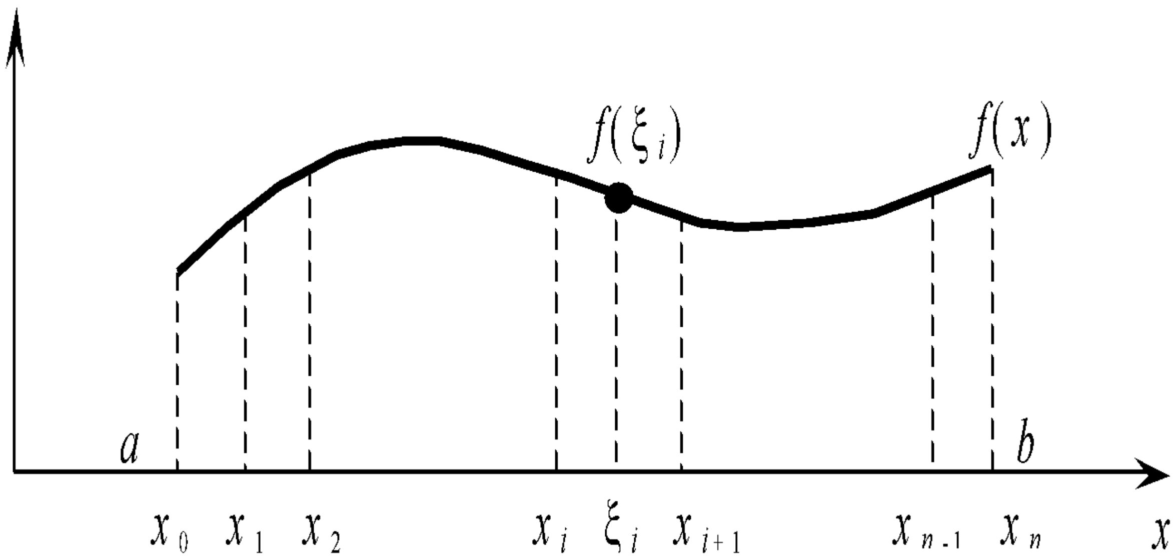
Лабораторная №7. ***Численное интегрирование***

Интегрирование

- Применения: при вычислении площадей и объемов, значений работы, произведенной некоторыми силами, и т.д.
- Геометрический смысл определенного интеграла – это площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$.



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Для некоторых классов аналитически заданных функций $f(x)$, определенный интеграл можно вычислить непосредственно, т.е. найти первообразную и воспользоваться **формулой Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

На практике это случается редко. Чаще всего: а) не удается выразить первообразную $F(x)$ через элементарные функции, б) не всегда ответ удобен для использования, в) иногда значения $f(x)$ заданы лишь в табличной форме.

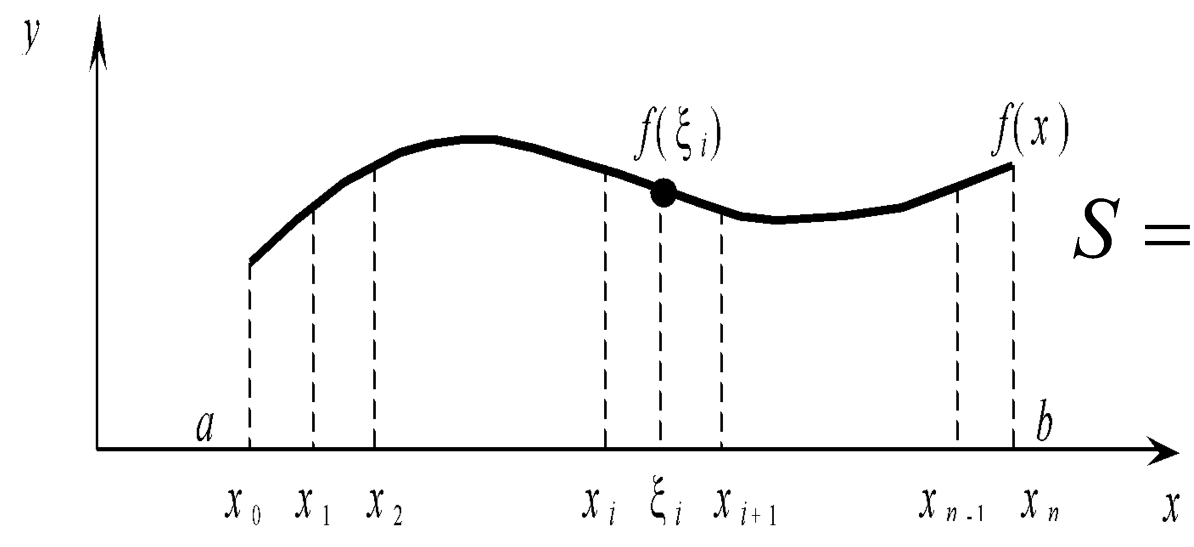
Численный подход

Поэтому для решения поставленной задачи приходится использовать **методы численного интегрирования**, общая суть которых состоит в *замене подынтегральной функции на такую аппроксимирующую функцию,* чтобы интеграл от нее можно было легко найти в элементарных функциях. Чаще всего в качестве аппроксимирующих функций берут некоторые интерполяционные многочлены.

Основная идея численного интегрирования заложена уже в известном *определении интеграла по Риману*

Интеграл по Риману

Пусть вещественная функция $f(x)$ определена и ограничена на интервале $[a, b]$. Разобьем его на n произвольных частичных интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Выберем в каждом частичном интервале произвольную точку ξ, $x_i \le \xi \le x_{i+1}$, и составим так называемую *интегральную сумму*



$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Если предел S при стремлении длины наибольшего частичного интервала к нулю существует для произвольных ξ_i, то его называют *интегралом Римана* от функции $f(x)$:

$$I = \lim_{\max|x_{i+1}-x_i|\to 0} S$$

На практике нельзя взять бесконечно малые длины отрезков. Но *если взять их достаточно малыми, то искомый интеграл можно приблизительно заменить интегральной суммой*. По существу, в этом и состоит численное интегрирование.

Формулы численного интегрирования

Существующие на практике формулы численного интегрирования, по существу, отличаются от интегральной суммы только:

1) способами разбиения интервала, т. е. выбором точек x_i, ξ_i;
2) методами ускорения сходимости суммы к точному значению;
3) оценкой погрешности.

Квадратурная формула

Представим интегральную сумму в более общем виде. Заменим коэффициенты $(x_{i+1} - x_i)$ в ней некоторыми числами q_i, не зависящими от $f(x)$. Тогда

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i)$$

где точки $a \le \xi_i \le b$ называются узлами метода, а числа q_i – весами узлов.

Интеграл тогда следует записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R$$

Эта формула называется ***квадратурной формулой***, а *R* – погрешностью (остаточным членом) квадратурной формулы.

Её смысл фактически состоит в замене функции некоторым интерполяционным многочленом.

При рассмотрении конкретного метода численного интегрирования соответствующая ему *квадратурная формула считается заданной,* если указано, как выбирать узлы ξ_i и соответствующие веса q_i, а также дана методика оценки погрешности R для определенных классов функций.

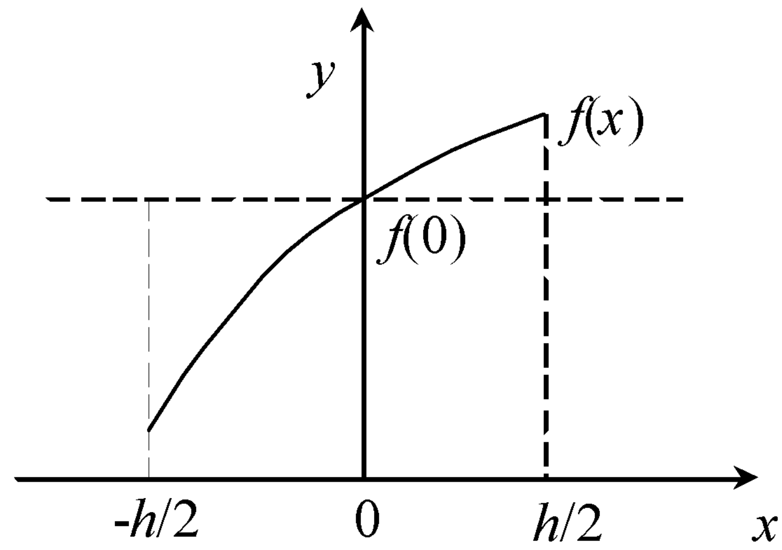
При реализации квадратурных формул в подавляющем большинстве случаев используется равномерная сетка с произвольным числом интерполяционных узлов, что определяет требования к степени используемых интерполяционных многочленов.

Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно интервал интегрирования разбивают на отдельные небольшие участки, применяют рабочие формулы невысокого порядка на каждом участке и потом складывают результаты расчета и оценочные погрешности.

Приведем простейшие квадратурные формулы, сначала для отдельного малого интервала $[x_i, x_{i+1}]$, а затем для всего интервала интегрирования $[a, b]$ в виде так называемых *составных квадратурных формул*.

Формула прямоугольников

Рассмотрим малый интервал [–*h*/2, *h*/2]. Предположим, что подынтегральная функция *f*(*x*) дважды непрерывно дифференцируема. Тогда квадратурная формула запишется в виде:

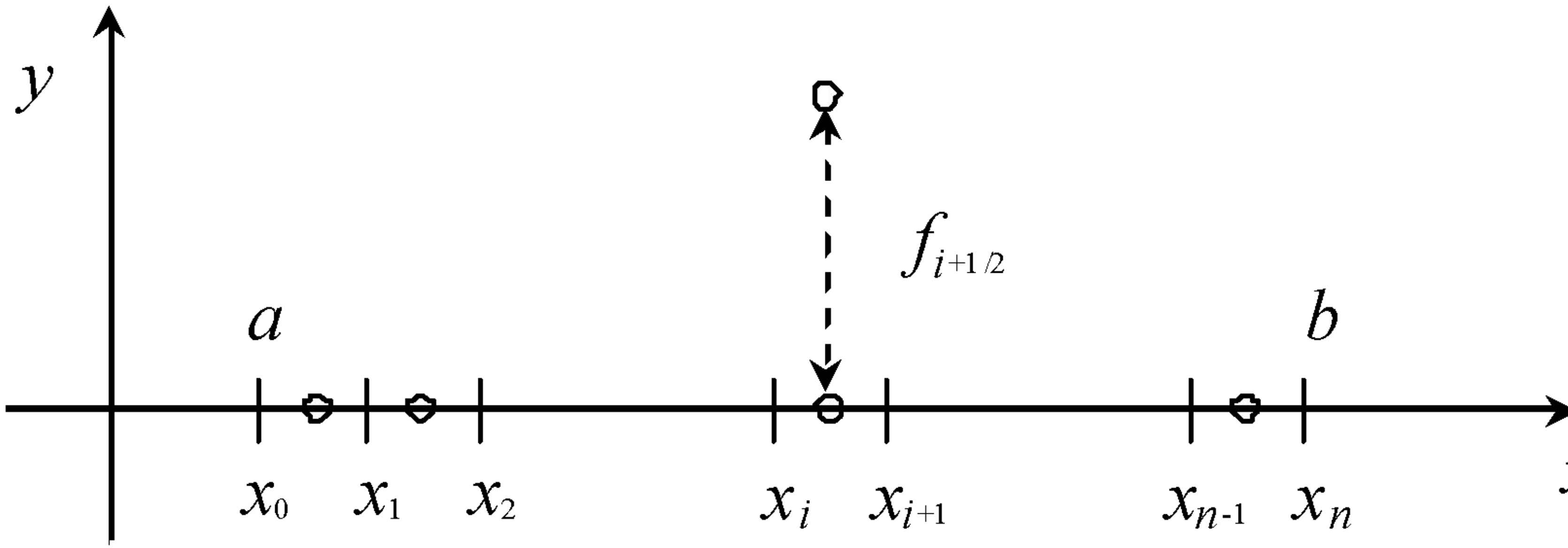


$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = h \cdot f(0) + R$$

Здесь взят один узел $\xi = 0$ и соответствующий вес $q = h$, что соответствует аппроксимации функции многочленом нулевой степени (константой). Полученная квадратурная формула называется *формулой прямоугольников* для одного шага или формулой средних:

$$I = h \cdot f(0)$$

Название определяется тем, что интеграл функции на участке $[-h/2,\ h/2]$ *заменяется площадью прямоугольника* с высотой $f(0)$ и основанием h.



Пользоваться формулой прямоугольников можно только при достаточно малых *h*, поскольку ошибка при увеличении длины интервала *квадратично нарастает*. Поэтому если нужно вычислить интеграл на достаточно большом интервале [*a*, *b*], следует сначала разбить его на большое число малых участков длиной *h*, а затем результаты для этих участков просуммировать.

Тогда для *i*-го интервала будем иметь:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

где $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $0 \le i \le n-1$. Суммирование по всем интервалам приводит к **составной формуле прямоугольников**:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} + R$$

где погрешность можно оценить как ($\xi \in [a,b]$)

$$R = \frac{h^2\left(b-a\right)}{24} \cdot f''\left(\xi\right)$$

Формула трапеций

Пусть на малом интервале $[0, h]$ задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x) \in C^2[0,h]$. Квадратурное соотношение можно записать в виде

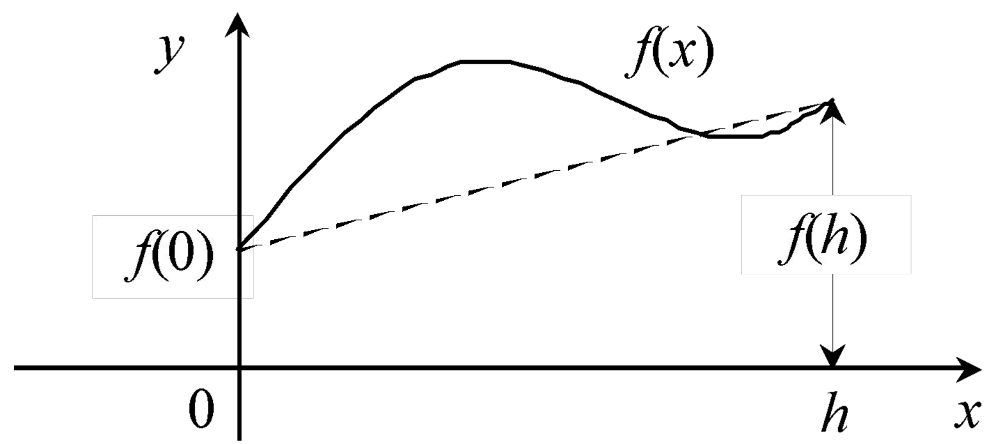
$$\int_0^h f(x)dx = h\frac{f(0)+f(h)}{2} + R$$

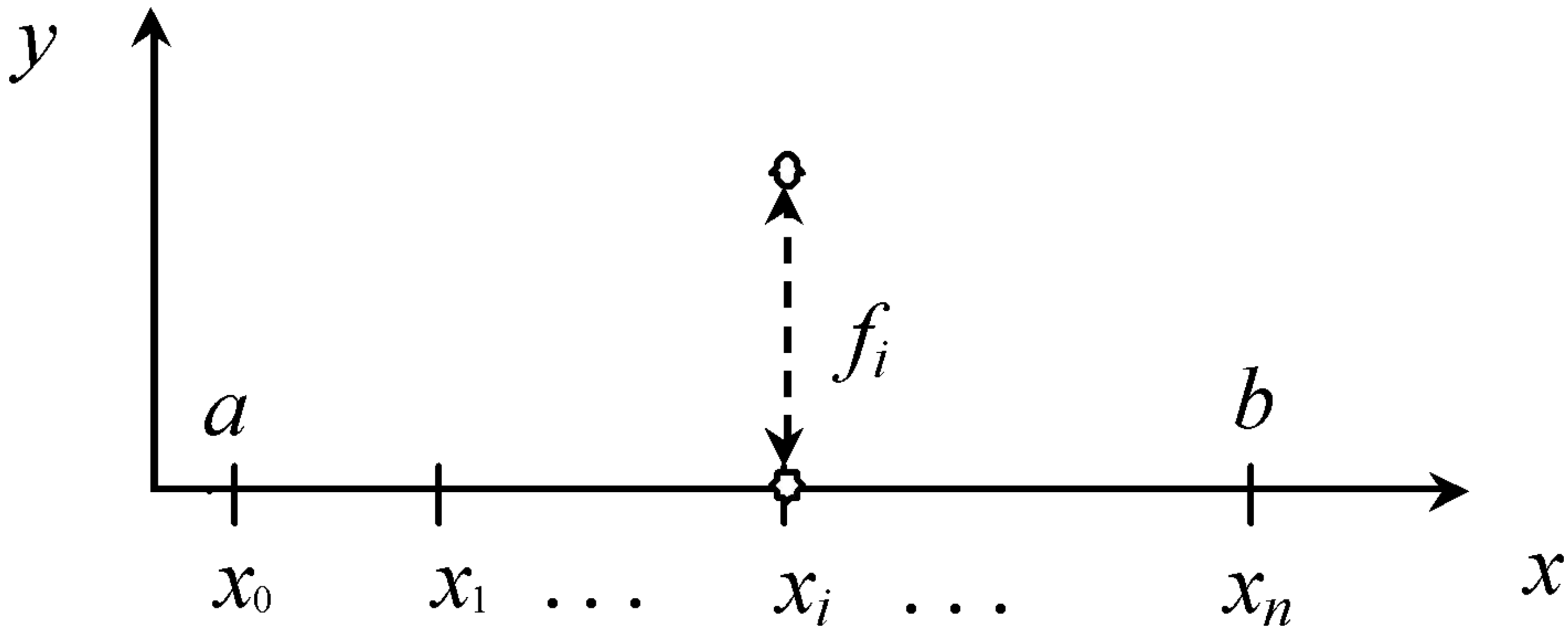
где взяты два узла $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = h$ и соответствующие веса $q_0 = q_1 = h/2$, что соответствует аппроксимации функции многочленом первой степени (линейной функцией).

Получаемая квадратурная формула называется *формулой трапеций* для одного шага:

$$I = h\frac{f(0) + f(h)}{2}$$

Название связано с тем, что интеграл на участке [0, *h*] заменяется площадью трапеции с основаниями *f*(0), *f*(*h*) и высотой *h*.





Получим формулу трапеций для полного интервала [a,b], состоящего из большого числа малых. Обозначим значение функции $f(x)$ в узлах x_i как $f_i=f(x_i)$.

Тогда по аналогии с формулой для прямоугольников получим **составную квадратурную формулу трапеций**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + ... + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) + R =$$

$$= \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) + R$$

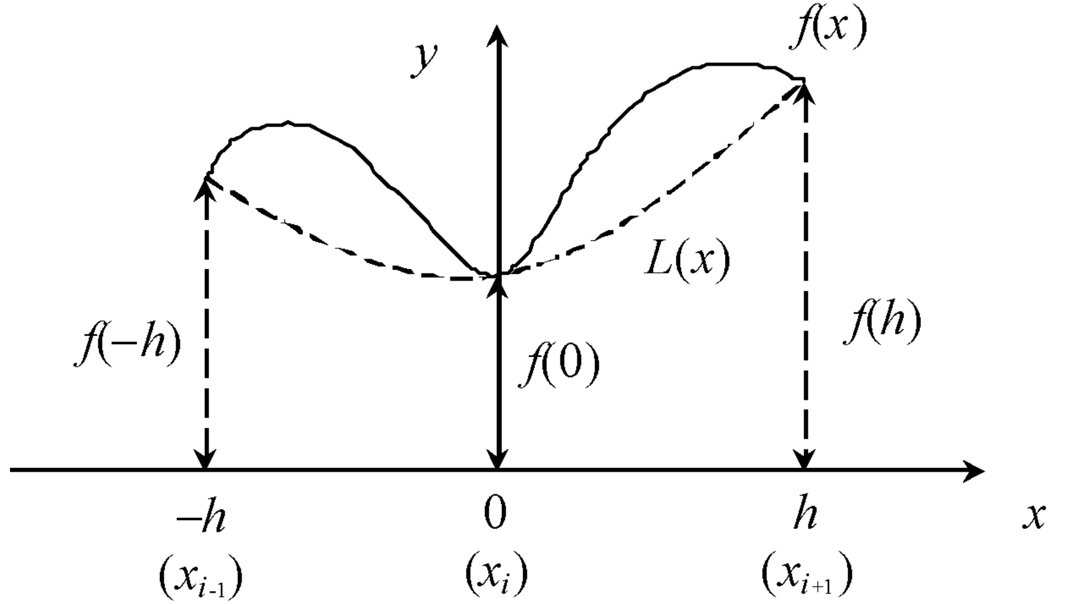
$$R = -\frac{h^2(b-a)}{12} \cdot f''(\xi)$$

Формула парабол (Симпсона)

Возьмем малый интервал $[-h, h]$, на котором определена четырежды дифференцируемая функция. В квадратурном соотношении возьмем три узла $\xi_0 = x_{i-1} = -h$, $\xi_1 = x_i = 0$, $\xi_2 = x_{i+1} = h$.

Соответствующие весовые коэффициенты получим из аппроксимации $f(x)$ параболой, построенной на точках $(-h, f(-h))$, $(0, f(0))$, $(h, f(h))$ в виде многочлена второй степени:

$$y = ax^2 + bx + c$$



Для получения коэффициентов *a*, *b* и *c* построим многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через выбранные точки:

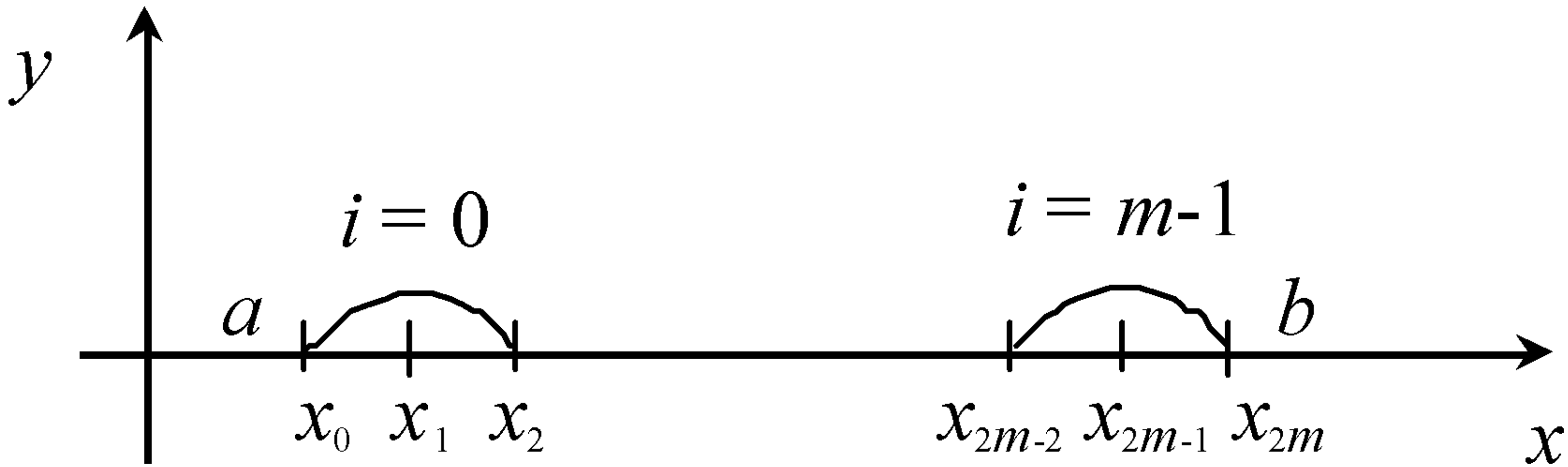
$$L_2(x) = f(-h)\frac{x(x-h)}{-h(-h-h)} + f(0)\frac{(x+h)(x-h)}{h(-h)} + f(h)\frac{x(x+h)}{h(h-(-h))} =$$

$$= \frac{f(-h)}{2h^2}(x^2 - xh) - \frac{f(0)}{h^2}(x^2 - h^2) + \frac{f(h)}{2h^2}(x^2 + xh)$$

Вычисляя интеграл, получаем при соответствующих членах значения весов. Тогда квадратурная формула для этого случая примет вид

$$I = \frac{h}{3}[f(-h) + 4 \cdot f(0) + f(h)] + R$$

Она называется *формулой Симпсона* или формулой парабол.



Для вычисления интеграла на большом интервале [*a*, *b*] разобьем его на четное число малых интервалов $2m = (b - a)/h$.

Для отдельного интервала:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right), \qquad 0 \le i \le m-1$$

Суммируя по всем интервалам, получим составную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 +$$

$$\ldots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m}\right) + R$$

$$R = \frac{h^4(b-a)}{180} \cdot f^{IV}(\xi)$$

Задание

Вычислить интеграл по формуле:
а) прямоугольника,
б) трапеций,
в) Симпсона.

Кому какой интеграл?

1. $\int_{-2}^{4}(2x^2 - \sqrt{x+3})dx$

2. $\int_{-3}^{0}(5x^2 + x + 1)dx$

3. $\int_{1}^{3}(3x^2 - \sqrt{x})dx$

4. $\int_{1}^{4}(x^3 - \sqrt{x})dx$

5. $\int_{1}^{4}(7 + x - 2x^2)dx$

6. $\int_{1}^{3}(7x^2 - 3\sqrt{x})dx$

7. $\int_{2}^{5}(2x^2 - 2 - \sqrt{x})dx$

8. $\int_{1}^{3}(5x^2 + \sqrt{x})dx$

9. $\int_{-2}^{2}(x^3 + 1)dx$

10. $\int_{1}^{4}(2x^2 + 1 - \sqrt{x})dx$