



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ

Модуль 2. Интегральное исчисление функции одной переменной

Модульная единица 4. Первообразная и неопределенный интеграл. Методы интегрирования (8ч.)

Сутягина Ольга Владимировна
ст. преподаватель кафедры
«Физико-математические науки»



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЧАСТЬ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

План лекционного занятия:

1. Понятие неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных неопределенных интегралов.
4. Основные методы интегрирования.
 - 4.1. Метод непосредственного интегрирования.
 - 4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).
 - 4.3. Метод интегрирования по частям.

1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

☞ Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для любого $x \in (a; b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x) dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

1. Понятие неопределенного интеграла

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x). \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

1. Понятие неопределенного интеграла

⇒ Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется **неопределенным интегралом от функции $f(x)$** и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

⇒ Здесь $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ — **подынтегральным выражением**, x — **переменной интегрирования**, \int — **знаком неопределенного интеграла**.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

2. Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

□ Действительно,

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x) dx = f(x) dx$$

и

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

2. Свойства неопределенного интеграла

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

□ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$ ■

2. Свойства неопределенного интеграла

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

□ Действительно,

$$\begin{aligned} \int a f(x) dx &= \int a F'(x) dx = \int (a F(x))' dx = \int d(a F(x)) = \\ &= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a} \right) = a(F(x) + C) = a \int f(x) dx \end{aligned}$$

(положили $\frac{C_1}{a} = C$). ■

2. Свойства неопределенного интеграла

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

□ Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int (F'(x) \pm G'(x)) dx = \\ &= \int (F(x) \pm G(x))' dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + C = \\ &= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \end{aligned}$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. ■

2. Свойства неопределенного интеграла

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то и $\int f(u) du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

□ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x) dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u) du = f(u) du.$$

Отсюда $\int f(u) du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ■

2. Свойства неопределенного интеграла

Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} \int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx &= 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - 5 \int dx = \\ &= 2 \frac{x^5}{5} + C_1 - 3 \frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C, \end{aligned}$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

3. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C \right);$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C;$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$4. \int e^u du = e^u + C;$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C$$

3. Таблица основных неопределенных интегралов

$$7. \int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u| + C;$$

$$8. \int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\sin u| + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$11. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$12. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

3. Таблица основных неопределенных интегралов

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$$

$$15. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$$

$$17. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$18. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

4.1. Метод непосредственного интегрирования

☞ Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

4.1. Метод непосредственного интегрирования

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число,}$$

$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число,}$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

Вообще, $f'(u) \, du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

4.1. Метод непосредственного интегрирования

Примеры:

$$1) \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C \text{ (формула 2 таблицы интегралов);}$$

$$2) \int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C \text{ (формула 1);}$$

$$3) \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C \text{ (формулы 10 и 1);}$$

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t) dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Найти $\int e^{\frac{x}{4}} dx$.

○ Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4 dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx = 4 \int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$, где $t = \varphi(x)$.

4.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Найти $\int x \cdot (x + 2)^{100} dx$.

○ Решение: Пусть $x + 2 = t$. Тогда $x = t - 2$, $dx = dt$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int x \cdot (x + 2)^{100} dx &= \int (t - 2) \cdot t^{100} dt = \int t^{101} dt - 2 \int t^{100} dt = \\ &= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x + 2)^{102}}{102} - \frac{2(x + 2)^{101}}{101} + C. \bullet \end{aligned}$$

4.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

⇒ Полученная формула называется **формулой интегрирования по частям**. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

4.3. Метод интегрирования по частям

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$. Удобно положить $P(x) dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \cdot \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

4.3. Метод интегрирования по частям

Найти $\int \ln x \, dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

4.3. Метод интегрирования по частям

Найти $\int (2x + 1)e^{3x} dx$.

○ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{l} u = 2x + 1 \implies du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx \implies v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x + 1)e^{3x} dx = (2x + 1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2 dx = \frac{1}{3}(2x + 1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \bullet$$



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЧАСТЬ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

План лекционного занятия:

1. Понятия о рациональных функциях.
2. Дробно-рациональная функция.
3. Интегрирование простейших рациональных дробей.
4. Интегрирование рациональных дробей.

1. Понятия о рациональных функциях

Многочлен (некоторые сведения справочного характера)

Функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

☞ где n — натуральное число, a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — постоянные коэффициенты, называется **многочленом** (или **целой рациональной функцией**). Число n называется **степенью** многочлена.

1. Понятия о рациональных функциях

☞ **Корнем многочлена** называется такое значение x_0 (вообще говоря, комплексное) переменной x , при котором многочлен обращается в нуль, т. е. $P_n(x_0) = 0$.

Теорема Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x - x_1$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdot P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n - 1)$.

1. Понятия о рациональных функциях

Возникает вопрос: всякий ли многочлен имеет корень? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема (основная теорема алгебры). Всякий многочлен n -й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Теорема Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — корни многочлена, a_0 — коэффициент многочлена при x^n .

1. Понятия о рациональных функциях

Пример Разложить многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ на множители.

○ Решение: Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ обращается в нуль при $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2). \quad \bullet$$

2. Дробно-рациональная функция

☞ Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m , а $Q_n(x)$ — многочлен степени n .

☞ Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется **неправильной**.

2. Дробно-рациональная функция

☉ *Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т. е.*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Дробно-рациональная функция

Например, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ — неправильная рациональная дробь.

Разделим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} x^4 \\ - x^4 - 2x^3 \\ \hline 2x^3 \\ - 2x^3 - 4x^2 \\ \hline 4x^2 - 5x + 9 \\ - 4x^2 - 8x \\ \hline 3x + 9 \\ - 3x - 6 \\ \hline 15 \end{array} & \begin{array}{l} -5x + 9 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \bigg| x - 2 \\ \hline & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{array}$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$.

2. Дробно-рациональная функция

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следовательно, $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$.

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\frac{A}{x - a}$;

(II). $\frac{A}{(x - a)^k}$ ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$);

(III). $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);

(IV). $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geq 2$, корни знаменателя комплексные),

⇒ где A , a , M , N , p , q — действительные числа, называются **простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов**.

2. Дробно-рациональная функция

Теорема Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ — некоторые действительные коэффициенты.

2. Дробно-рациональная функция

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$1) \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1};$$

$$3) \frac{7x^2 + 8x + 9}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

2. Дробно-рациональная функция

Пример Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)}$ в виде суммы простейших дробей.

○ Решение: Согласно теореме имеем:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5},$$

т. е.

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (x - 1)(Bx + C)}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

2. Дробно-рациональная функция

Отсюда следует

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

т. е.

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + (5A - C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2 , x^1 , x^0 , получаем

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ -3 = -2A - B + C, \\ -3 = 5A - C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A = -1$, $B = 3$, $C = -2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 5}.$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln |x-a| + C$ (формула (2) таблицы интегралов);

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$
(формула (1));

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

3. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$.

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим:

$$J = \int \frac{Mx + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx,$$

причем $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Сделаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t$. Тогда $x = t - \frac{p}{2}$,
 $dx = dt$. Положим $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Следовательно, используя формулы (2)
и (15) таблицы интегралов, получаем

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{t^2 + a^2} dt = \\ &= M \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \cdot \ln(t^2 + a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \end{aligned}$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx$, $k \geq 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-k} d(t^2 + a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C.$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2} \left(J_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right). \end{aligned}$$

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

К последнему интегралу применим интегрирование по частям.

т. е.

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

4. Интегрирование рациональных дробей



1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

4. Интегрирование рациональных дробей

Пример Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$

○ Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad \quad + 2x^3 \quad \quad + 4x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ x - 2 \end{array} \right. \\
 - \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \\
 \quad - 2x^4 \quad \quad + 4x + 4 \\
 - \underline{- 2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \\
 \quad \quad \quad \underline{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4} \text{ (остаток)}.
 \end{array}$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

т. е.

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Интегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx &= \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Обозначим $x + 1 = t$, тогда $x = t - 1$ и $dx = dt$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx &= \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1} dt = 4 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 2 \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЧАСТЬ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

План лекционного занятия:

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.
2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
3. Использование тригонометрических преобразований.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

⇒ Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, которая называется *универсальной*.

$$\text{Действительно, } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}; \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t . Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подинтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Пример Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

○ Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $dx =$

$$= \frac{2 dt}{1 + t^2}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{2 dt}{(1 + t^2)(3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \\ &= \int \frac{d(t + \frac{1}{2})}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

1. Универсальная тригонометрическая подстановка

Пример Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

○ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1 + (-\sin x)^2} = \frac{1}{1 + \sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + \frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m + n$ — есть четное отрицательное целое число.

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Пример Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

○ Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$\begin{aligned} I &= \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Пример Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x dx.$$

○ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$,
 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet$$

2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Пример Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \\ &\quad - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

3. Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$,
 $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

3. Использование тригонометрических преобразований

Пример Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{1}{6} \cos 6x \right) + C. \quad \bullet \end{aligned}$$



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ

**Модуль 2. Интегральное исчисление
функции одной переменной**

**Модульная единица 4. Первообразная и
неопределенный интеграл. Методы интегрирования
(8ч.)**

Сутягина Ольга Владимировна
ст. преподаватель кафедры
«Физико-математические науки»