СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД
(метод обратной матрицы)

Преподаватель:
Махмудов
Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

Матричный метод решения СЛАУ

Матричный метод – это метод решения через **обратную матрицу** квадратных (с числом уравнений, равным числу неизвестных) систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем.

2. Матричный метод

Рассмотрим систему ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ → **матрица-столбец переменных**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ → **матрица столбец свободных членов**

Запишем эту систему в матричном виде.

$$A \cdot X = B \longrightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$ **- решение системы**

Запишем СЛАУ в виде матричного уравнения и решим его

$$AX = B$$

Умножим это матричное уравнение слева на A^{-1} — матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

Так как $A^{-1}A = E$ по определению обратной матрицы, получаем

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{где} \quad A^{-1} = 1/\Delta\,(A^*)^T,$$

$$\Delta \neq 0$$

$(A^*)^T$ - транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Пример: Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ матричным методом.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 1 + 0 - 0 - 4 - (-2) = -11 \neq 0,$$

значит A – невырожденная и существует $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - 1) = -3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2 + 1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1 - 0) = 1, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 - 0) = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4 - 0) = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2+2) = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4+1) = -5,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (8-2) = 6,$$

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 \\ 11 \\ -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot (-11) \\ \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot 11 \\ \left(\frac{1}{-11}\right) \cdot (-22) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Самостоятельная работа

1 вариант

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

2 вариант

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 = -8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Домашнее задание

Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5, \\ x - 5y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$