \blacksquare$$

2. Свойства неопределенного интеграла

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❑ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$ ■

2. Свойства неопределенного интеграла

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx, \quad a\neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❑ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$

$$= a\cdot F(x) + C_1 = a\cdot\left(F(x) + \frac{C_1}{a}\right) = a(F(x)+C) = a\int f(x)\,dx$$

$\left(\text{положили } \dfrac{C_1}{a} = C\right).$ ■

2. Свойства неопределенного интеграла

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

☐ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int (F'(x) \pm G'(x))\,dx =$$
$$= \int (F(x) \pm G(x))'\,dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C =$$
$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

2. Свойства неопределенного интеграла

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

☐ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

2. Свойства неопределенного интеграла

Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

3. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^{u}\,du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

3. Таблица основных неопределенных интегралов

7. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

3. Таблица основных неопределенных интегралов

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + C.$

4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием***.

4.1. Метод непосредственного интегрирования

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u\, du = d(\sin u),$$

$$\sin u\, du = -d(\cos u),$$

Вообще, $f'(u)\, du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

4.1. Метод непосредственного интегрирования

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx -$
$- \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.}$$

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$.

Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^{t}\,dt = 4e^{t} + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$.

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Найти $\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx$.

Решение: Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x \cdot (x+2)^{100}\,dx = \int (t-2)\cdot t^{100}\,dt = \int t^{101}\,dt - 2\int t^{100}\,dt =$$

$$= \frac{t^{102}}{102} - 2\cdot\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C.$$

4.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

4.3. Метод интегрирования по частям

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

4.3. Метод интегрирования по частям

Найти $\int \ln x \, dx$.

Решение: Пусть $\begin{bmatrix} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{bmatrix}$. Поэтому

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

4.3. Метод интегрирования по частям

Найти $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$.

● Решение: Пусть $\begin{bmatrix} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix}$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad ●$$

Князининский университет

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЧАСТЬ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

План лекционного занятия:

1. Понятия о рациональных функциях.
2. Дробно-рациональная функция.
3. Интегрирование простейших рациональных дробей.
4. Интегрирование рациональных дробей.

1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — натуральное число, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты, называется ***многочленом*** (или ***целой рациональной функцией***). Число n называется ***степенью*** многочлена.

1. Понятия о рациональных функциях

Корнем многочлена называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$.

1. Понятия о рациональных функциях

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Теорема Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n.

1. Понятия о рациональных функциях

Пример Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

○ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$ ●

2. Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией (или ***рациональной дробью***) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geqslant n$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

2. Дробно-рациональная функция

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена* $L(x)$ *и правильной рациональной дроби* $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Дробно-рациональная функция

Например, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad\quad -5x+9 & x-2 \\
\underline{x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
2x^3 \qquad -5x+9 & \\
\underline{2x^3 - 4x^2} \qquad\qquad & \\
4x^2 - 5x + 9 & \\
\underline{4x^2 - 8x} \quad\; & \\
3x + 9 & \\
\underline{3x - 6} & \\
15. &
\end{array}
$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{15}{x - 2}$.

2. Дробно-рациональная функция

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\dfrac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \dfrac{15}{x - 2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x-a}$;

(II). $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N})$;

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2-4q<0$);

(IV). $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geqslant 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа, называются ***простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.***

2. Дробно-рациональная функция

Теорема Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_m x + q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m} x + N_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ — некоторые действительные коэффициенты.

2. Дробно-рациональная функция

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3};$$

2) $$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

3) $$\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+$$
$$+\frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}.$$

2. Дробно-рациональная функция

Пример Представить дробь $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

2. Дробно-рациональная функция

Отсюда следует

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

т. е.

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + (5A - C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получаем

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ -3 = -2A - B + C, \\ -3 = 5A - C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A = -1$, $B = 3$, $C = -2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Княгининский университет

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a|+C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$ (формула (1));

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2) и (15) таблицы интегралов, получаем

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot \ln(t^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$, $k \geqslant 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M \int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-k}\, d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Вычислим второй интеграл:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\, dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+a^2)^k} \right).$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

К последнему интегралу применим интегрирование по частям.

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

4. Интегрирование рациональных дробей

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

4. Интегрирование рациональных дробей

Пример Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\,dx$.

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^5 \qquad\quad + 2x^3 \qquad\qquad + 4x + 4 \\ x^5 + 2x^4 + 2x^3 \end{array} & \begin{array}{l} x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \hline x - 2 \end{array} \\
\quad -\begin{array}{l} -2x^4 \qquad\qquad\qquad + 4x + 4 \\ -2x^4 - 4x^3 - 4x^2 \end{array} & \\
\qquad\qquad 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \text{ (остаток).} &
\end{array}
$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3+4x^2+4x+4\equiv(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Обозначим $x+1=t$, тогда $x=t-1$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{4t-4+2}{t^2+1}\,dt = 4\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2\cdot\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

●

ЧАСТЬ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

План лекционного занятия:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$.

3. Использование тригонометрических преобразований.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Пример Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

○ Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet$$

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Пример Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

❍ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad ●$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m + n$ — есть четное отрицательное целое число.

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Пример Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$.

Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \quad \bullet$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Пример Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x \, dx.$$

❍ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} \, dt = \int t^{-3} \, dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Пример Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

Решение:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \, dx -$$

$$- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \quad \bullet$$

3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

3. Использование тригонометрических преобразований

Пример Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x \, dx$.

Решение:

$$I = \int \sin 8x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C. \quad \bullet$$

Книгининский университет

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ
Модуль 2. Интегральное исчисление функции одной переменной
Модульная единица 4. Первообразная и неопределенный интеграл. Методы интегрирования (8ч.)

Сутягина Ольга Владимировна
ст. преподаватель кафедры
«Физико-математические науки»