М-1

Аксиомы стереометрии

Урок-лекция в 10-м классе

Школьный курс геометрии состоит из двух частей:

- ПЛАНИМЕТРИИ
- СТЕРЕОМЕТРИИ

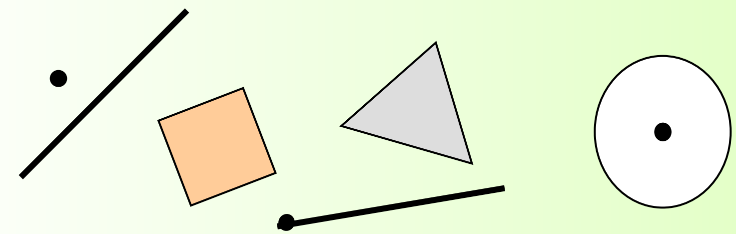
«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – *измерять* и лат. **planum** – *плоская поверхность (плоскость)*

Школьный курс ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

7-9 классы

ГЕОМЕТРИЯ на плоскости

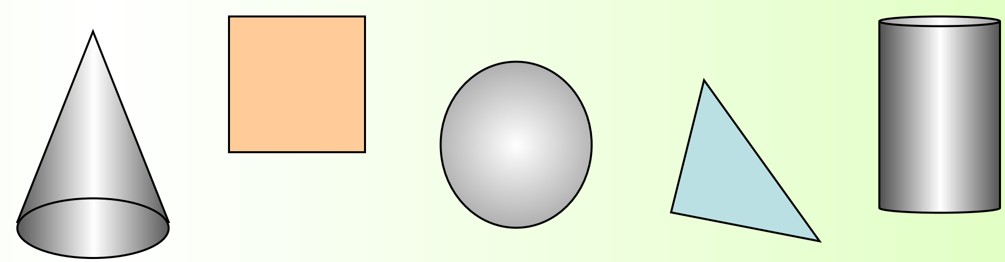


СТЕРЕОМЕТРИЯ

10-11 классы

ГЕОМЕТРИЯ в пространстве

«стереометрия» – от греч. **stereos** – *пространственный* (**stereon** – *объем*).

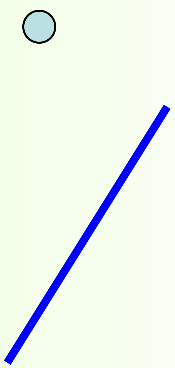


Планиметрия	Стереометрия
Изучает свойства геометрических фигур на плоскости	**Изучает свойства фигур в пространстве**
В переводе с греческого слово ***«геометрия»*** *означает «землемерие»* ***«гео»*** *– по-гречески земля,* ***«метрео»*** *– мерить* ***«планиметрия»*** *–от греч.* ***metreo*** *– измерять и лат.* ***planum*** *– плоская поверхность (плоскость)*	*Слово* ***«стереометрия»*** *происходит от греческих слов* ***«стереос»*** *объемный, пространственный,* ***«метрео»*** *– мерить*

Основные фигуры

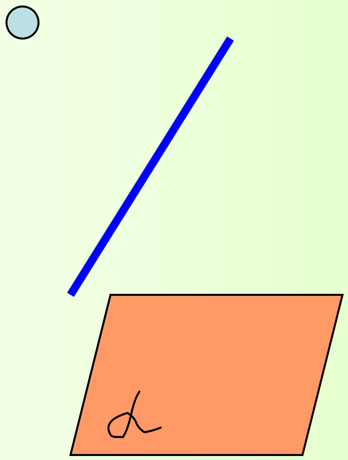
Планиметрии (на плоскости)

- Точка
- Прямая



Стереометрии (в пространстве)

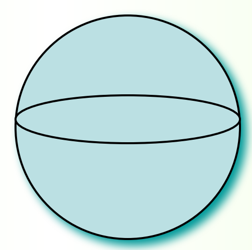
- Точка
- Прямая
- Плоскость

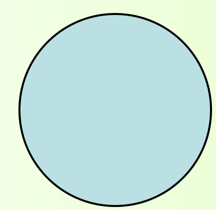


Плоскость представляет с собой геометрическую фигуру простирающуюся неограниченно во все стороны.

Наряду с точками, прямыми, плоскостями в стереометрии рассматриваются геометрические тела, изучаются их свойства, вычисляются площади их поверхностей,
а также вычисляются объёмы тел.


куб

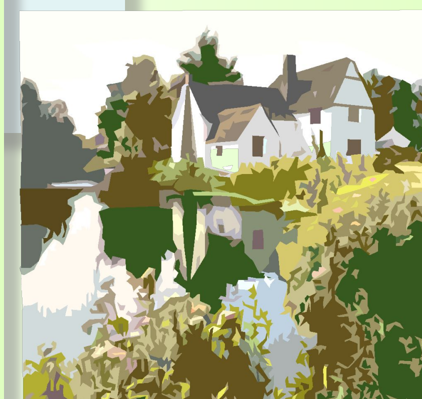

шар

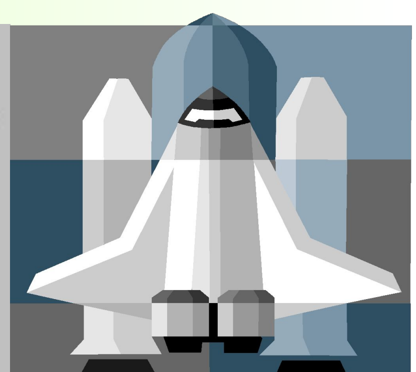

цилиндр

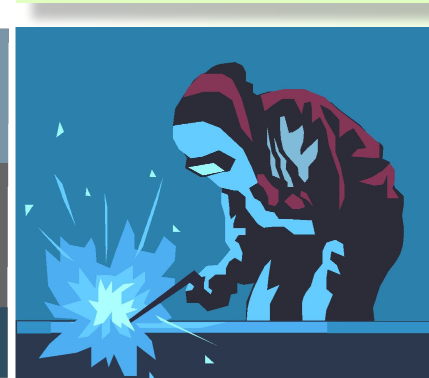
Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна

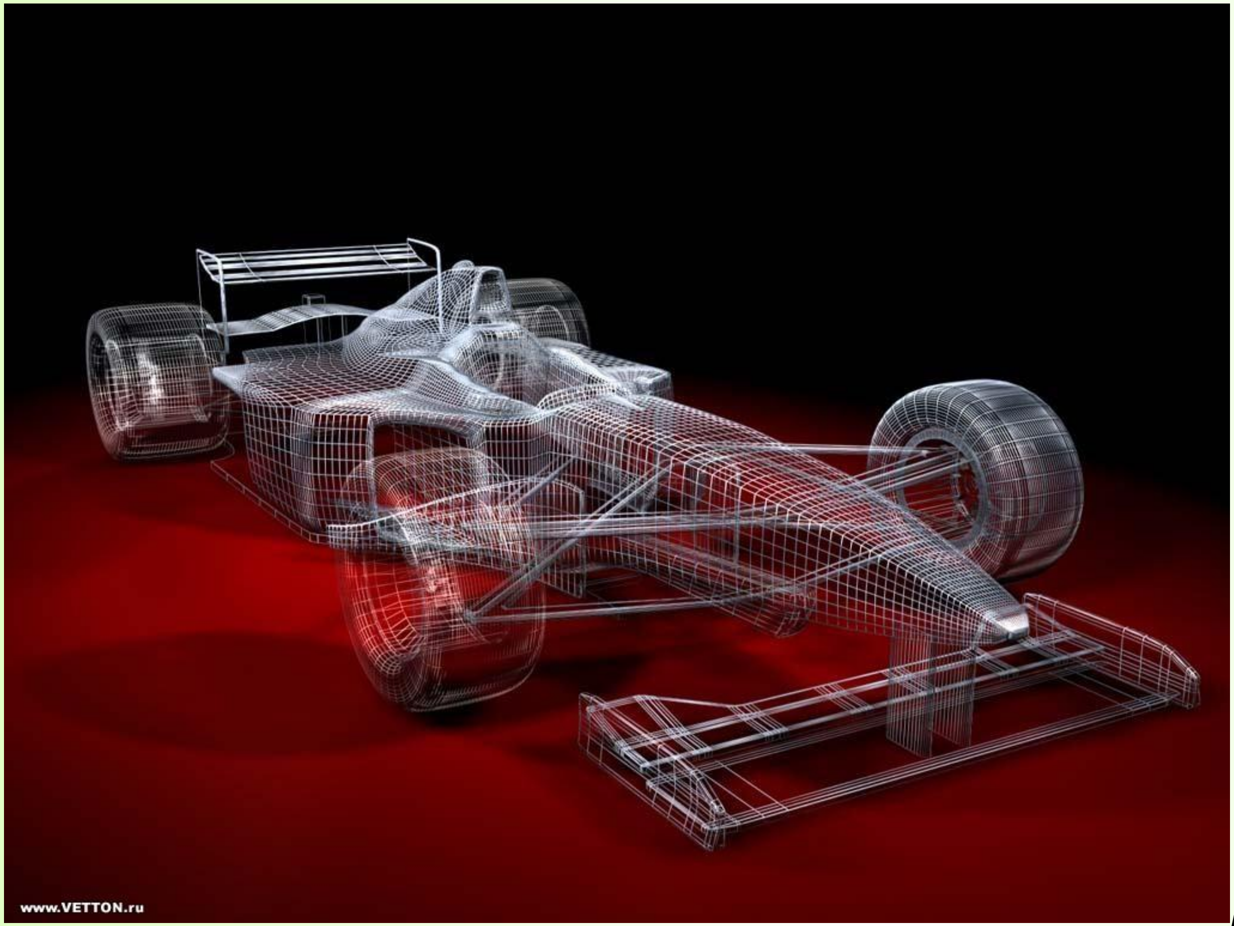
- технику,
- инженеру,
- рабочему,
- архитектору,
- модельеру …







Стереометрия широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.



При проектировании этой машины важно было получить такую форму, чтобы при движении сопротивление воздуха было минимально.

Оперный театр в Сиднее

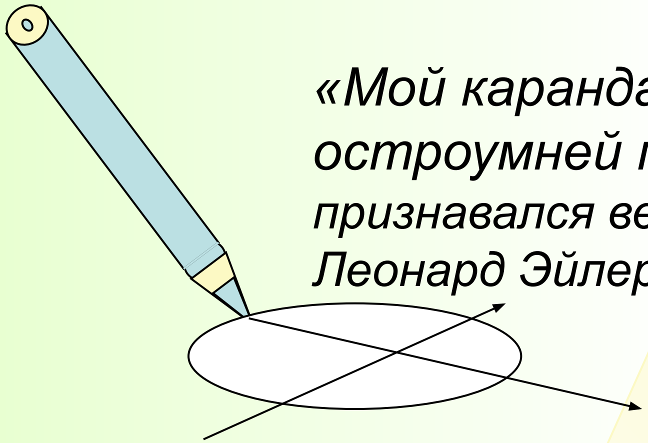
Датский архитектор Йорн Утцон был вдохновлён видом парусов.

Эйфелева башня
Париж, Марсово поле

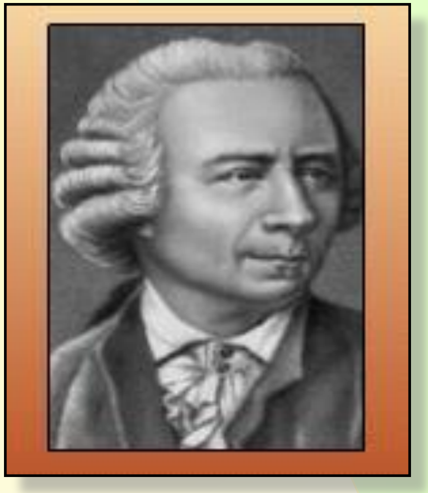
Инженер Гюстав Эйфель нашел необычную форму для своего проекта. Эйфелева башня весьма устройчива: сильный ветер отклоняет ее вершину всего лишь на 10-12 см. В жару от неравномерного нагревания солнечными лучами она может отклониться на 18 см.

При изучении стереометрии мы будем пользоваться рисунками, чертежами: они помогут нам понять, представить, проиллюстрировать содержание того или иного факта.

Поэтому прежде, чем приступить к пониманию сущности аксиомы, определения, доказательству теоремы, решению геометрической задачи, постарайтесь наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь .



«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).



ВЫВОД:

Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии

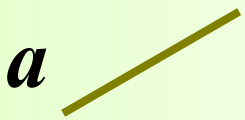
ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ В 10-м КЛАССЕ

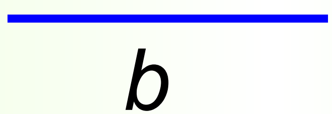
Учебный материал
10 класса
по геометрии

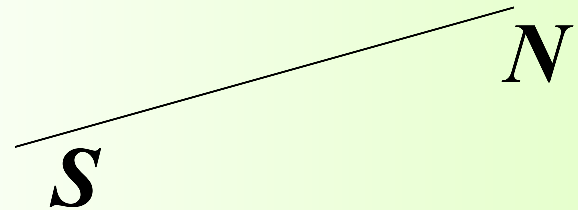
- Аксиомы стереометрии
- Параллельность прямых и плоскостей
- Перпендикулярность прямых и плоскостей
- Многогранники

Точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, D, E, K,…

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами *a, b, c, d, e, k*,…

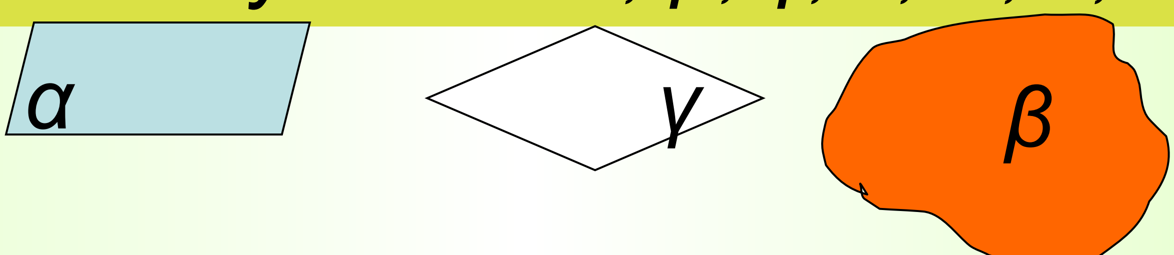






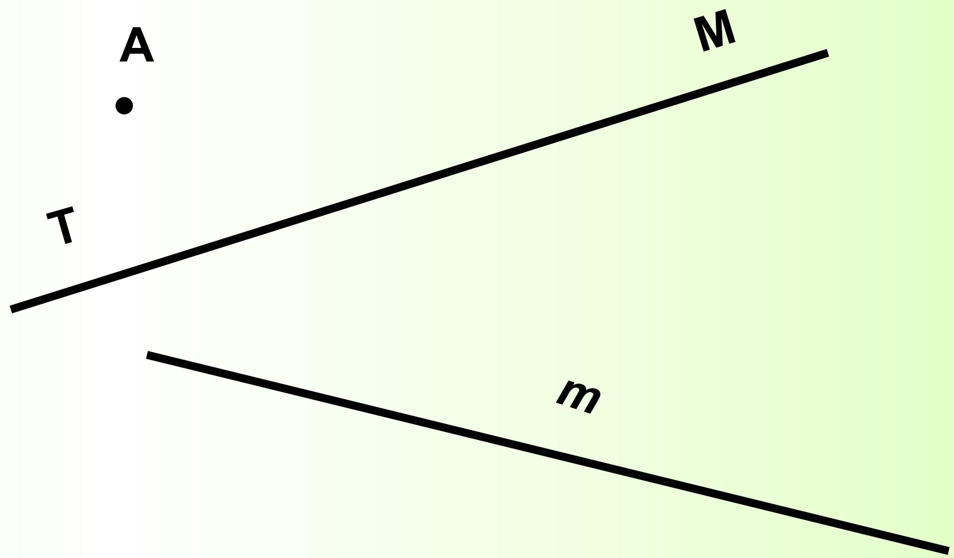
Или обозначаем прямую двумя прописными латинскими буквами.

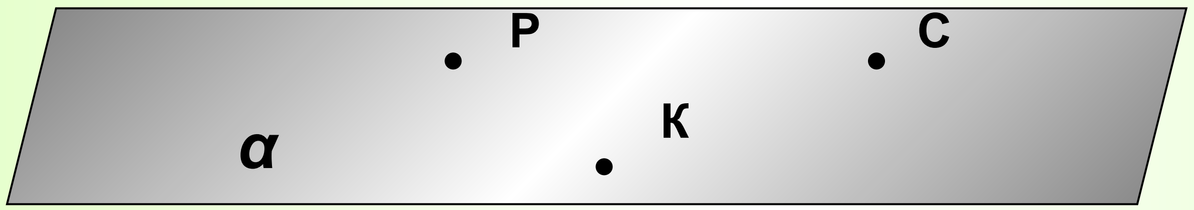
Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ, λ, π,ω,…



Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние





α = (РКС)

А$\notin$***α***, *КС* $\subset$ ***α***, *Р* $\in$ ***α*** , РК **= *2 см***

Аксиомы стереометрии

Слово «***аксиома***» греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

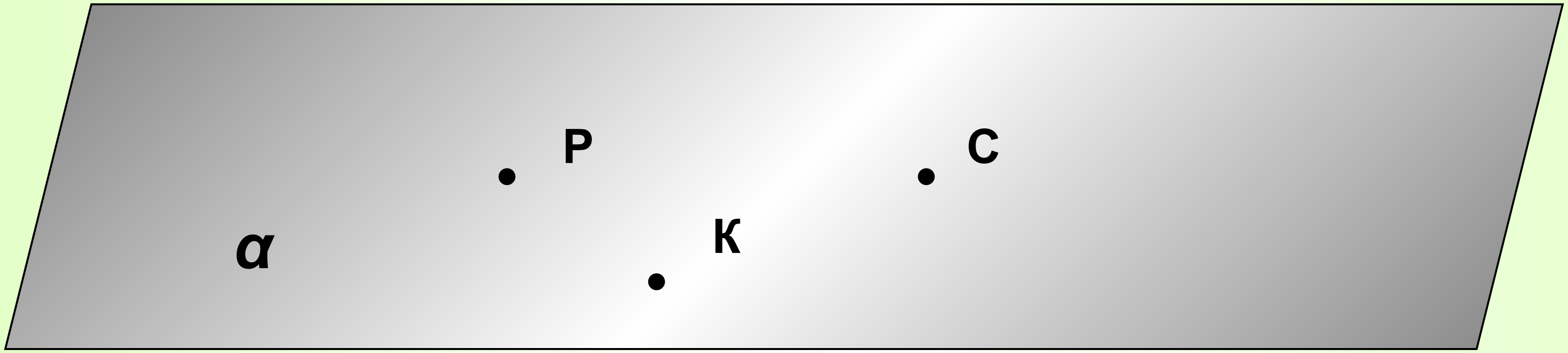
(от греч. axíõma – принятие положения)

Основные свойства точек, прямых и плоскостей выражены в аксиомах

Аксиомы стереометрии

А-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой проходит плоскость, и притом только одна



α = (PKC)

A_1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

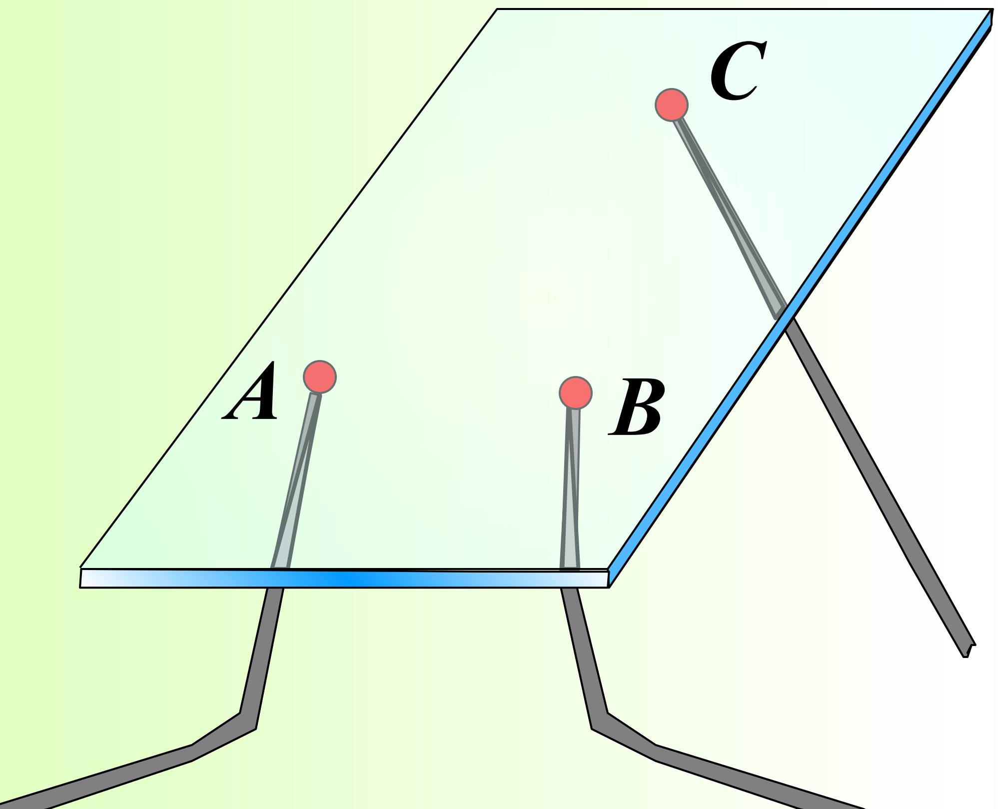
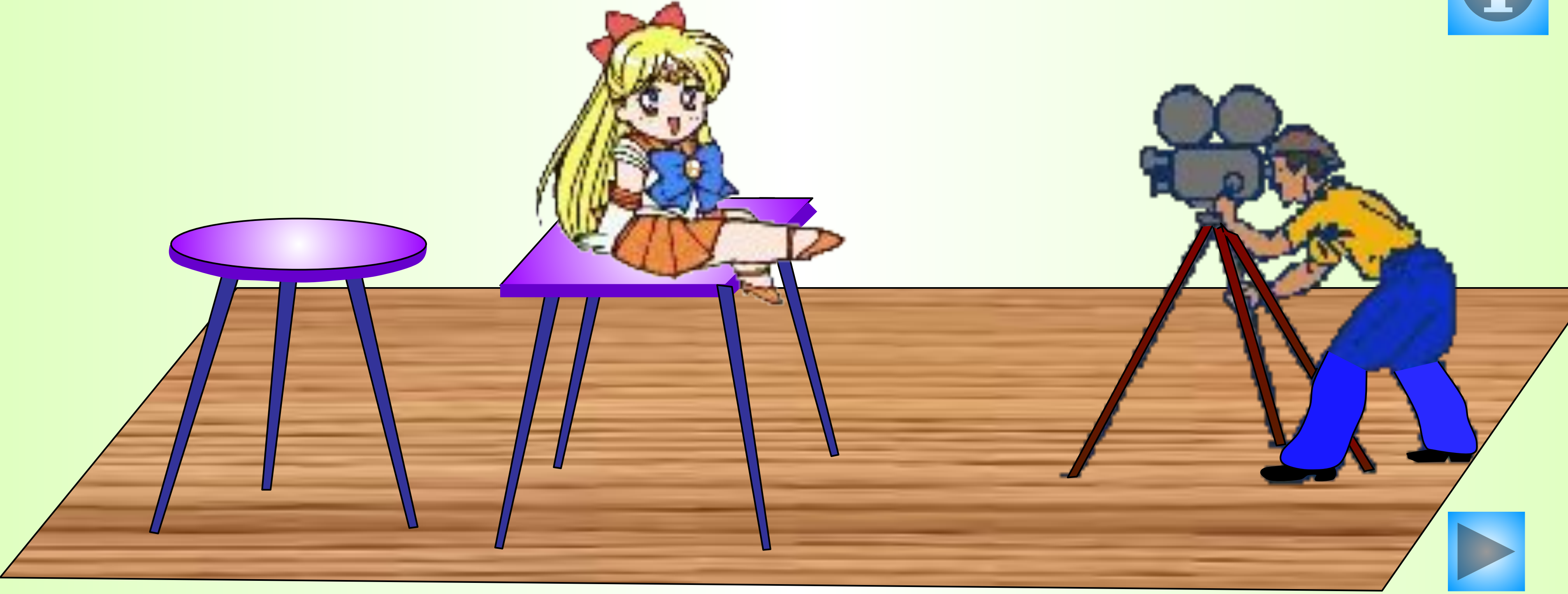


Иллюстрация к аксиоме A_1: стеклянная пластинка плотно ляжет на три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

Иллюстрации к аксиоме A_1 из жизни.

Табурет с тремя ножками всегда идеально встанет на пол и не будет качаться. У табурета с четырьмя ножками бывают проблемы с устойчивостью, если ножки стула не одинаковые по длине. Табурет качается, т. е. опирается на три ножки, а четвертая ножка (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

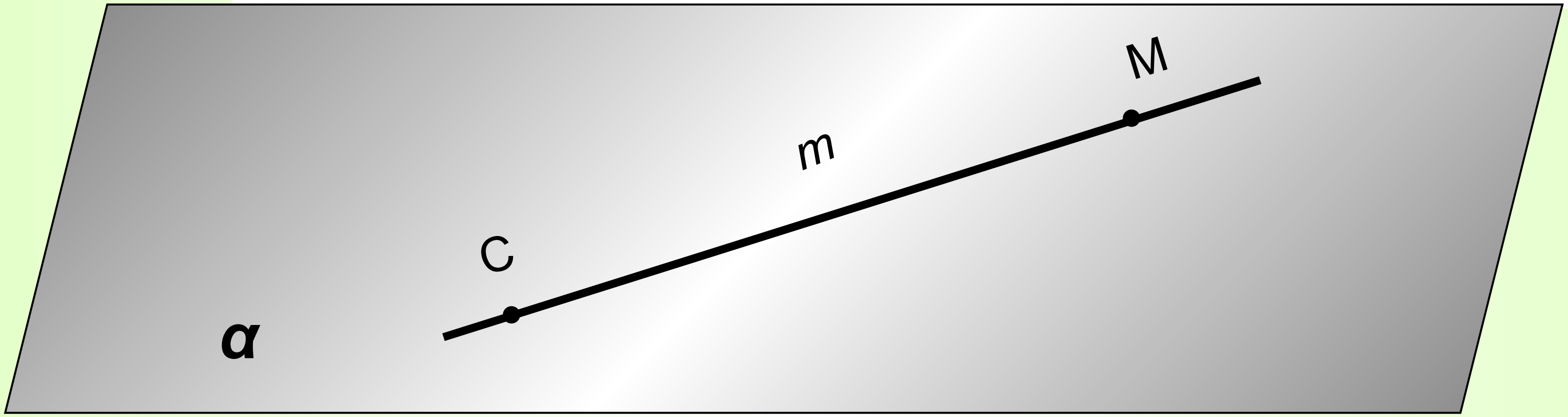
Для видеокамеры, фотосъемки и для других приборов часто используют штативы – треногу. Три ножки штатива устойчиво расположатся на любом полу в помещениях, на асфальте или прямо на газоне на улице, на песке на пляже или в траве в лесу. Три ножки штатива всегда найдут плоскость.



Аксиомы стереометрии

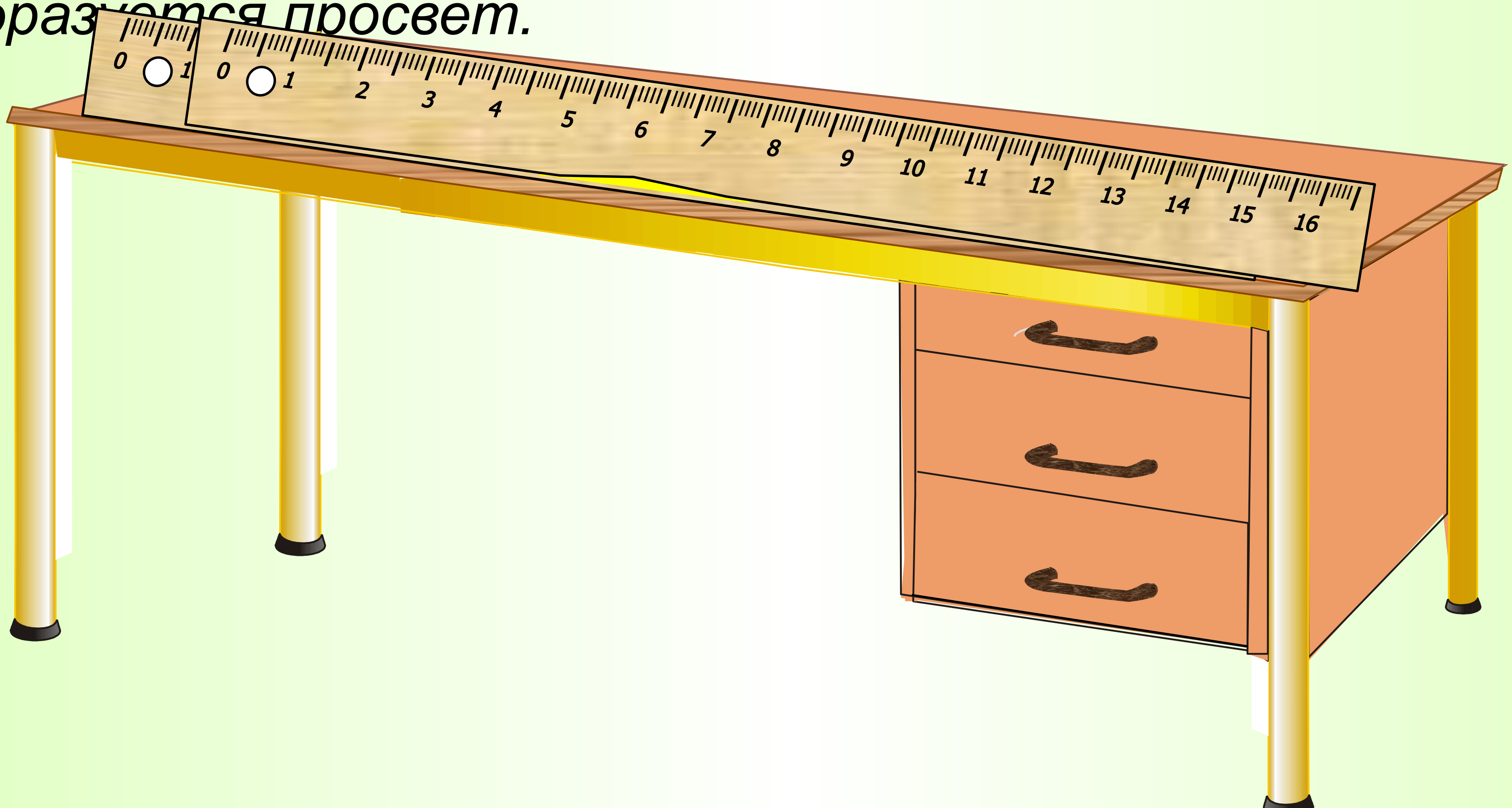
А-2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



Если $M, C \in \alpha$ $M, C \in m,$ **то** $m \subset \alpha$

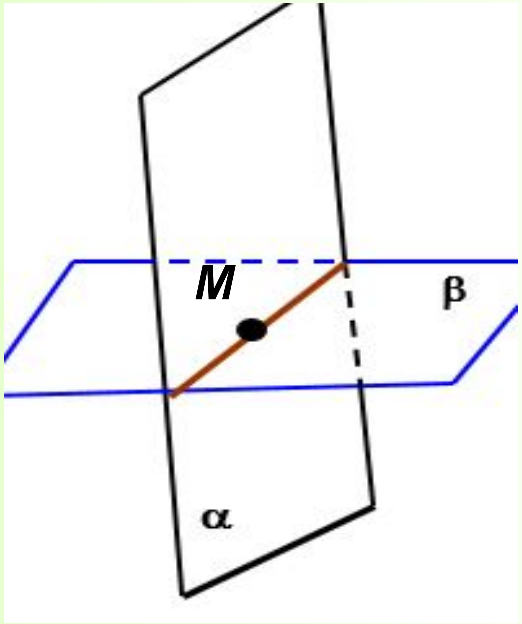
Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки. Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.



Аксиомы стереометрии

А-3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$M \in \alpha$, $M \in \beta$, $M \in \boldsymbol{m}$

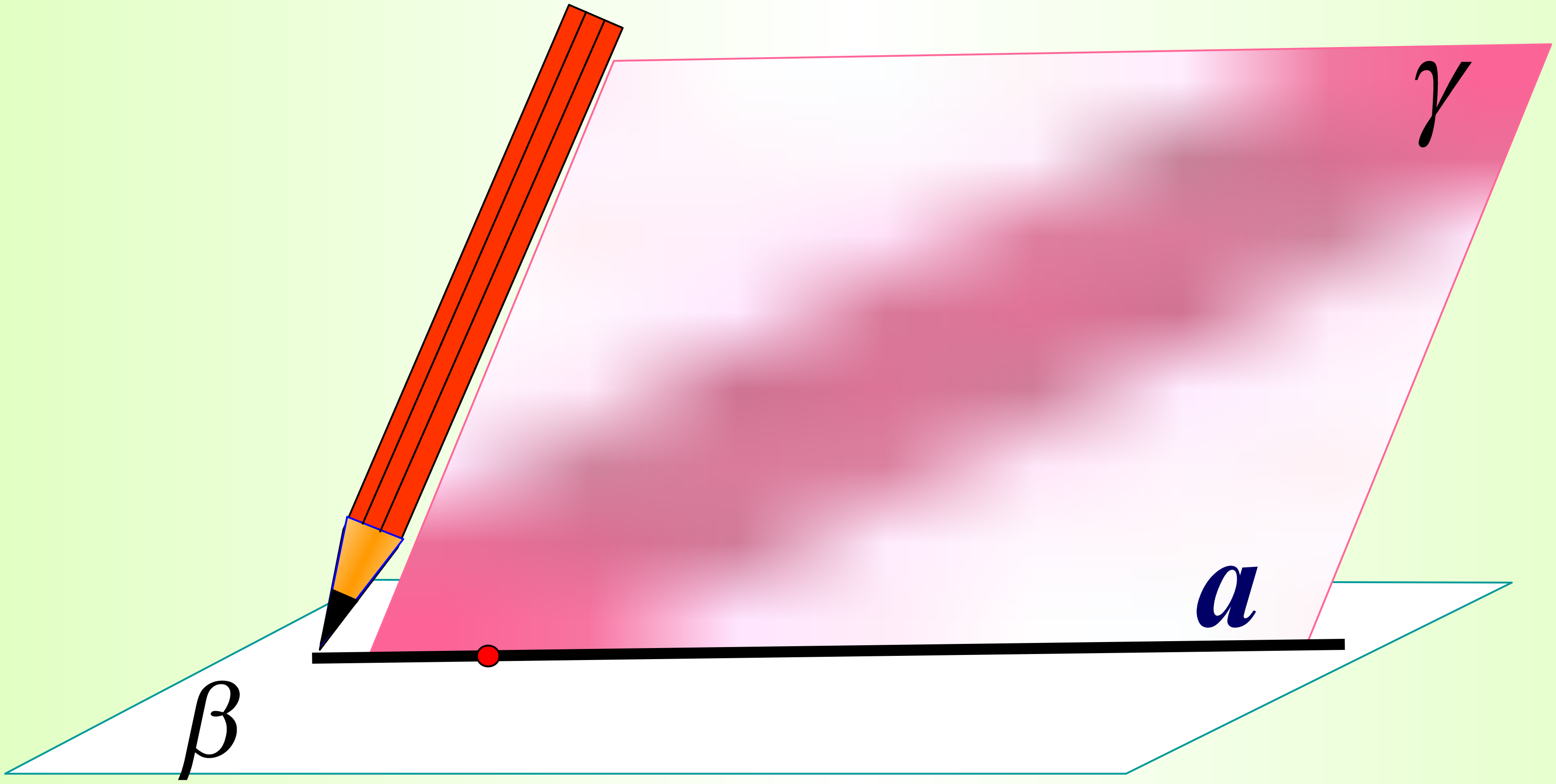
$\Downarrow$

$\boldsymbol{m} \in \alpha$, $\boldsymbol{m} \in \beta$

$\Downarrow$

$\alpha \cap \beta = \boldsymbol{m}$

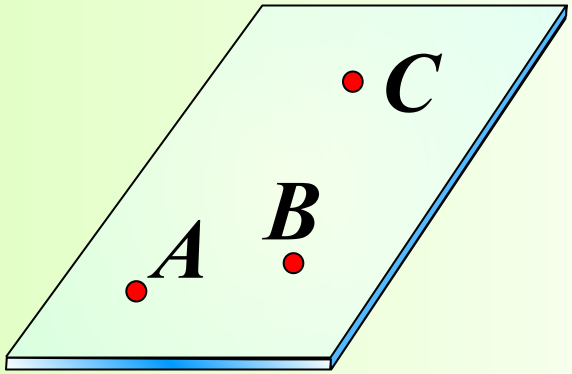
A_3. **Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.**



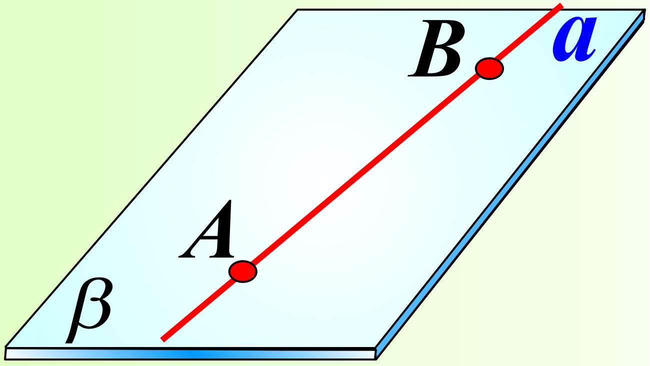
В этом случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой.

$$\beta \cap \gamma = a$$

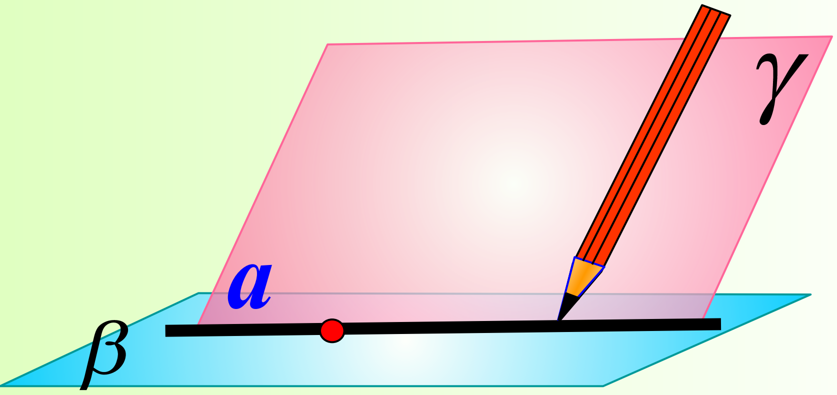
Наглядной иллюстрацией аксиомы $А_3$ является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.



A_1.
Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



A_2.
Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

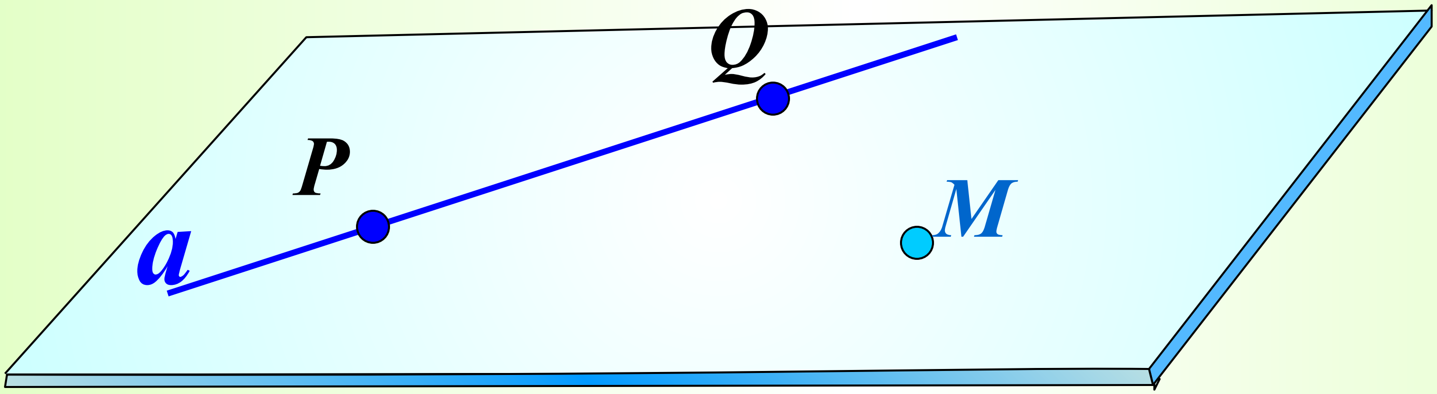


A_3.
Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Некоторые следствия из аксиом.

Теорема

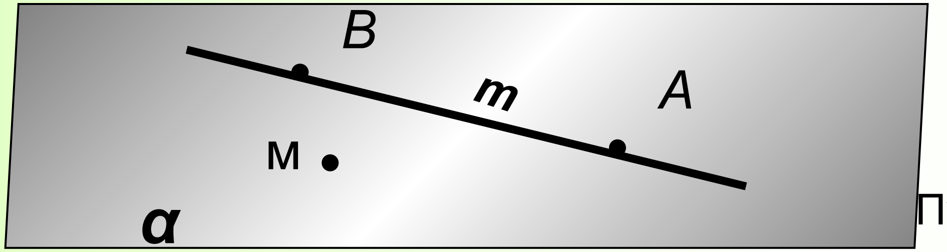
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



<u>Дано</u>: M∉*m*

<u>Доказательство</u>

Пусть точки ***A, B* ∈ *m.***

- Так как **M∉*m***, то точки ***A, B*** *и* ***M*** не принадлежат одной прямой.
  По А-1 через точки ***A, B*** *и* ***M*** проходит только одна плоскость — плоскость ***(ABM)***,
  Обозначим её ***α.*** Прямая ***m*** имеет с ней две общие точки — точки ***A*** и ***B***, следовательно, по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости ***α***..
  Таким образом, плоскость ***α*** проходит через прямую ***m*** и точку ***M*** и является искомой.

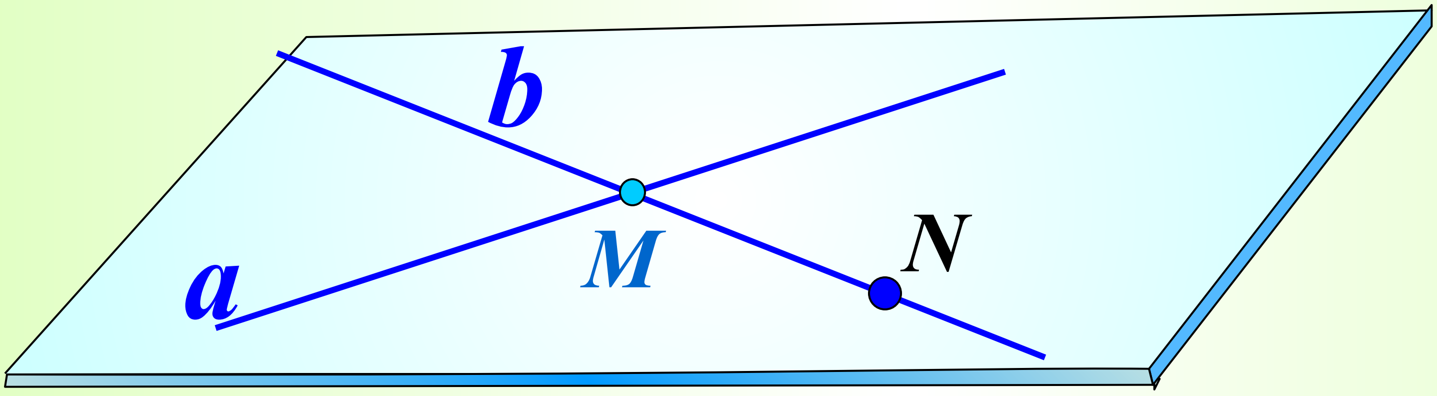
- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую ***m*** и точку ***M***, не существует.
  Предположим, что есть другая плоскость — ***β***, проходящая через прямую ***m*** и точку ***M***.
  Тогда плоскости ***α*** и ***β*** проходят через точки ***A***, ***B*** и ***M***, не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость ***α*** единственна.

- Теорема доказана

Некоторые следствия из аксиом.

Теорема

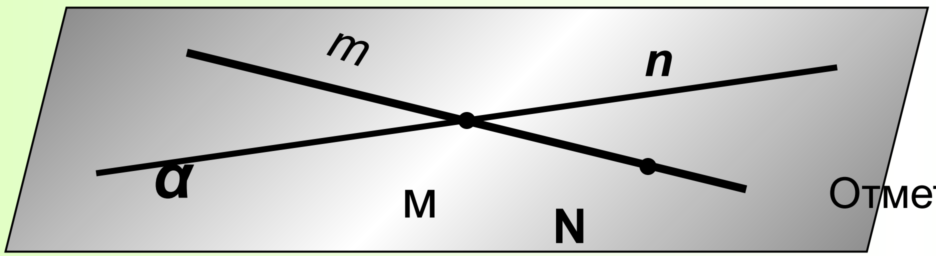
Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

Т-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



<u>**Дано**</u>: *m* ∩ *n* = ***M***

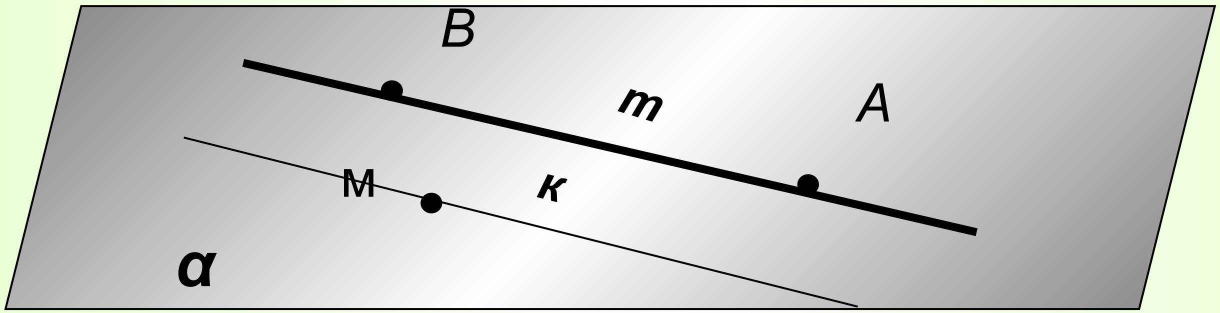
<u>**Доказательство**</u>

Отметим на прямой ***m*** произвольную точку **N,** отличную от **M.**

- Рассмотрим плоскость ***α*** **=(n, N).** Так как ***M∈ α*** и ***N∈α,*** то по А-2 ***m ⊂ α.*** Значит обе прямые ***m, n*** лежат в плоскости ***α*** и следовательно ***α,*** является искомой
- Докажем единственность плоскости ***α.*** Допустим, что есть другая, отличная от плоскости ***α*** и проходящая через прямые ***m*** и ***n,*** плоскость ***β.***
  Так как плоскость ***β*** проходит через прямую ***n*** и не принадлежащую ей точку ***N,*** то по Т-1 она совпадает с плоскостью ***α.*** Единственность плоскости ***α*** доказана.
- Теорема доказана

СЛЕДСТВИЕ ИЗ Т-1

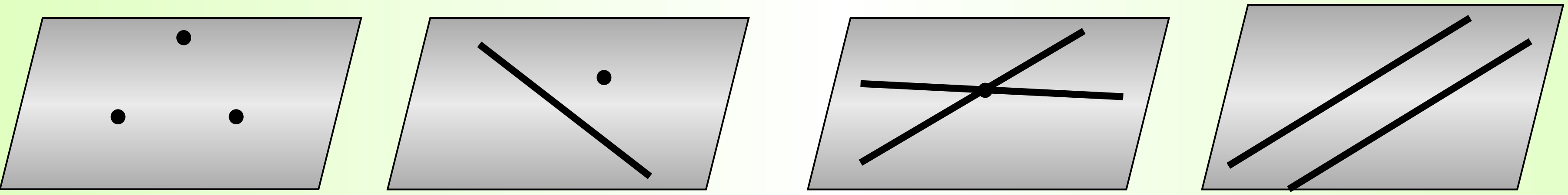
Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



ВЫВОД

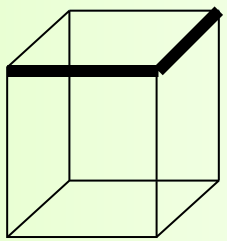
Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым

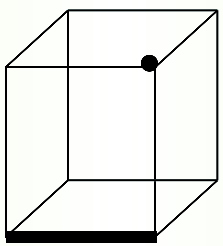


ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

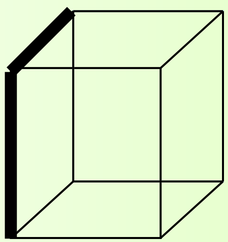
1. Сколько существует способов задания плоскости?
2. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



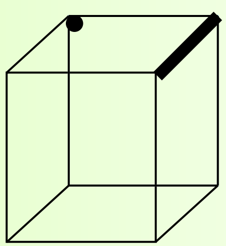
а)



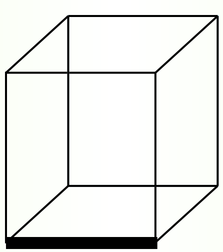
б)



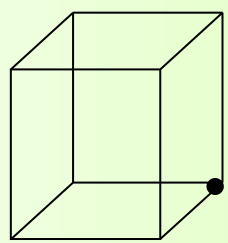
в)



г)



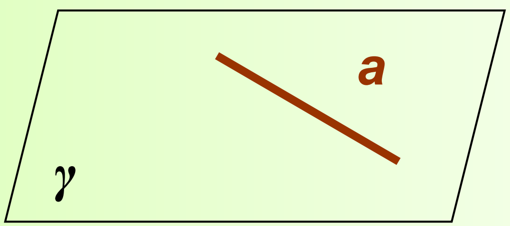
д)



е)

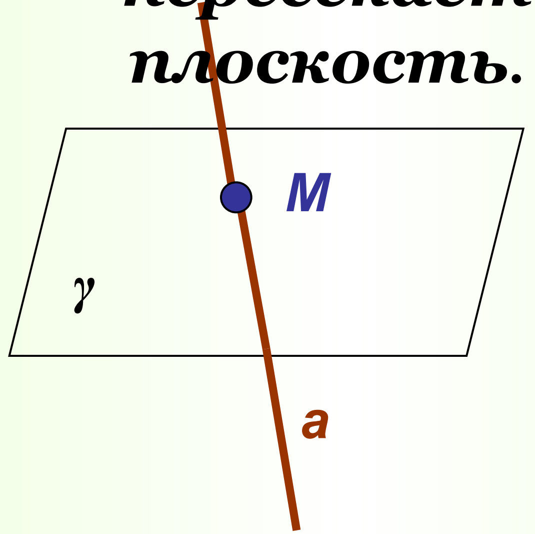
Взаимное расположение прямой и плоскости.

Прямая лежит в плоскости.



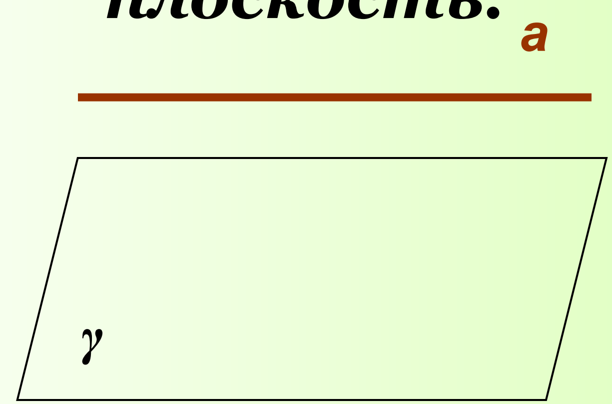
$a \subset \gamma$

Прямая пересекает плоскость.



$a \cap \gamma = M$

Прямая не пересекает плоскость.

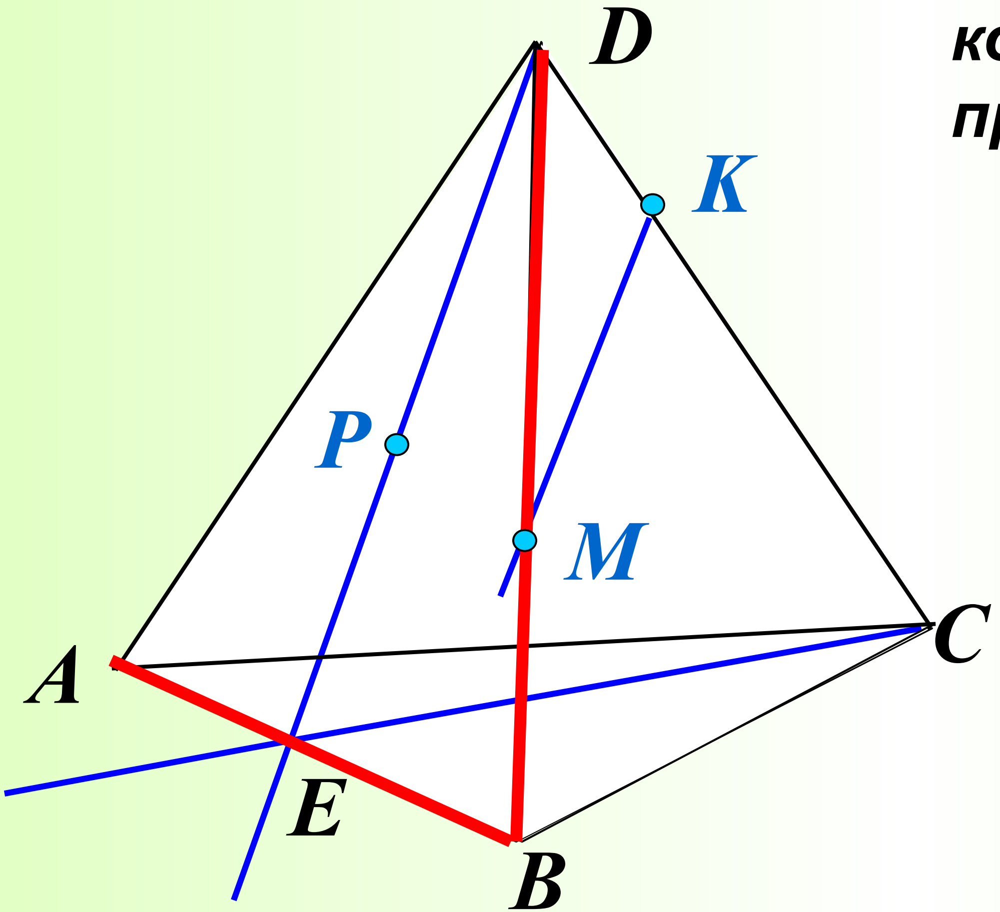


$a \not\subset \gamma$

Сколько общих точек в каждом случае?

A_2

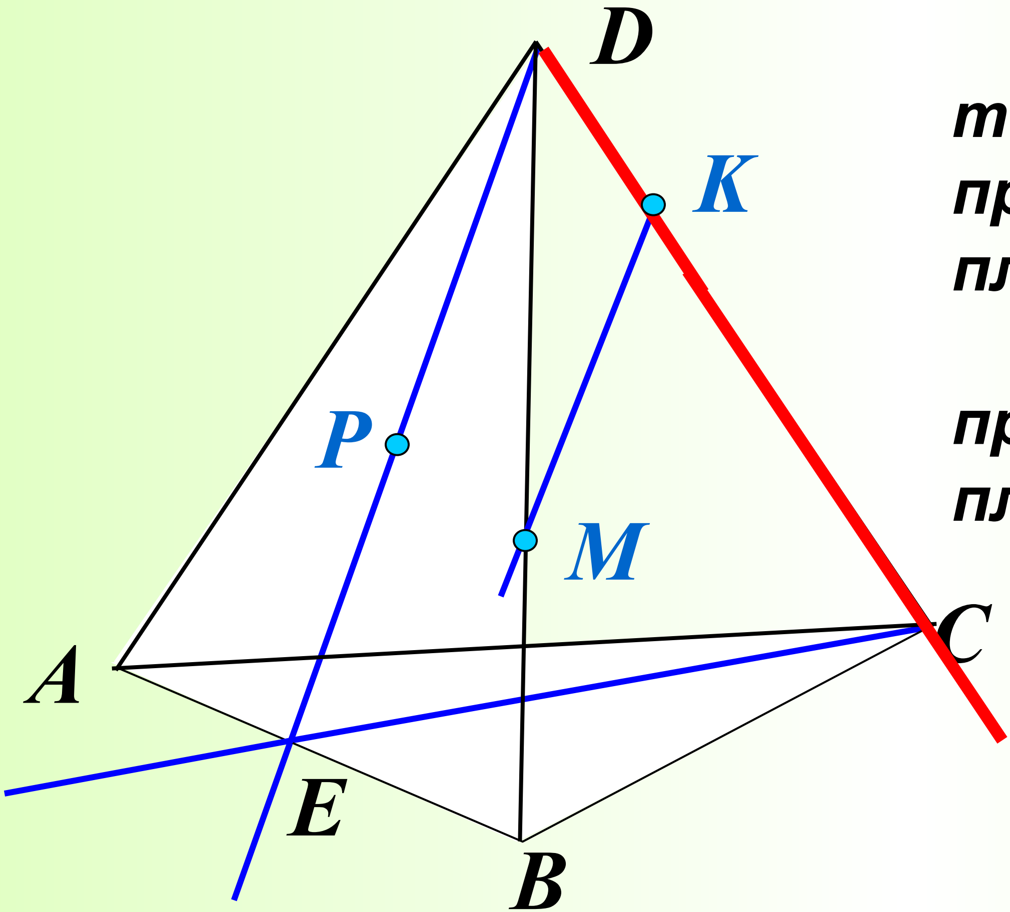
Тренировочные упражнения



Назовите плоскости, в которых лежат прямые

PE
MK
DB
AB
EC

Тренировочные упражнения

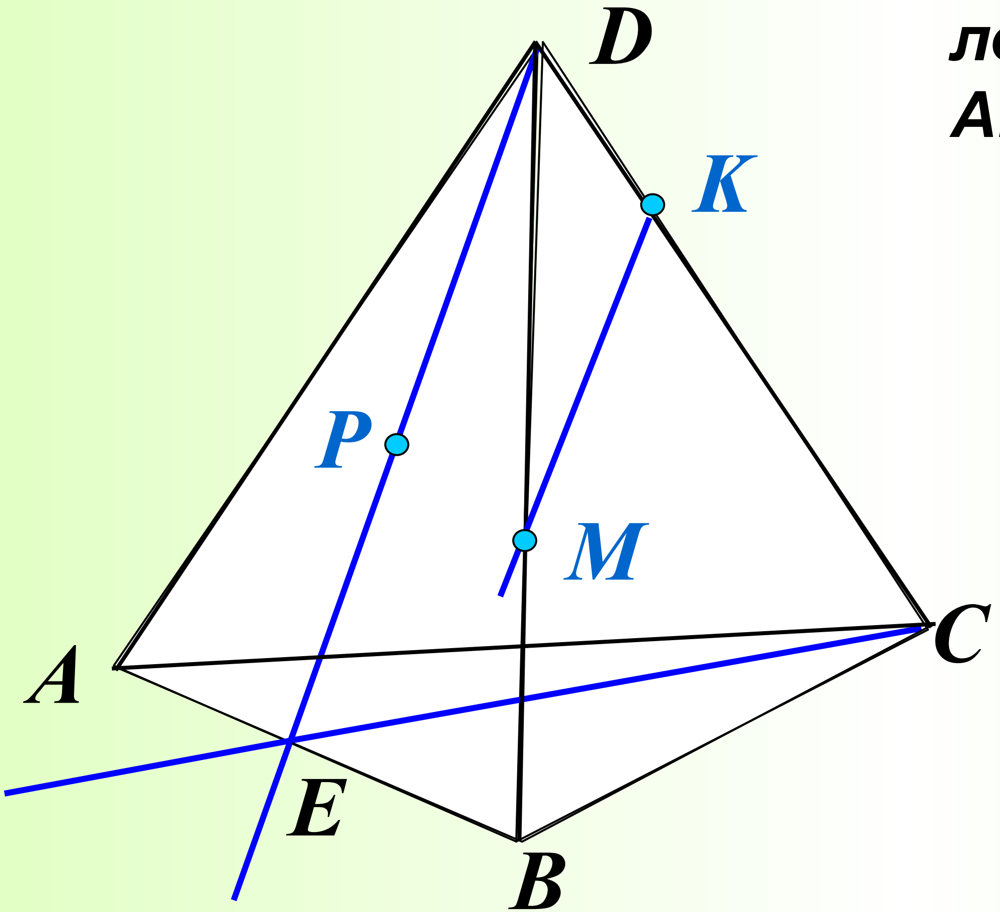


Назовите

точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC,

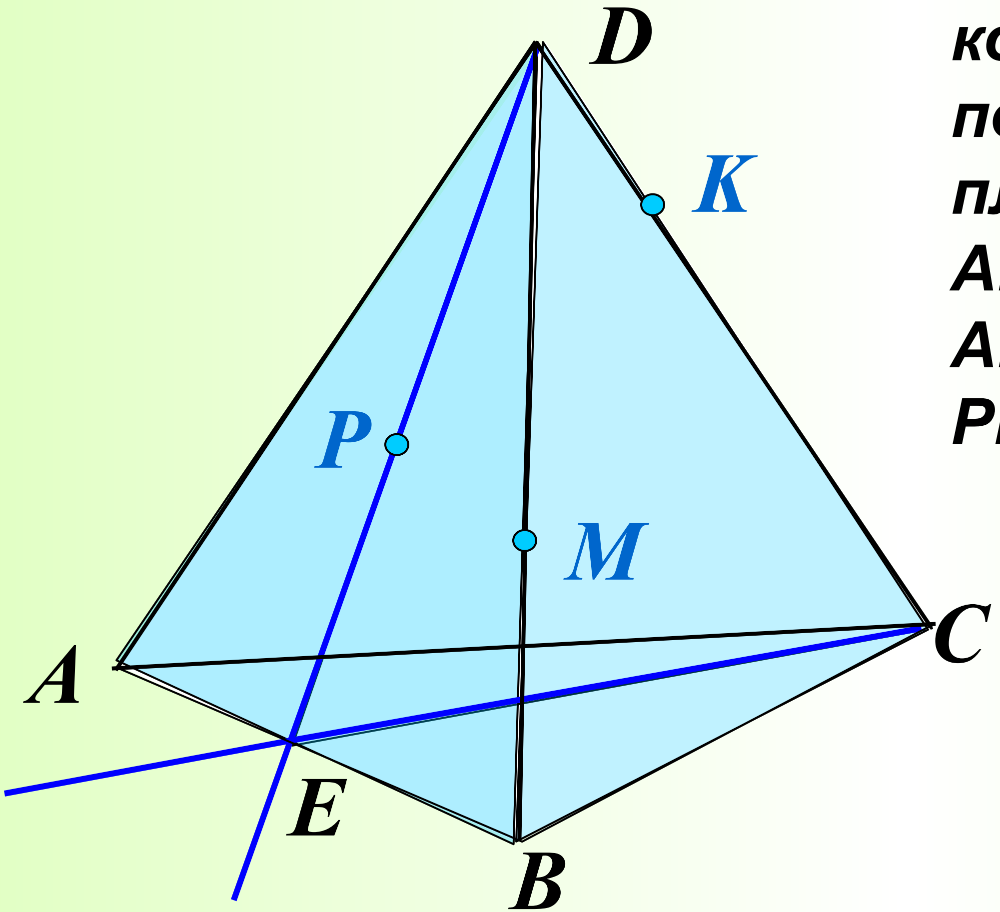
прямой CE с плоскостью ADB.

Тренировочные упражнения



Назовите точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC

Тренировочные упражнения



Назовите прямые по которым пересекаются плоскости

ABC и DCB

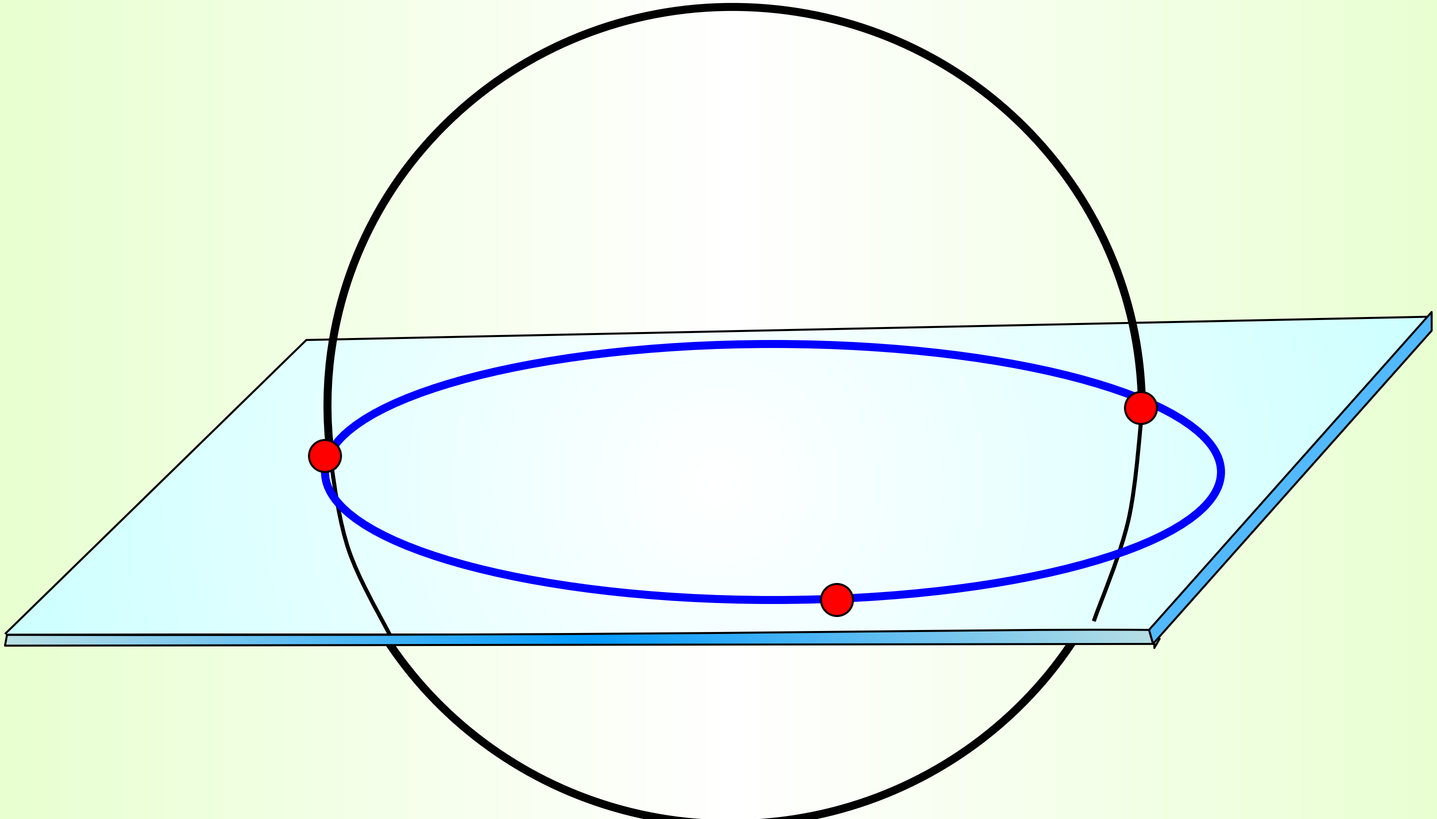
ABD и CDA

PDC и ABC

№ 8. **Верно ли утверждение:**

а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости;

б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

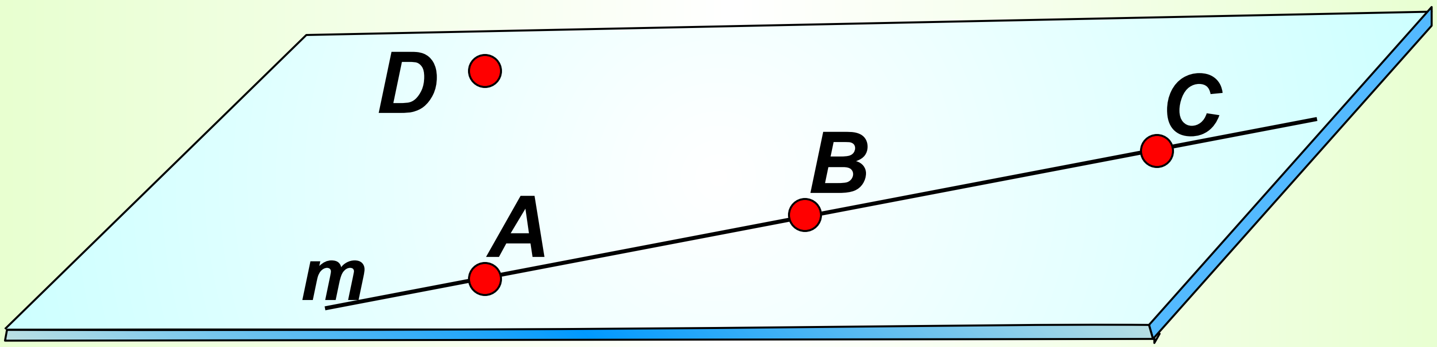


Проверить (2)

№ 4. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой?

Предположим три точки A, B и C лежат на одной прямой m. Тогда через прямую m и точку D, не лежащую на этой прямой проходит плоскость (теорема). Это противоречит условию задачи.

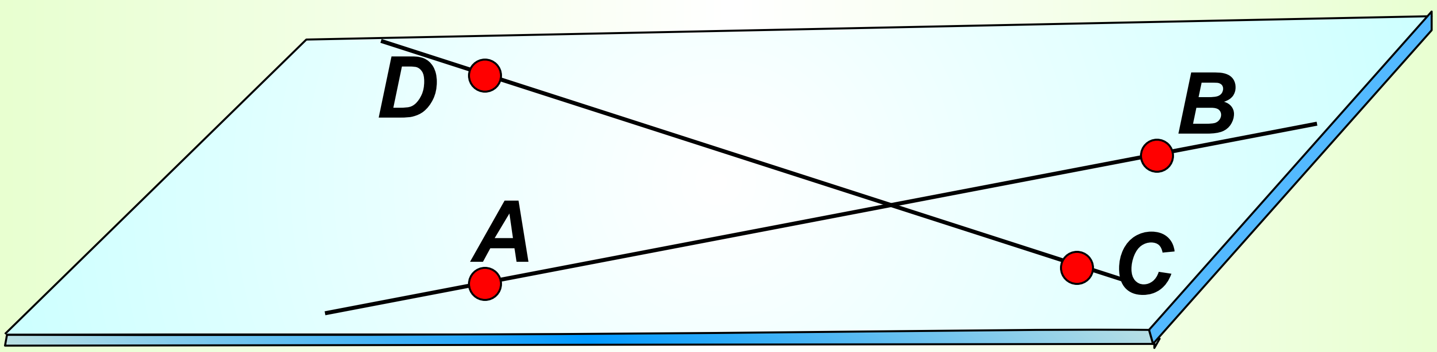


Проверить (2)

№ 4. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

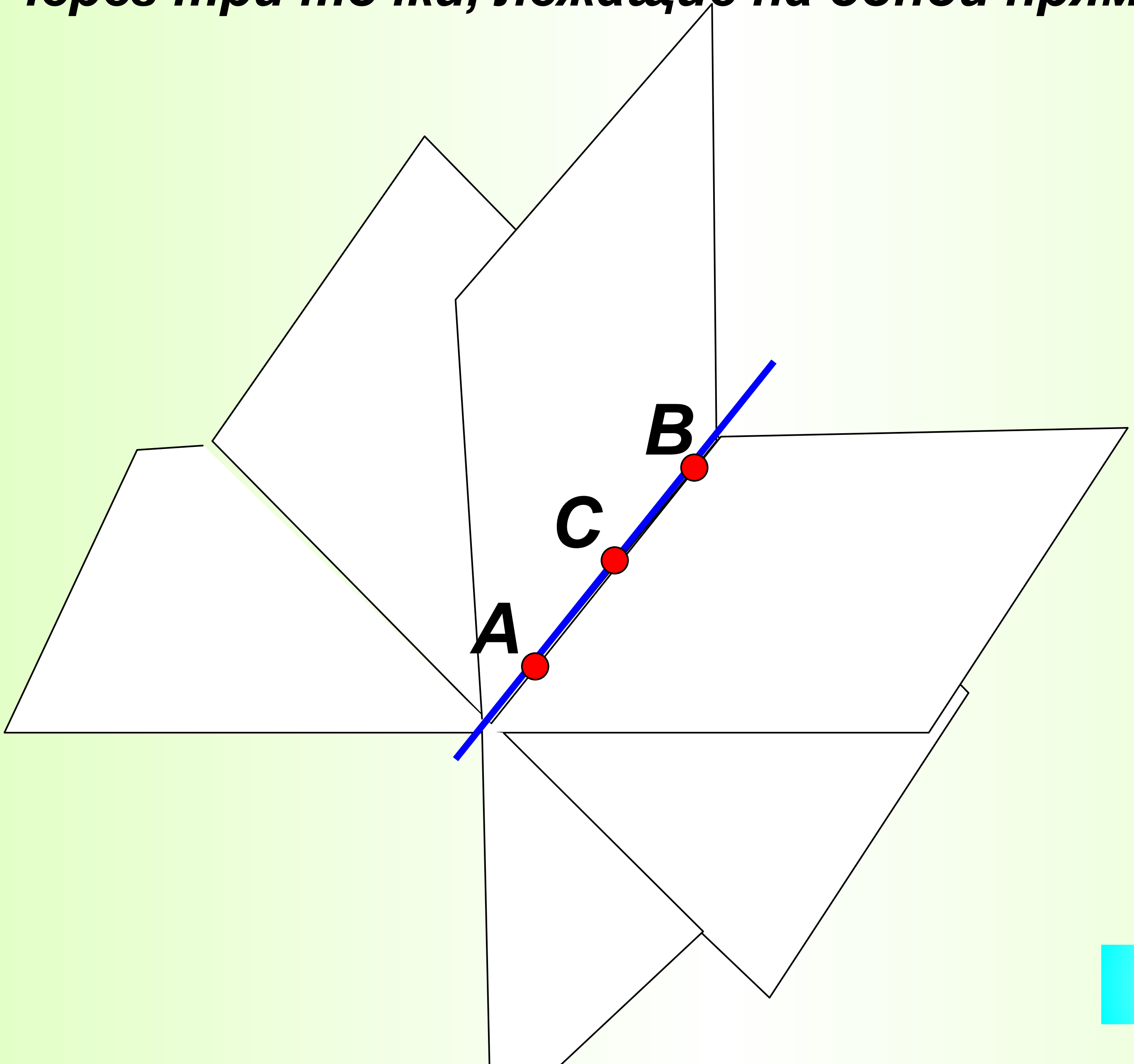
б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться? ответ обоснуйте.

Предположим прямые AB и CD пересекаются.
Тогда через две пересекающиеся прямые проходит плоскость
(теорема). Это противоречит условию задачи.



Проверить (2)

№5. **Сколько существует плоскостей, проходящих через три точки, лежащие на одной прямой?**

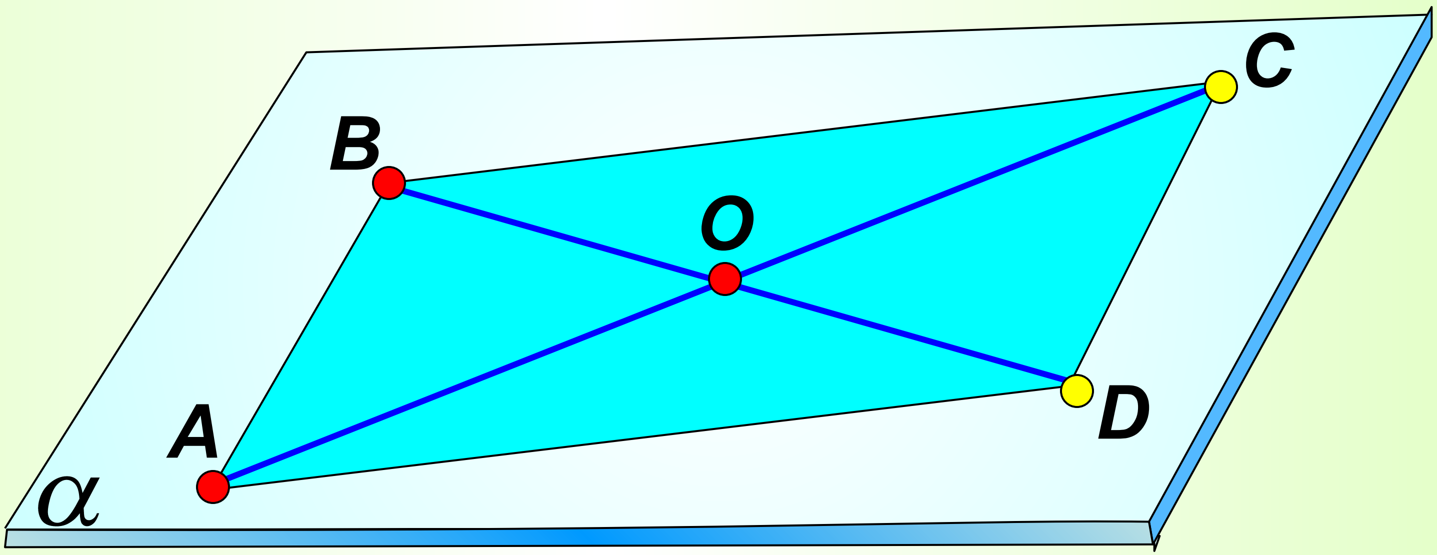


Проверить

№9. **Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α?**

$$A \in \alpha,\ O \in \alpha \overset{A_2}{\Rightarrow} AO \subset \alpha.$$

$$C \in AO \Rightarrow C \in \alpha$$



Проверить (3)

Д/З

- П.1-3(выучить аксиомы и теоремы), №2,№3,№13