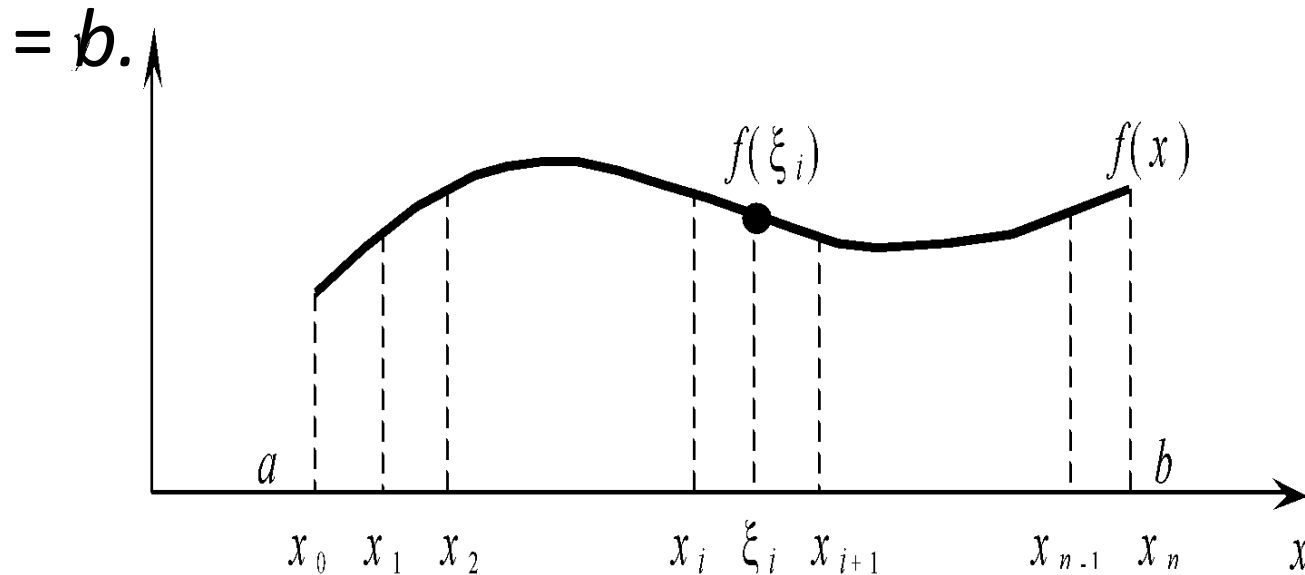


*Лабораторная №7.*  
**Численное  
интегрирование**

# Интегрирование

- Применения: при вычислении площадей и объемов, значений работы, произведенной некоторыми силами, и т.д.
- Геометрический смысл определенного интеграла – это площадь, ограниченная кривой  $y = f(x)$ , осью абсцисс и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ .



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Для некоторых классов аналитически заданных функций  $f(x)$ , определенный интеграл можно вычислить непосредственно, т.е. найти первообразную и воспользоваться **формулой Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

На практике это случается редко. Чаще всего: а) не удастся выразить первообразную  $F(x)$  через элементарные функции, б) не всегда ответ удобен для использования, в) иногда значения  $f(x)$  заданы лишь в табличной форме.

# Численный подход

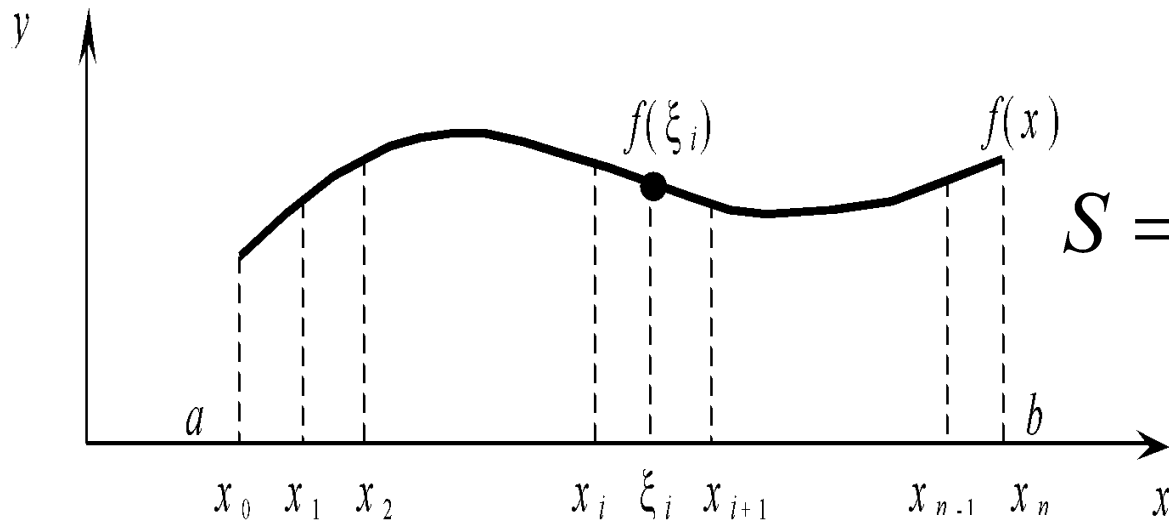
Поэтому для решения поставленной задачи приходится использовать **методы численного интегрирования**, общая суть которых состоит в *замене подынтегральной функции на такую аппроксимирующую функцию*, чтобы интеграл от нее можно было легко найти в элементарных функциях. Чаще всего в качестве аппроксимирующих функций берут некоторые интерполяционные многочлены.

**Основная идея** численного интегрирования заложена уже в известном *определении*

*интеграла по Риману*

# Интеграл по Риману

Пусть вещественная функция  $f(x)$  определена и ограничена на интервале  $[a, b]$ . Разобьем его на  $n$  произвольных частичных интервалов  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ . Выберем в каждом частичном интервале произвольную точку  $\xi$ ,  $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$ , и составим так называемую *интегральную сумму*



$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Если предел  $S$  при стремлении длины наибольшего частичного интервала к нулю существует для произвольных  $\xi_j$ , то его называют *интегралом Римана* от функции  $f(x)$ :

$$I = \lim_{\max |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0} S$$

На практике нельзя взять бесконечно малые длины отрезков. Но *если взять их достаточно малыми, то искомый интеграл можно приблизительно заменить интегральной суммой*. По существу, в этом и состоит численное интегрирование.

# Формулы численного интегрирования

Существующие на практике формулы численного интегрирования, по существу, отличаются от интегральной суммы только:

- 1) способами разбиения интервала, т. е. выбором точек  $x_i, \xi_i$ ;
- 2) методами ускорения сходимости суммы к точному значению;
- 3) оценкой погрешности.

# Квадратурная формула

Представим интегральную сумму в более общем виде. Заменяем коэффициенты  $(x_{i+1} - x_i)$  в ней некоторыми числами  $q_i$ , не зависящими от  $f(x)$ . Тогда

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i)$$

где точки  $a \leq \xi_i \leq b$  называются узлами метода, а числа  $q_i$  – весами узлов.



Интеграл тогда следует записать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R$$

Эта формула называется **квадратурной формулой**, а  $R$  – погрешностью (остаточным членом) квадратурной формулы.

Её смысл фактически состоит в замене функции некоторым интерполяционным многочленом.

При рассмотрении конкретного метода численного интегрирования соответствующая ему *квадратурная формула* считается заданной, если указано, как выбирать узлы  $\xi_i$  и соответствующие веса  $q_i$ , а также дана методика оценки погрешности  $R$  для определенных классов функций.

При реализации квадратурных формул в подавляющем большинстве случаев используется равномерная сетка с произвольным числом интерполяционных узлов, что определяет требования к степени используемых интерполяционных многочленов.

Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно интервал интегрирования разбивают на отдельные небольшие участки, применяют рабочие формулы невысокого порядка на каждом участке и потом складывают результаты расчета и оценочные погрешности.

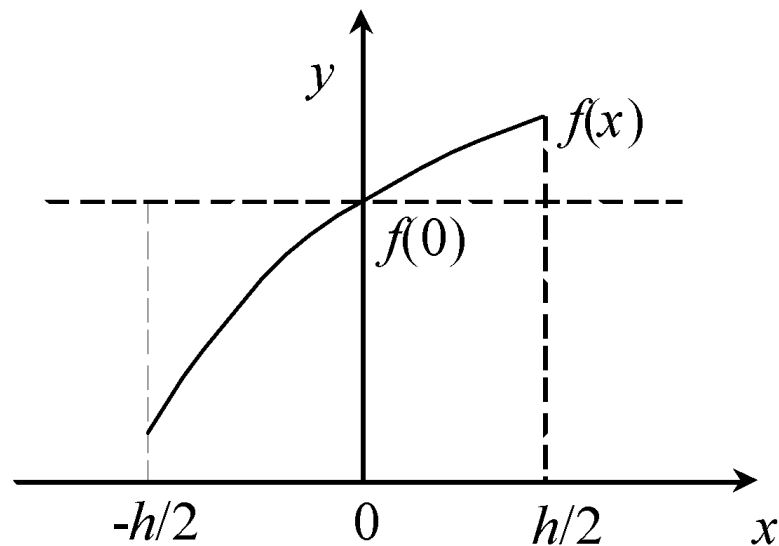
**Приведем простейшие квадратурные формулы**, сначала для отдельного малого интервала  $[x_i, x_{i+1}]$ , а затем для всего интервала интегрирования  $[a, b]$  в виде так называемых *составных квадратурных формул*.

# Формула прямоугольников

Рассмотрим малый интервал  $[-h/2, h/2]$ . Предположим, что подынтегральная функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема.

Тогда квадратурная формула запишется в виде:

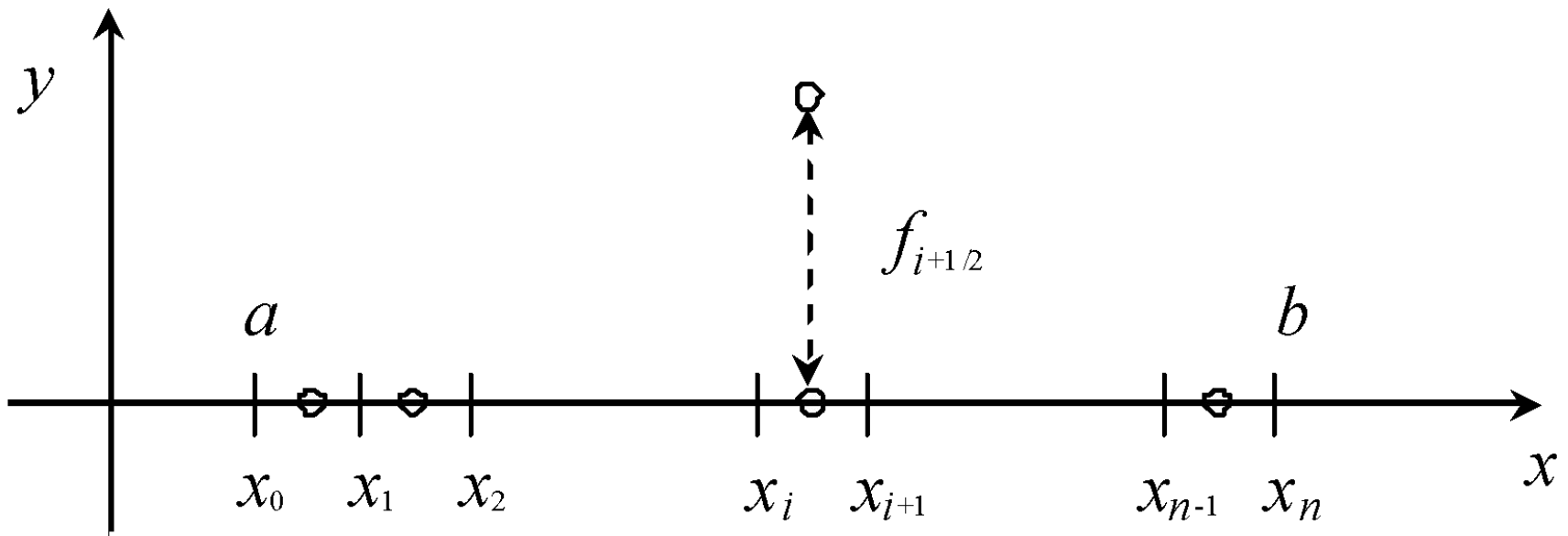
$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = h \cdot f(0) + R$$



Здесь взят один узел  $\xi = 0$  и соответствующий вес  $q = h$ , что соответствует аппроксимации функции многочленом нулевой степени (константой). Полученная квадратурная формула называется *формулой прямоугольников* для одного шага или *формулой средних*:

$$I = h \cdot f(0)$$

Название определяется тем, что интеграл функции на участке  $[-h/2, h/2]$  заменяется площадью прямоугольника с высотой  $f(0)$  и основанием  $h$ .



Пользоваться формулой прямоугольников можно только при достаточно малых  $h$ , поскольку ошибка при увеличении длины интервала *квадратично нарастает*. Поэтому если нужно вычислить интеграл на достаточно большом интервале  $[a, b]$ , следует сначала разбить его на большое число малых участков длиной  $h$ , а затем результаты для этих участков просуммировать.

Тогда для  $i$ -го интервала будем иметь:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

где  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Суммирование по всем интервалам приводит к **составной формуле прямоугольников**:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + R$$

где погрешность можно оценить как ( $\xi \in [a, b]$ )

$$R = \frac{h^2(b-a)}{24} \cdot f''(\xi)$$

# Формула трапеций

Пусть на малом интервале  $[0, h]$  задана дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f(x) \in C^2[0, h]$ . Квадратурное соотношение можно записать в виде

$$\int_0^h f(x) dx = h \frac{f(0) + f(h)}{2} + R$$

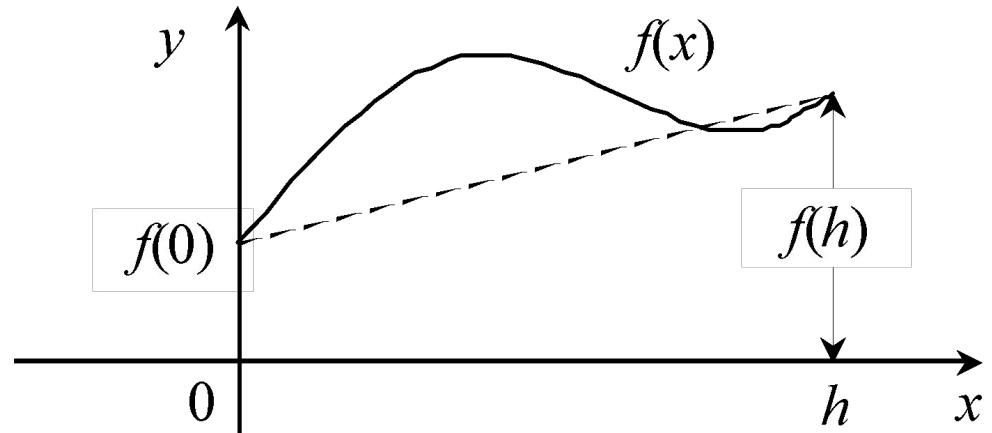
где взяты два узла  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_1 = h$  и соответствующие веса  $q_0 = q_1 = h/2$ , что соответствует аппроксимации функции многочленом первой степени (линейной функцией).

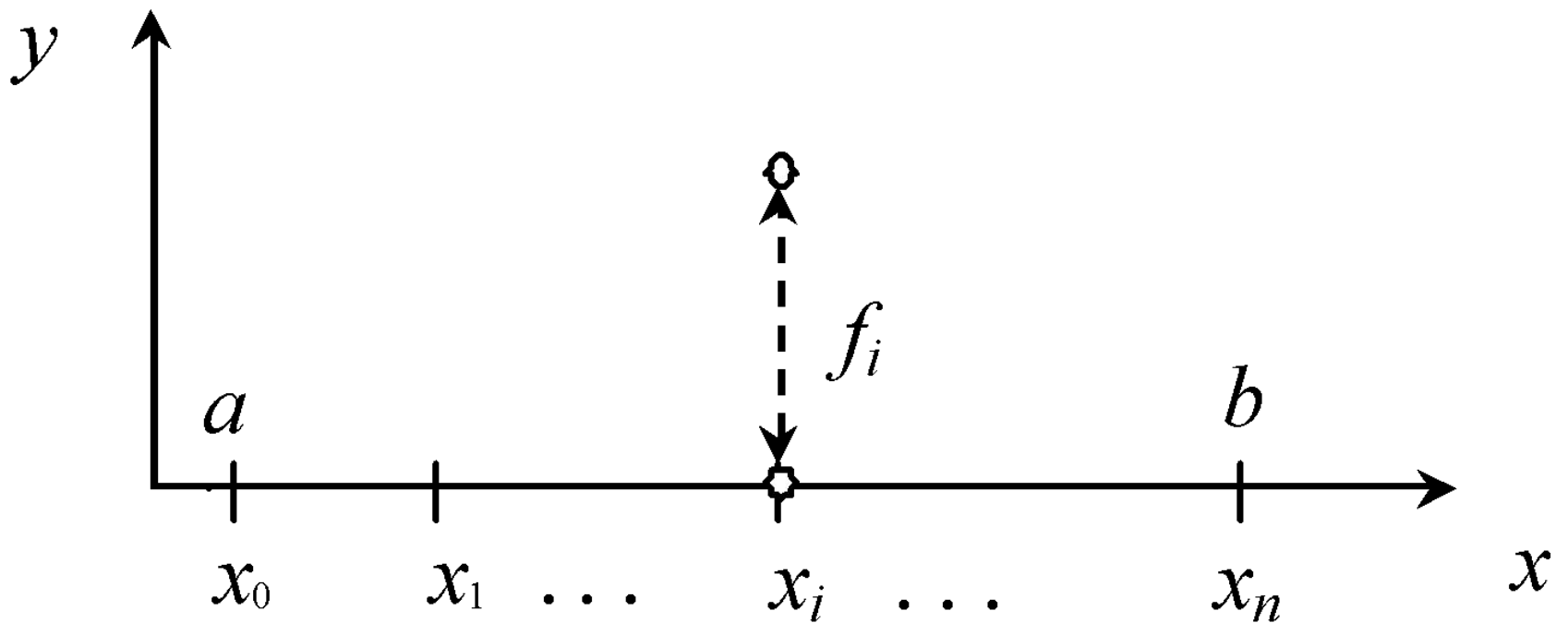


Получаемая квадратурная формула называется *формулой трапеций* для одного шага:

$$I = h \frac{f(0) + f(h)}{2}$$

Название связано с тем, что интеграл на участке  $[0, h]$  заменяется площадью трапеции с основаниями  $f(0)$ ,  $f(h)$  и высотой  $h$ .





Получим формулу трапеций для полного интервала  $[a, b]$ , состоящего из большого числа малых. Обозначим значение функции  $f(x)$  в узлах  $x_i$  как  $f_i = f(x_i)$ .

Тогда по аналогии с формулой для прямоугольников получим **составную квадратурную формулу трапеций**:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right) + R =$$

$$= \frac{h}{2} (f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) + R$$

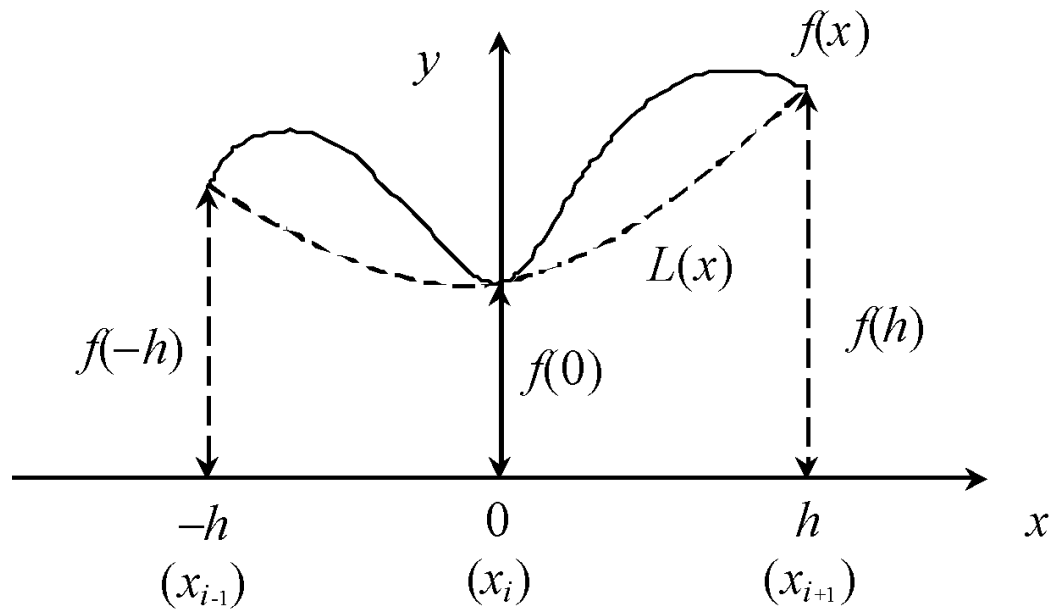
$$R = -\frac{h^2 (b-a)}{12} \cdot f''(\xi)$$

# Формула парабол (Симпсона)

Возьмем малый интервал  $[-h, h]$ , на котором определена четырежды дифференцируемая функция. В квадратурном соотношении возьмем три узла  $\xi_0 = x_{i-1} = -h$ ,  $\xi_1 = x_i = 0$ ,  $\xi_2 = x_{i+1} = h$ .

Соответствующие весовые коэффициенты получим из аппроксимации  $f(x)$  параболой, построенной на точках  $(-h, f(-h))$ ,  $(0, f(0))$ ,  $(h, f(h))$  в виде многочлена второй степени:

$$y = ax^2 + bx + c$$



Для получения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  построим многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через выбранные

**ТОЧКИ:**

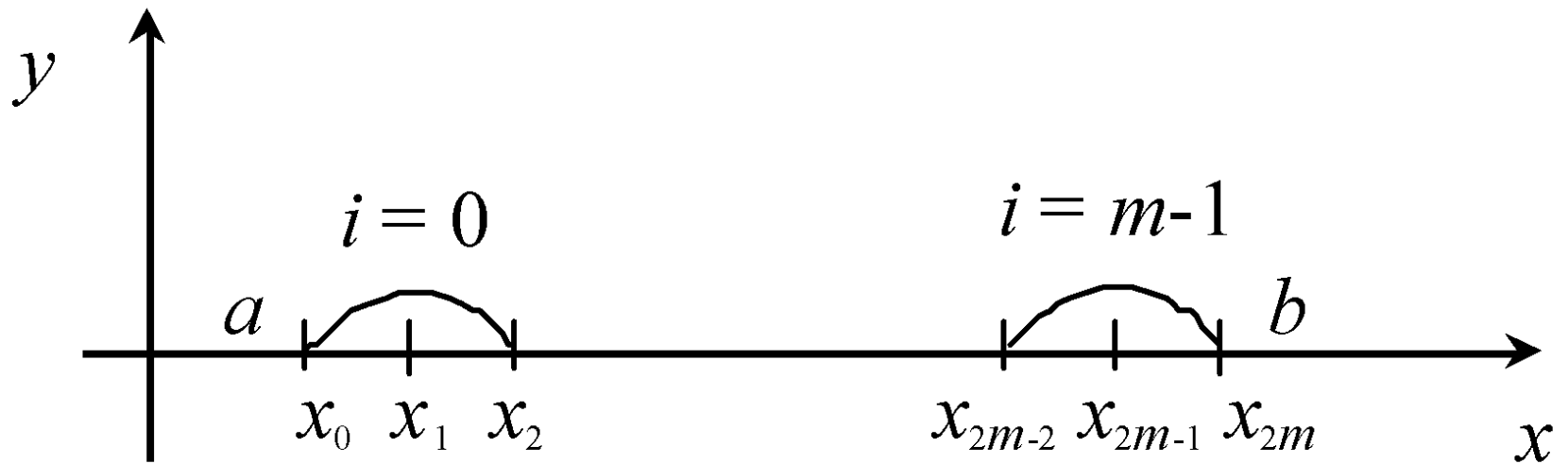
$$L_2(x) = f(-h) \frac{x(x-h)}{-h(-h-h)} + f(0) \frac{(x+h)(x-h)}{h(-h)} + f(h) \frac{x(x+h)}{h(h-(-h))} =$$

$$= \frac{f(-h)}{2h^2} (x^2 - xh) - \frac{f(0)}{h^2} (x^2 - h^2) + \frac{f(h)}{2h^2} (x^2 + xh)$$

Вычисляя интеграл, получаем при соответствующих членах значения весов. Тогда квадратурная формула для этого случая примет вид

$$I = \frac{h}{3} [f(-h) + 4 \cdot f(0) + f(h)] + R$$

Она называется *формулой Симпсона* или *формулой парабол*.



Для вычисления интеграла на большом интервале  $[a, b]$  разобьем его на четное число малых интервалов  $2m = (b - a)/h$ .

Для отдельного интервала:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}), \quad 0 \leq i \leq m - 1$$

Суммируя по всем интервалам, получим составную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}) =$$
$$= \frac{h}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{i=1}^m f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m} \right) + R$$

$$R = \frac{h^4 (b-a)}{180} \cdot f^{IV}(\xi)$$



# Задание

Вычислить интеграл по формуле:

а) прямоугольника,

б) трапеций,

в) Симпсона.

# Кому какой интеграл?

1.  $\int_{-2}^4 (2x^2 - \sqrt{x+3}) dx$

2.  $\int_0^0 (5x^2 + x + 1) dx$

3.  $\int_{-3}^3 (3x^2 - \sqrt{x}) dx$

4.  $\int_1^4 (x^3 - \sqrt{x}) dx$

5.  $\int_1^4 (7 + x - 2x^2) dx$

6.  $\int_1^3 (7x^2 - 3\sqrt{x}) dx$

7.  $\int_2^5 (2x^2 - 2 - \sqrt{x}) dx$

8.  $\int_1^3 (5x^2 + \sqrt{x}) dx$

9.  $\int_{-2}^2 (x^3 + 1) dx$

10.  $\int_1^4 (2x^2 + 1 - \sqrt{x}) dx$