

M-1

Аксиомы стереометрии

Урок-лекция в 10-м классе



Школьный курс геометрии состоит из двух частей:

- ПЛАНИМЕТРИИ

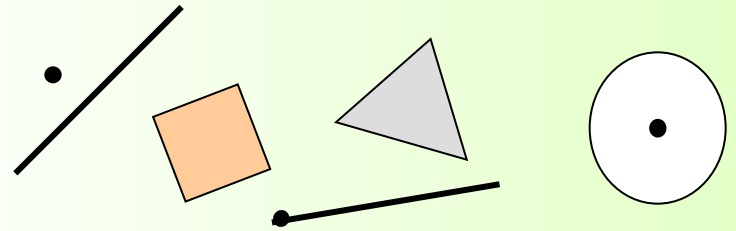
- СТЕРЕОМЕТРИИ

«планиметрия» – наименование смешанного происхождения: от греч. **metreo** – измерять и лат. **planum** – плоская поверхность (плоскость)

Школьный курс
ГЕОМЕТРИИ

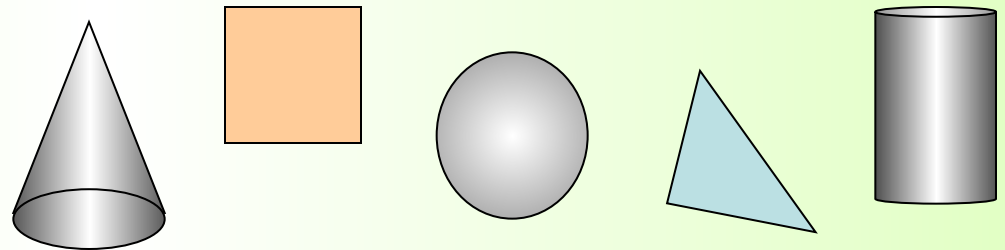
ПЛАНИМЕТРИЯ 7-9 классы

ГЕОМЕТРИЯ на плоскости



СТЕРЕОМЕТРИЯ 10-11 классы

ГЕОМЕТРИЯ в пространстве



«стереометрия» – от греч. **stereos** – пространственный (**stereon** – объем).

Планиметрия

**Изучает свойства
геометрических фигур
на плоскости**

*В переводе с греческого
слово «геометрия»
означает «землемерие»
«гео» – по-гречески
земля, «метрео» –
мерить
«планиметрия» – от
греч. *metreo* – измерять
и лат. *planum* – плоская
поверхность (плоскость)*

Стереометрия

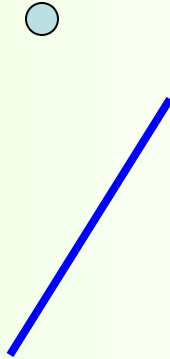
**Изучает свойства
фигур в пространстве**

*Слово «стереометрия»
происходит от греческих
слов «стереос» объемный,
пространственный,
«метрео» – мерить*

Основные фигуры

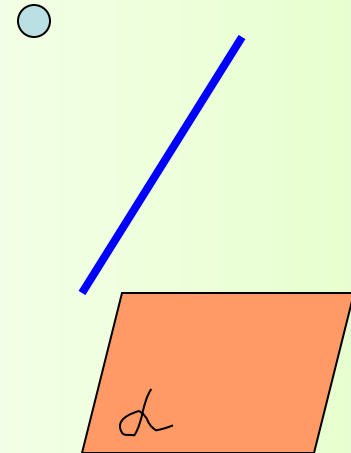
Планиметрии (на плоскости)

- Точка
- Прямая



Стереометрии (в пространстве)

- Точка
- Прямая
- Плоскость

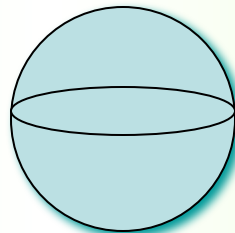


Плоскость представляет с собой геометрическую фигуру простирающуюся неограниченно во все стороны.

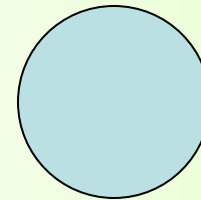
Наряду с точками, прямыми, плоскостями в стереометрии рассматриваются геометрические тела, изучаются их свойства, вычисляются площади их поверхностей, а также вычисляются объёмы тел.



куб



шар

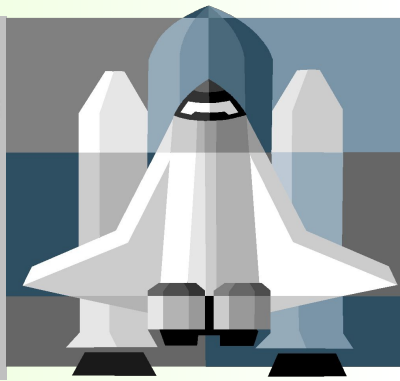


цилиндр

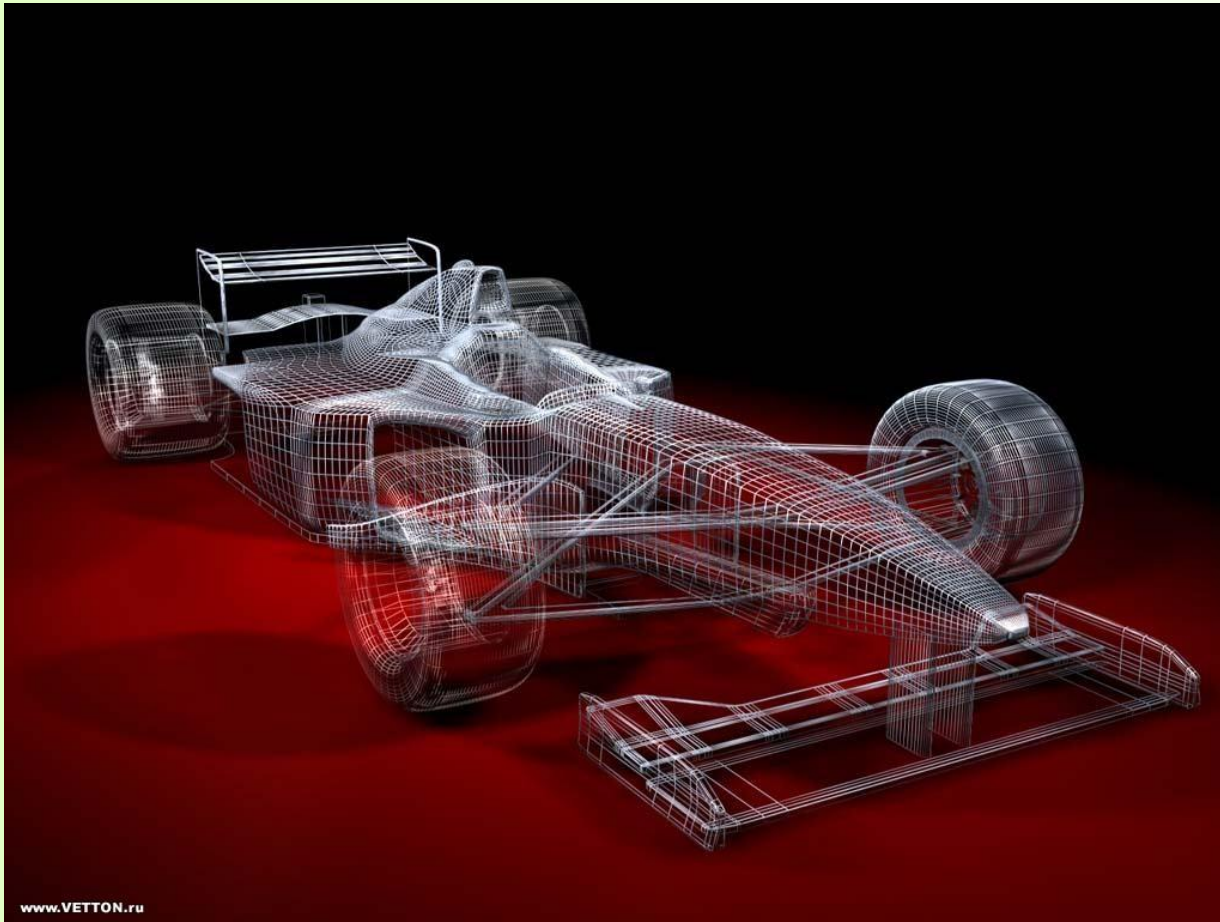
Мы знаем, что

- **ГЕОМЕТРИЯ** возникла из практических задач людей;
- **ГЕОМЕТРИЯ** лежит в основе всей техники и большинства изобретений человечества;
- **ГЕОМЕТРИЯ** нужна

- технику,
- инженеру,
- рабочему,
- архитектору,
- модельеру ...



Стереометрия широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.



При

**проектировании
этой машины**

**важно было получить такую форму, чтобы при
движении сопротивлению воздуха было минимум**



Оперный театр в Сиднее

***Датский архитектор Йорн Утзон был вдохновлён
видом парусов.***

*Эйфелева башня
Париж, Марсово поле*

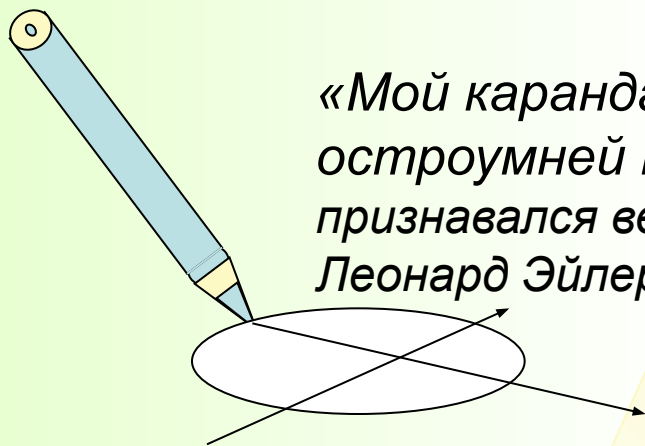
**Инженер Гюстав Эйфель
нашел необычную форму
для своего проекта.**

**Эйфелева башня
весьма устойчива:
сильный ветер
отклоняет ее вершину
всего лишь на 10-12 см.
В жару от
неравномерного
нагревания
солнечными лучами
она может
отклониться на 18 см.**

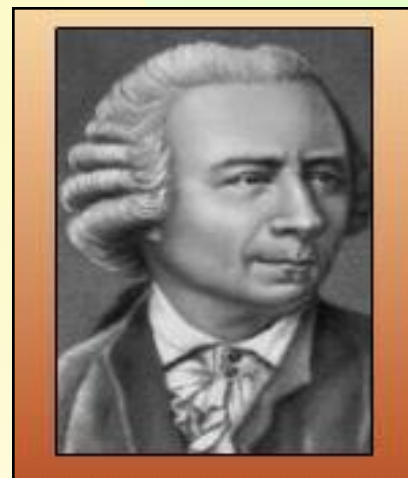


При изучении стереометрии мы будем пользоваться рисунками, чертежами: они помогут нам понять, представить, проиллюстрировать содержание того или иного факта.

Поэтому прежде, чем приступить к пониманию сущности аксиомы, определения, доказательству теоремы, решению геометрической задачи, постарайтесь наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь .



«Мой карандаш, бывает еще остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).



ВЫВОД:

Интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ В 10-м КЛАССЕ

Учебный материал
10 класса
по геометрии

Аксиомы стереометрии

Параллельность прямых и плоскостей

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Многогранники

Точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, D, E, K, \dots

A

B

C

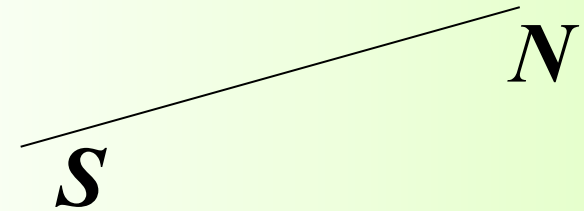
E

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, d, e, k, \dots

a

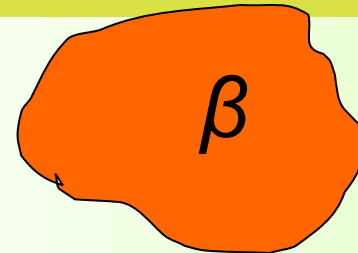
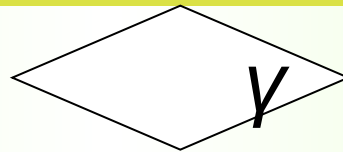


b



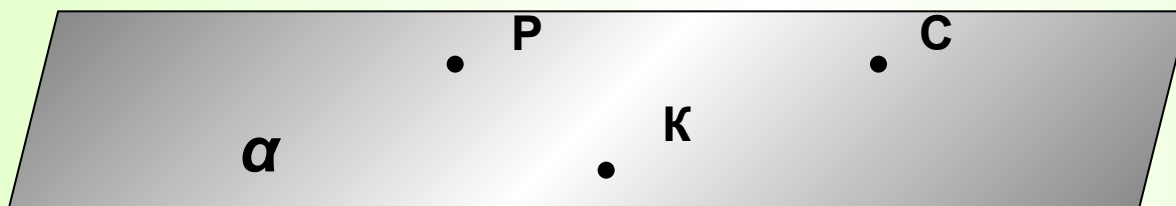
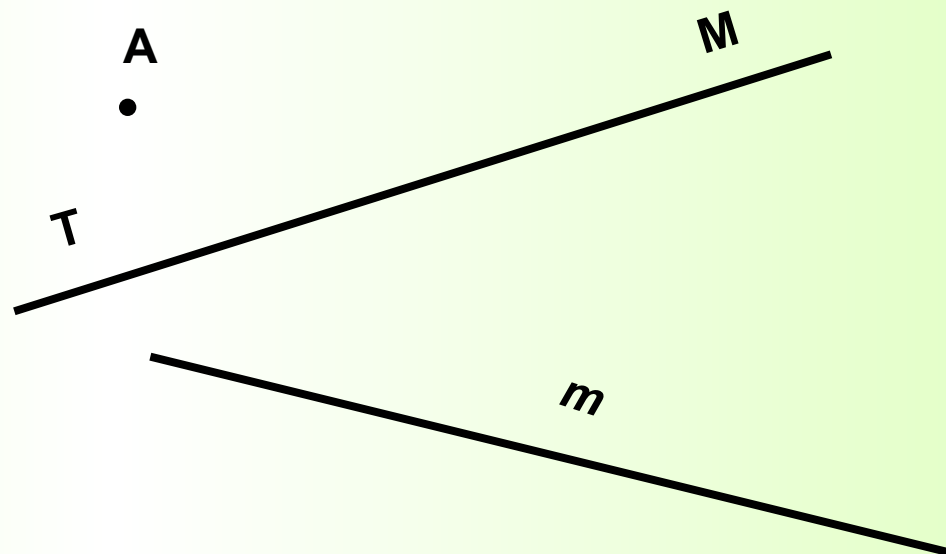
Или обозначаем прямую двумя прописными латинскими буквами.

Плоскости обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \pi, \omega, \dots$



Основные понятия стереометрии

- точка,
- прямая,
- плоскость,
- расстояние



$\alpha = (PKC)$

$A \notin \alpha$, $KC \subset \alpha$, $P \in \alpha$, $PK = 2 \text{ см}$

Аксиомы стереометрии

Слово «**аксиома**» греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

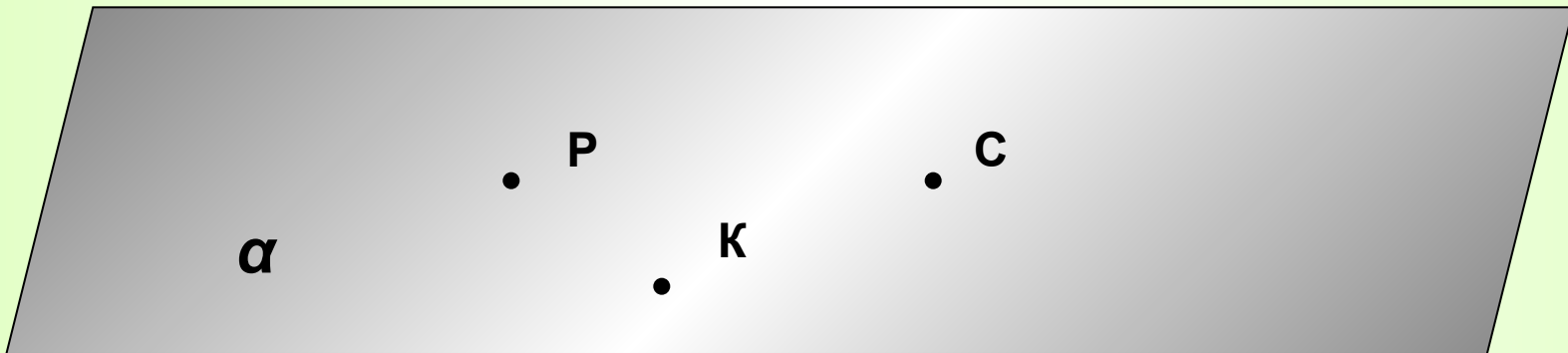
*(от греч. ахіѡта –
принятие положения)*

*Основные свойства точек, прямых и
плоскостей выражены в аксиомах*

Аксиомы стереометрии

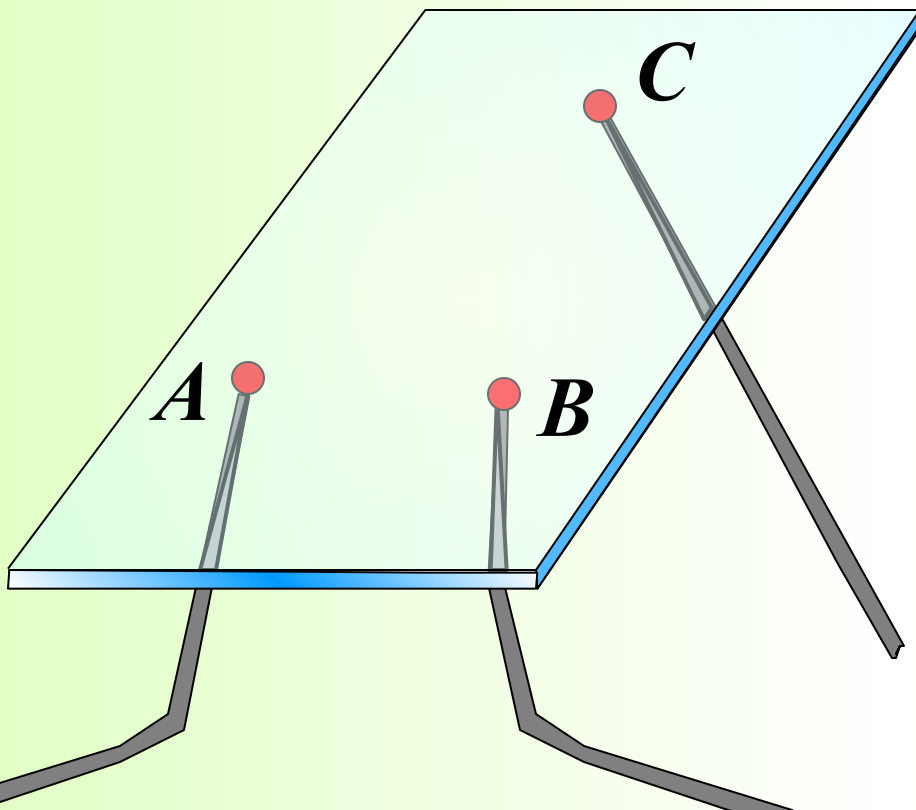
А-1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой проходит плоскость, и притом только одна



$$\alpha = (PKC)$$

A_1 . *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

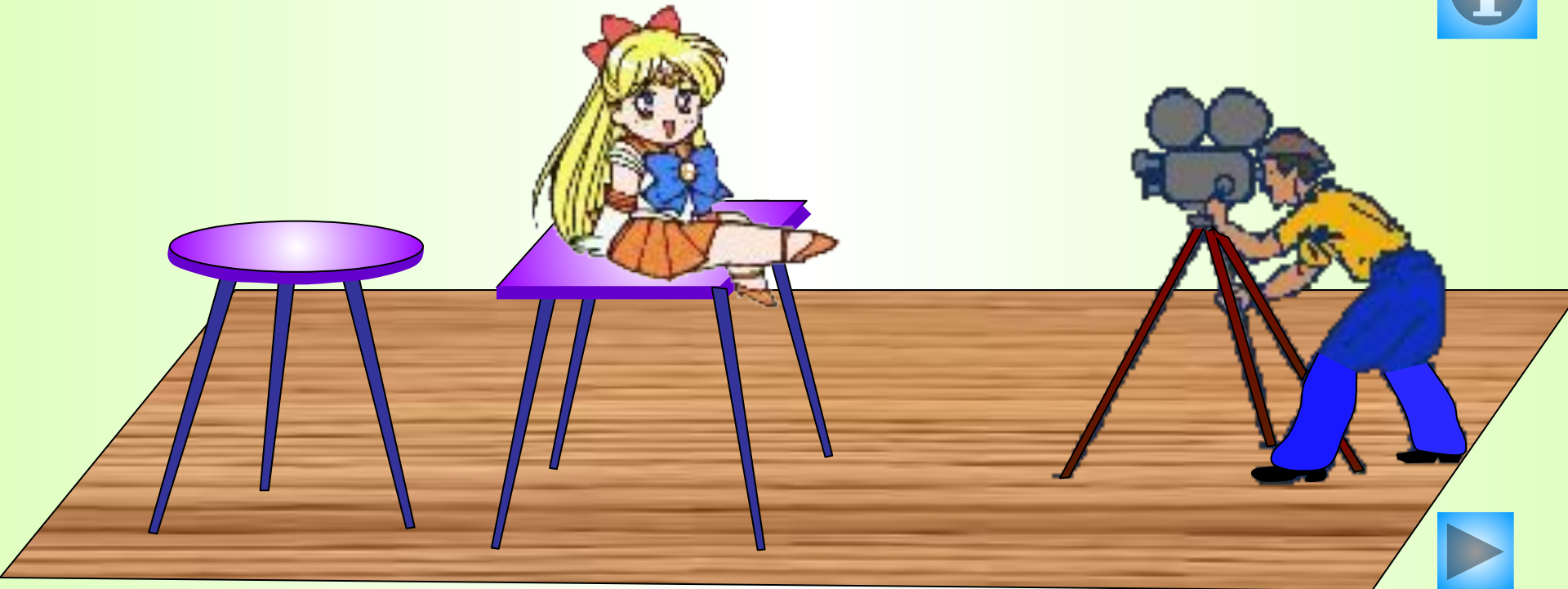


*Иллюстрация к аксиоме A_1 :
стеклянная пластинка
плотно ляжет на три
точки A , B и C , не лежащие
на одной прямой.*



Иллюстрации к аксиоме A_1 из жизни.

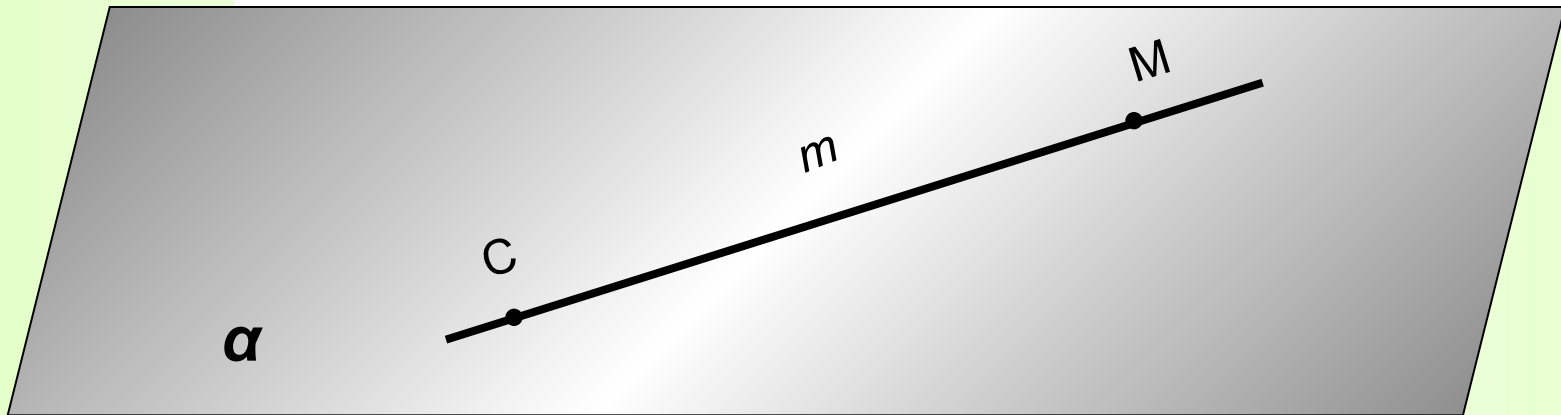
Для видеосъемки, фотосъемки для других приборов табурет с тремя ножками всегда идеальнее встанет на пол, чем табурет с четырьмя ножками. Три ножки всегда устойчивее, а четыре ножки всегда проблемнее с устойчивостью, если ножки стула не помещаются по длине на асфальте или прямо на газоне на улице, на песке на пляже или в траве в лесу. Три ножки штабува лежат в одну плоскость пола, а висит в воздухе.



Аксиомы стереометрии

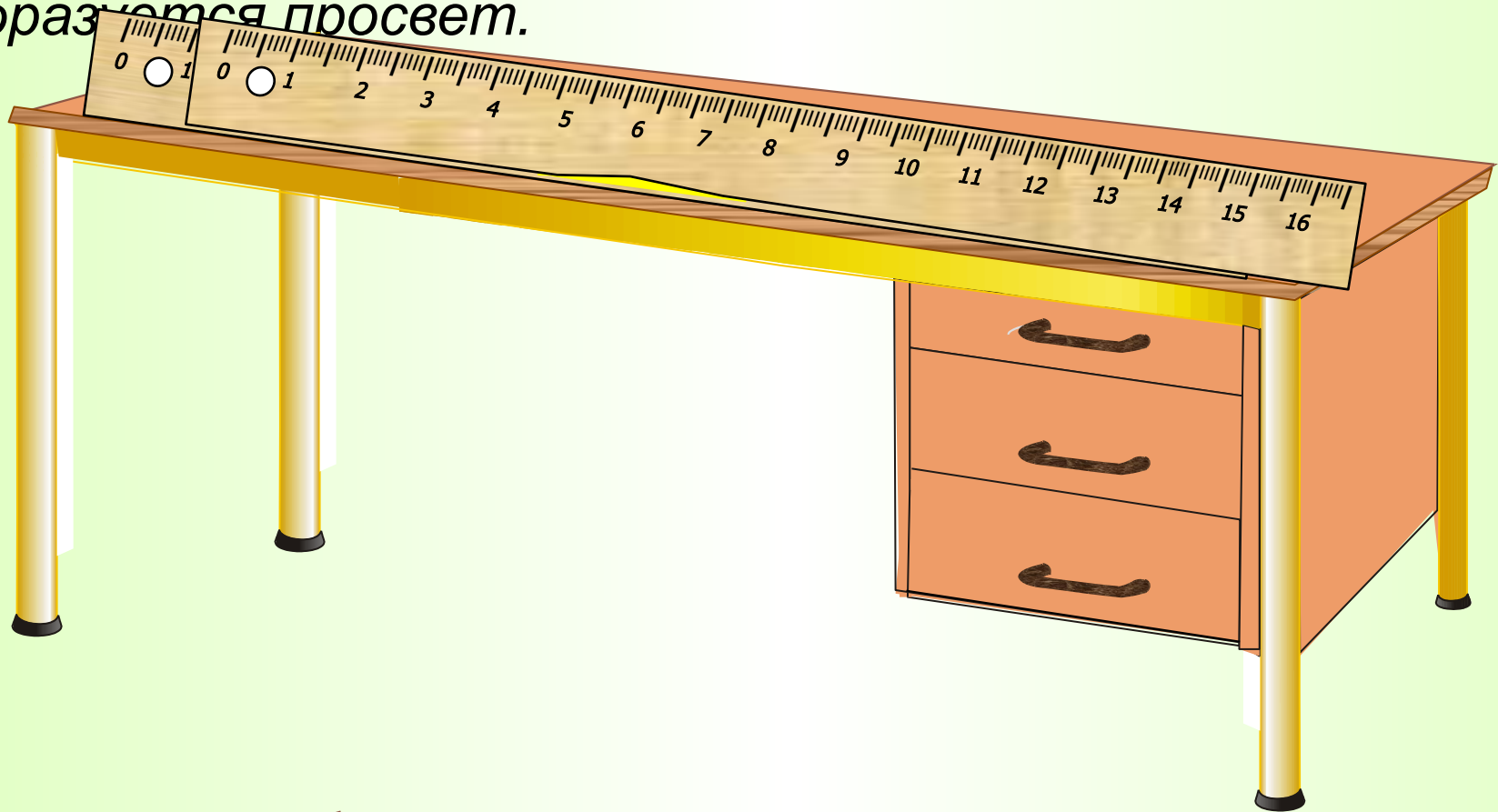
A-2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.



Если $M, C \in \alpha$ $M, C \in m$, то $m \subset \alpha$

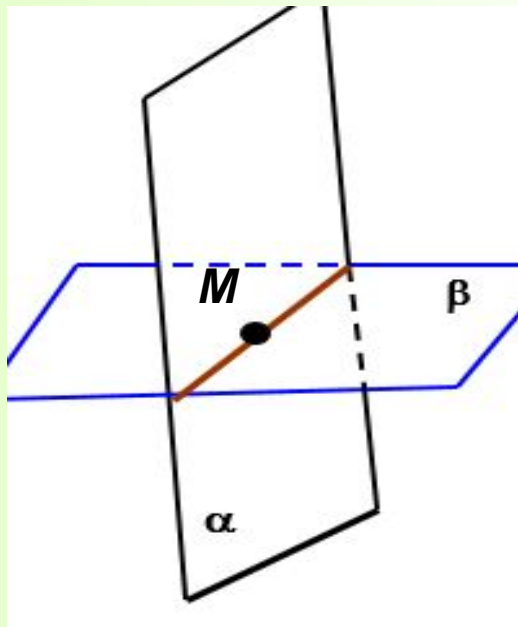
Свойство, выраженное в аксиоме A_2 , используется для проверки «ровности» чертежной линейки. Линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.



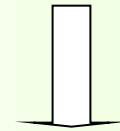
Аксиомы стереометрии

А-3

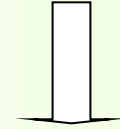
Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$$M \in \alpha, M \in \beta, M \in m$$

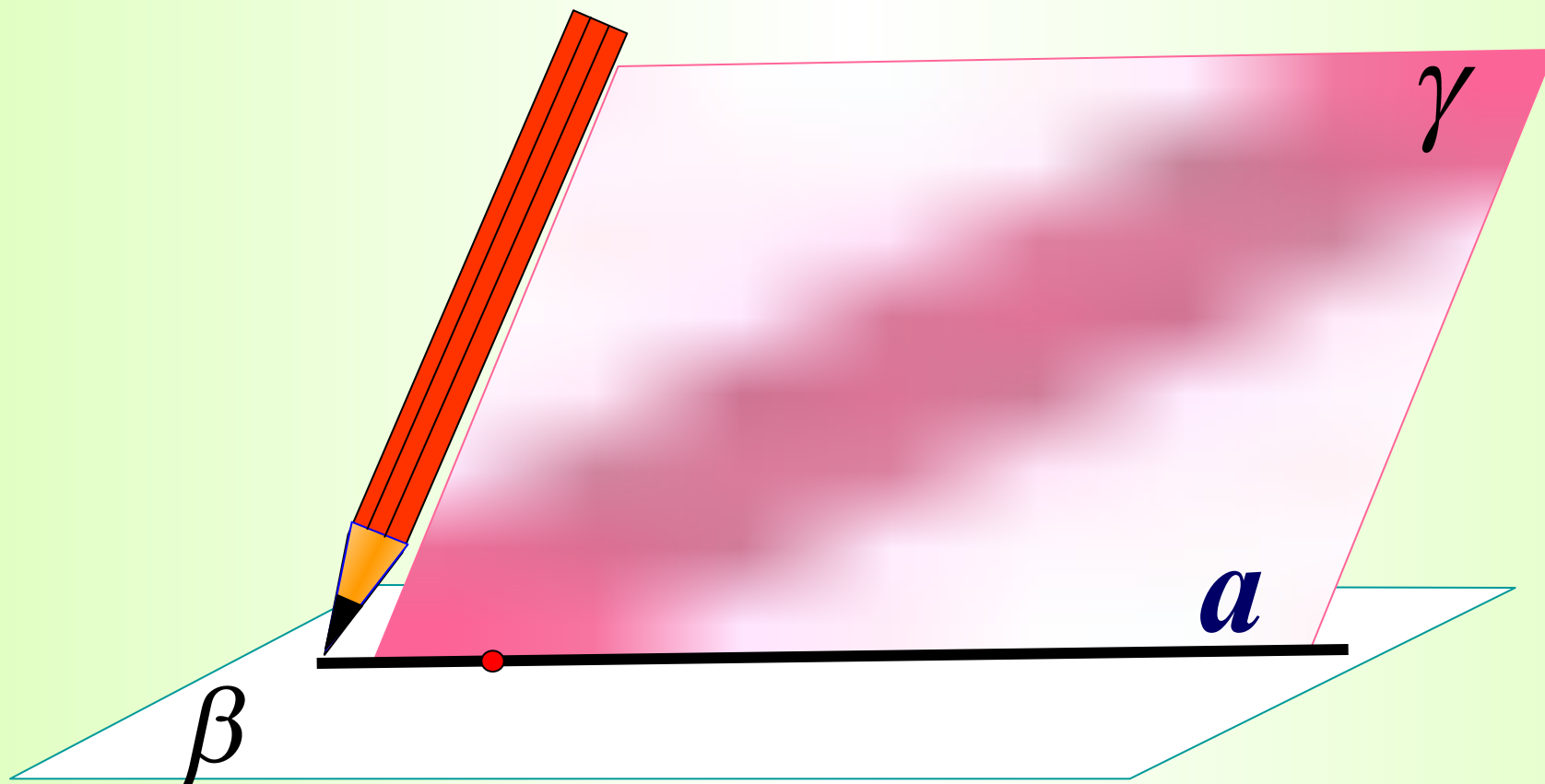


$$m \in \alpha, m \in \beta$$



$$\alpha \cap \beta = m$$

A_3 . Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

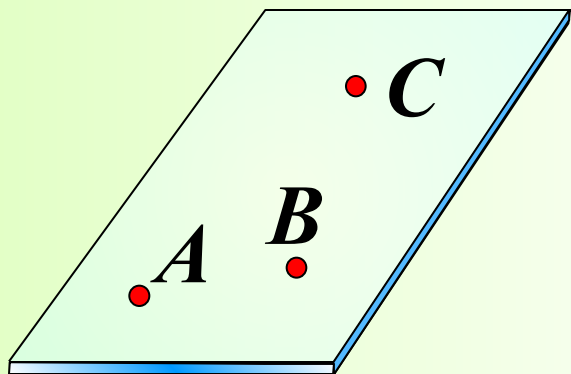


В этом случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой.

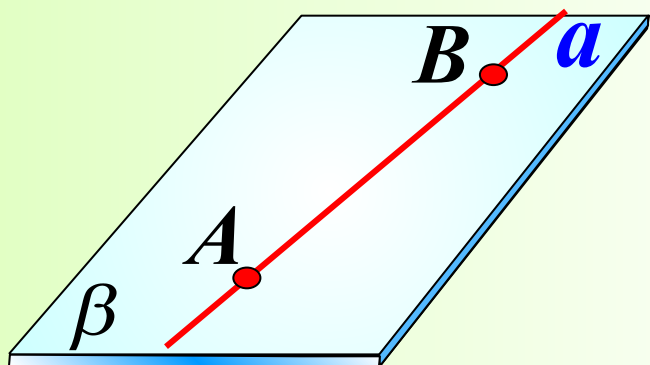
$$\beta \cap \gamma = a$$



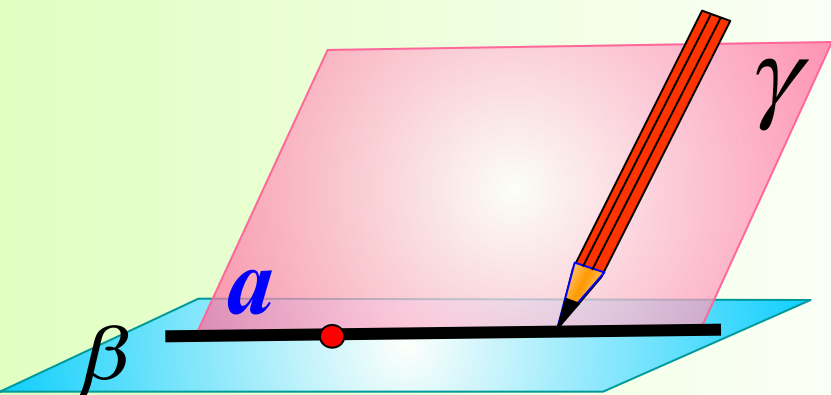
Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.



A_1
Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



A_2
Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

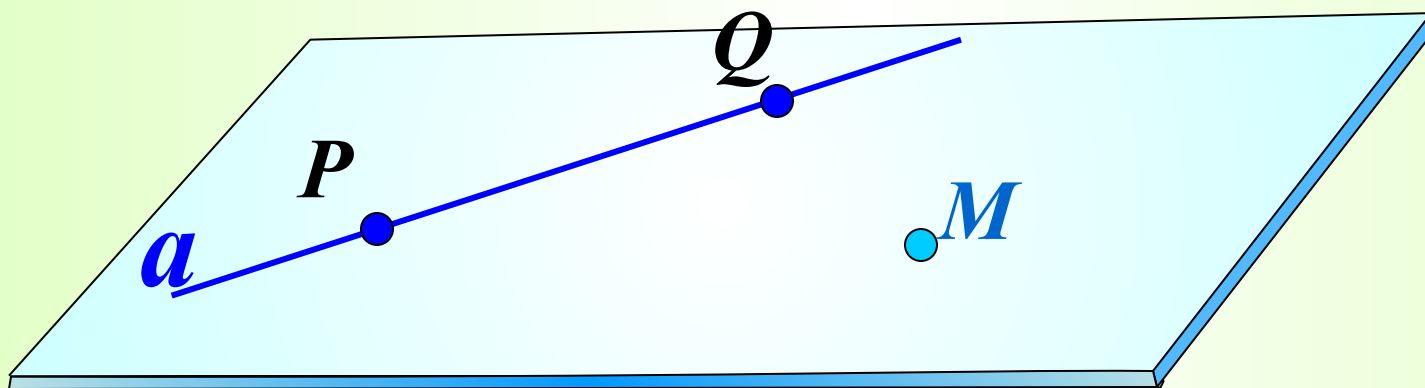


A_3
Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Некоторые следствия из аксиом.

Теорема

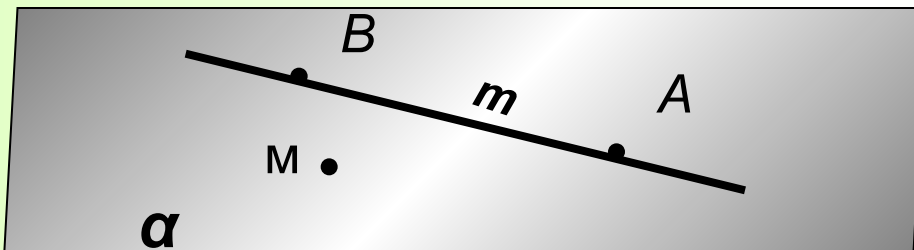
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-1

Через любую прямую и не принадлежащую ей точку можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: $M \notin m$

Доказательство

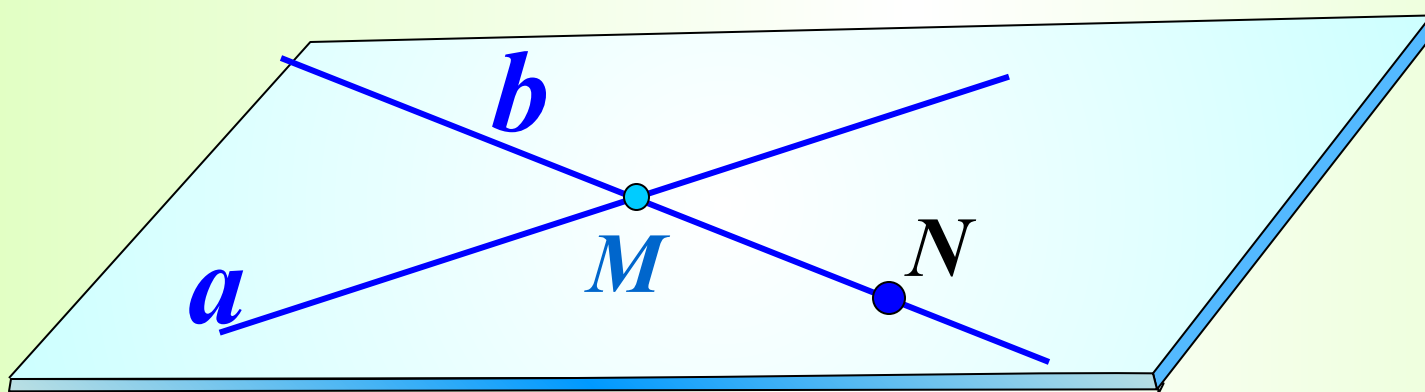
Пусть точки $A, B \in m$.

- Так как $M \notin m$, то точки A, B и M не принадлежат одной прямой. По А-1 через точки A, B и M проходит только одна плоскость — плоскость (ABM) , Обозначим её α . Прямая m имеет с ней две общие точки — точки A и B , следовательно, по аксиоме А-2 эта прямая лежит в плоскости α . Таким образом, плоскость α проходит через прямую m и точку M и является искомой.
- Докажем, что другой плоскости, проходящей через прямую m и точку M , не существует. Предположим, что есть другая плоскость — β , проходящая через прямую m и точку M . Тогда плоскости α и β проходят через точки A, B и M , не принадлежащие одной прямой, а значит, совпадают. Следовательно, плоскость α единственна.
- Теорема доказана

Некоторые следствия из аксиом.

Теорема

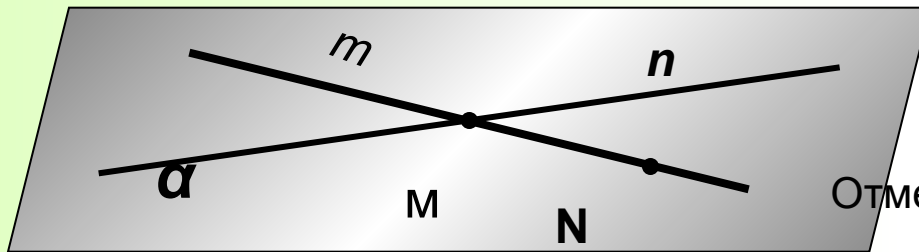
Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна



СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

T-2

Через любые две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



Дано: $m \cap n = M$

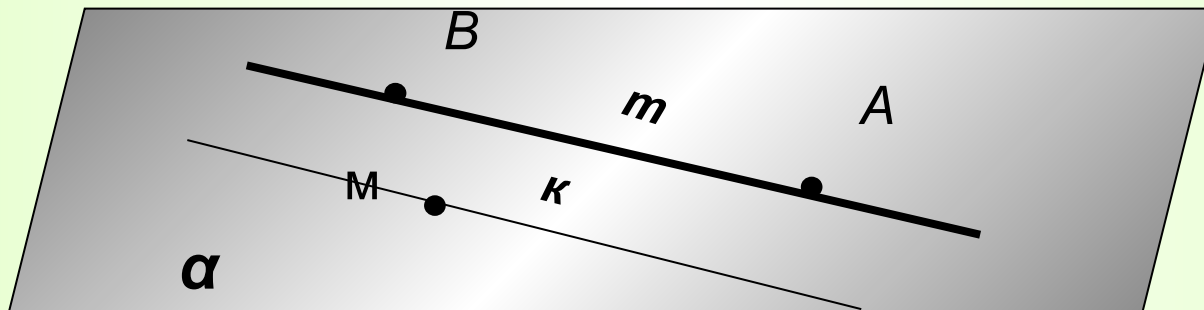
Доказательство

Отметим на прямой m произвольную точку N , отличную от M .

- Рассмотрим плоскость $\alpha = (n, N)$. Так как $M \in \alpha$ и $N \in \alpha$, то по А-2 $m \subset \alpha$. Значит обе прямые m, n лежат в плоскости α и следовательно α , является искомой
- Докажем единственность плоскости α . Допустим, что есть другая, отличная от плоскости α и проходящая через прямые m и n , плоскость β . Так как плоскость β проходит через прямую n и не принадлежащую ей точку N , то по Т-1 она совпадает с плоскостью α . Единственность плоскости α доказана.
- Теорема доказана

СЛЕДСТВИЕ ИЗ Т-1

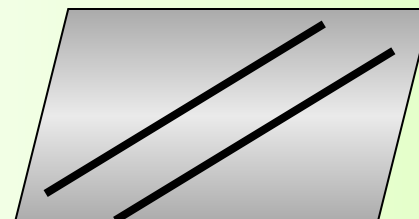
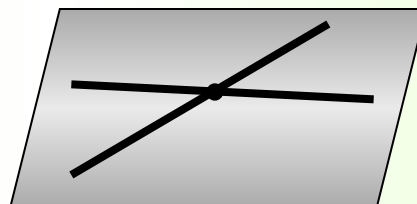
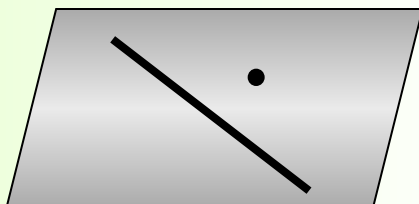
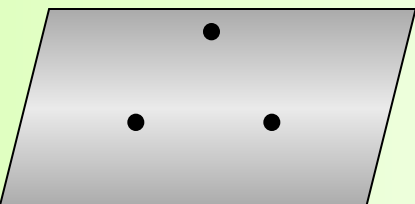
Через две ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ прямые можно провести плоскость, и притом только одну.



ВЫВОД

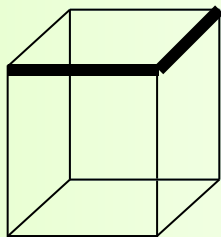
Как в пространстве можно однозначно задать плоскость?

- По трем точкам, не лежащим на одной прямой
- По прямой и точке, не лежащей на этой прямой
- По двум пересекающимся прямым
- По двум параллельным прямым

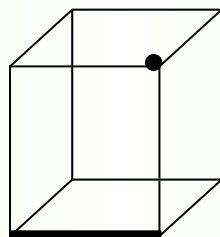


ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

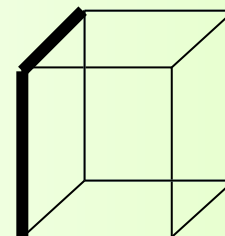
1. Сколько существует способов задания плоскости?
2. Сколько плоскостей можно провести через выделенные элементы?



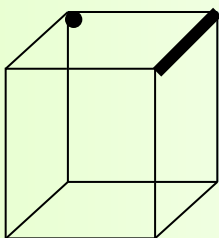
а)



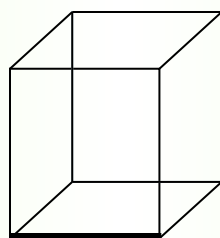
б)



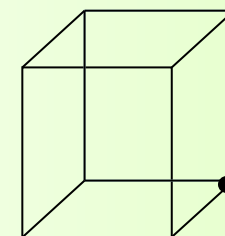
в)



г)



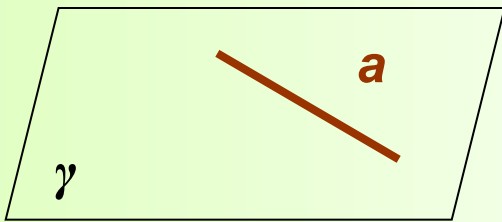
д)



е)

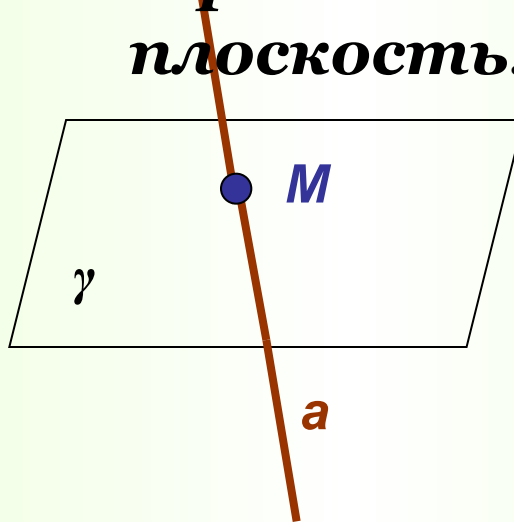
Взаимное расположение прямой и плоскости.

Прямая
лежит в
плоскости.



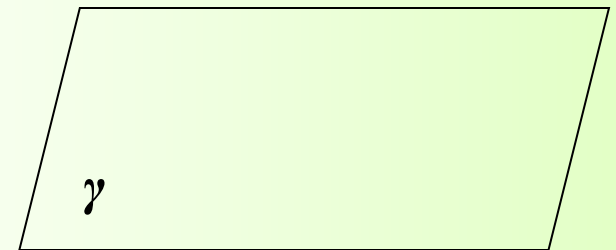
$$a \subset \gamma$$

Прямая
пересекает
плоскость.



$$a \cap \gamma = M$$

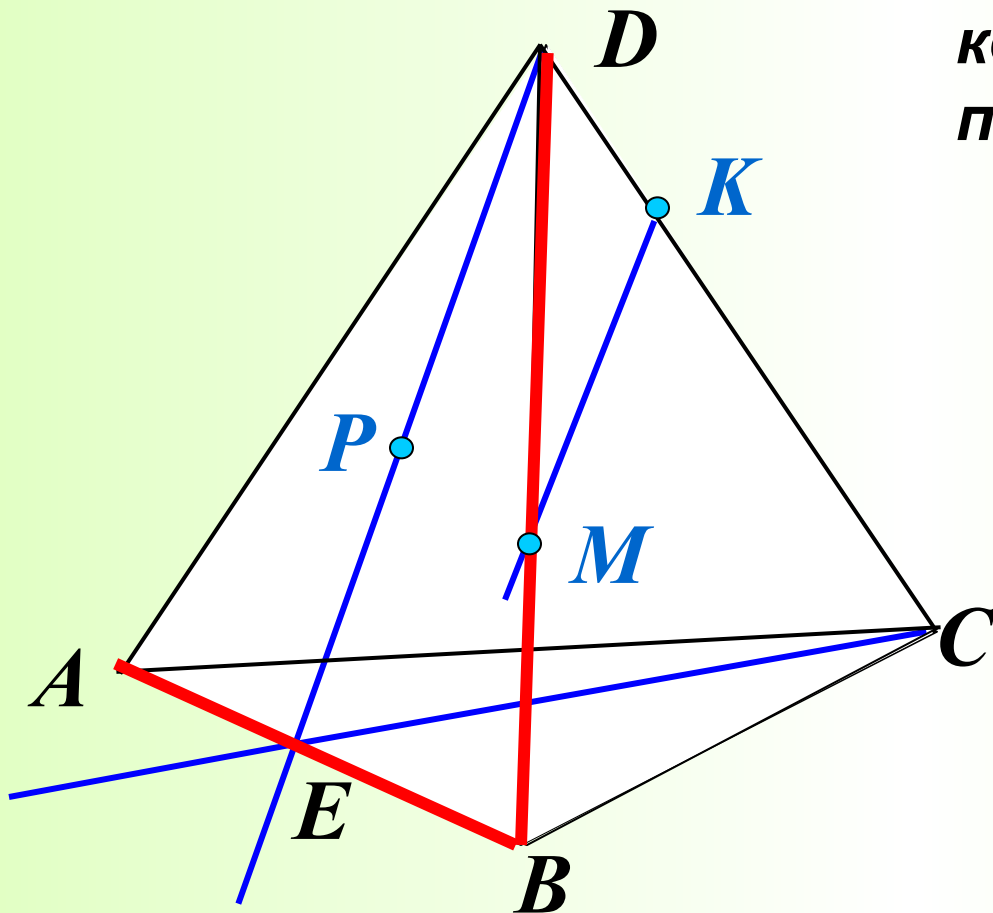
Прямая не
пересекает
плоскость. *a*



$$a \not\subset \gamma$$

Сколько общих точек в
каждом случае?

Тренировочные упражнения



Назовите плоскости, в которых лежат прямые

PE

MK

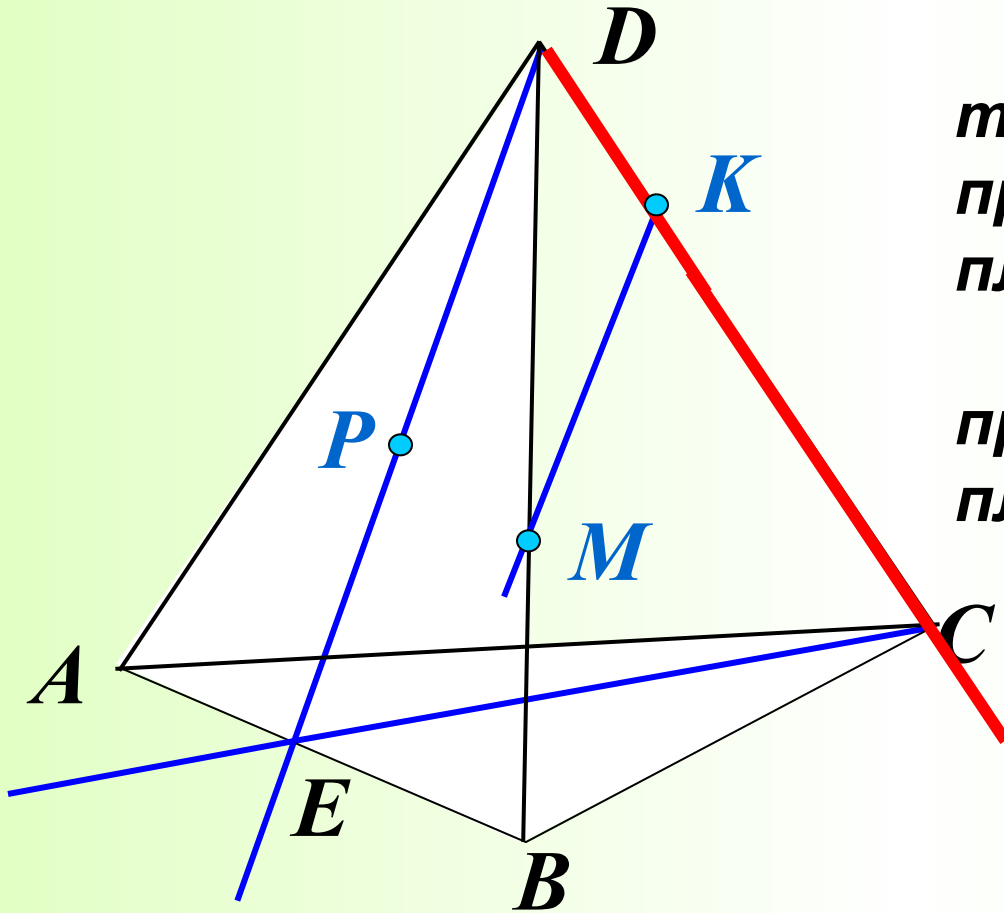
DB

AB

EC



Тренировочные упражнения



Назовите

**точки пересечения
прямой DK с
плоскостью ABC ,**

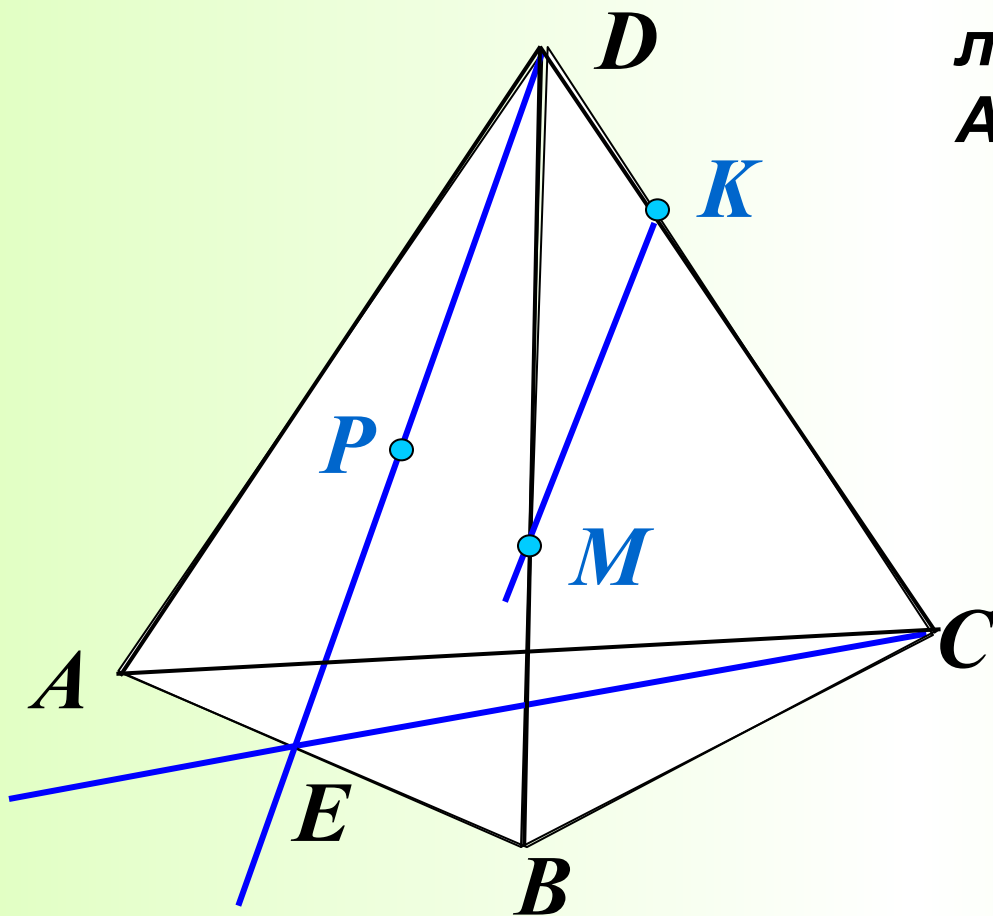
**прямой CE с
плоскостью ADB .**



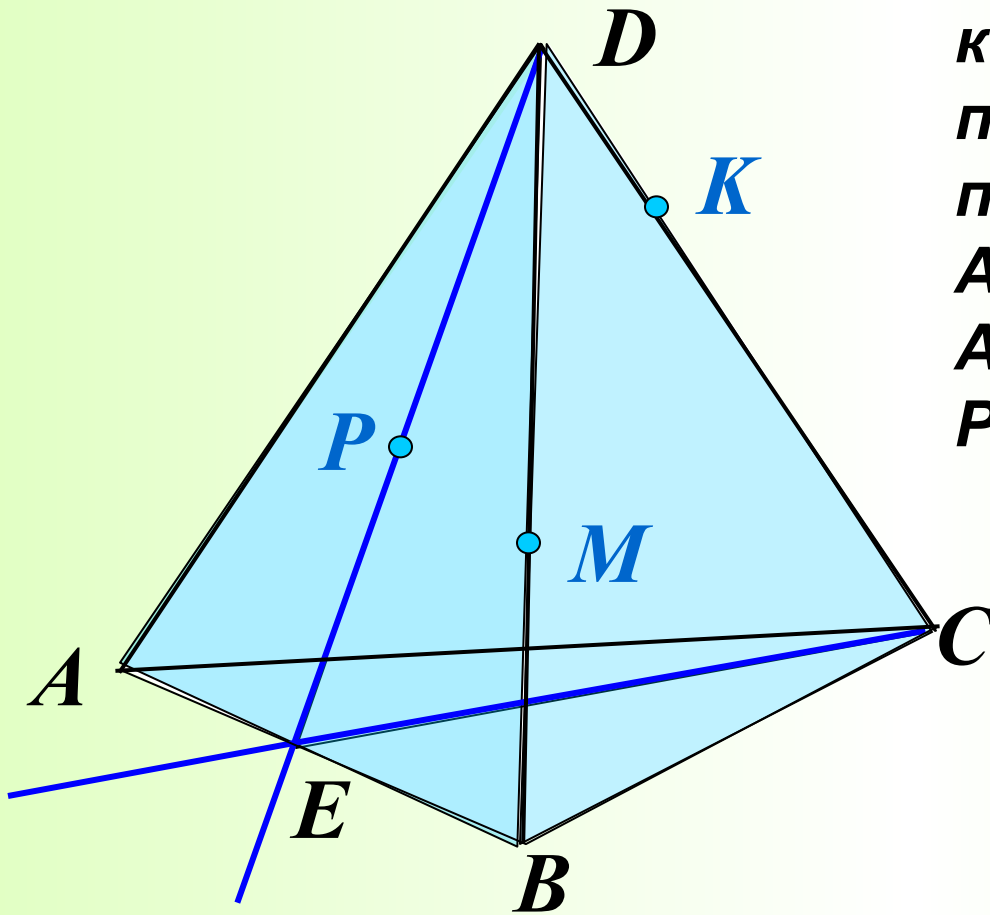
Тренировочные упражнения



Назовите точки,
лежащие в плоскостях
 ADB и DBC



Тренировочные упражнения

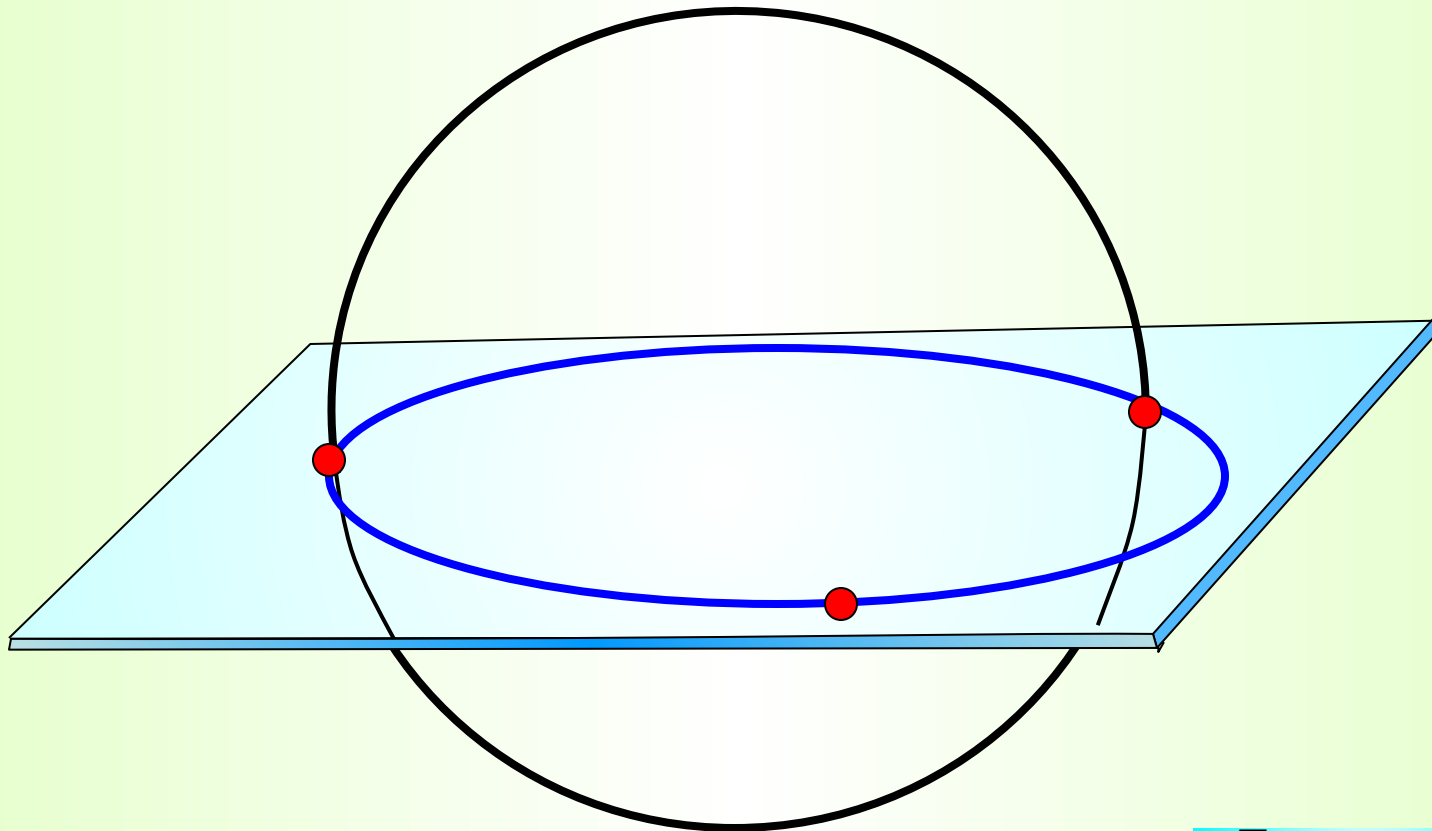


Назовите прямые по которым пересекаются плоскости
 ABC и DCB
 ABD и CDA
 PDC и ABC



№ 8. Верно ли утверждение:

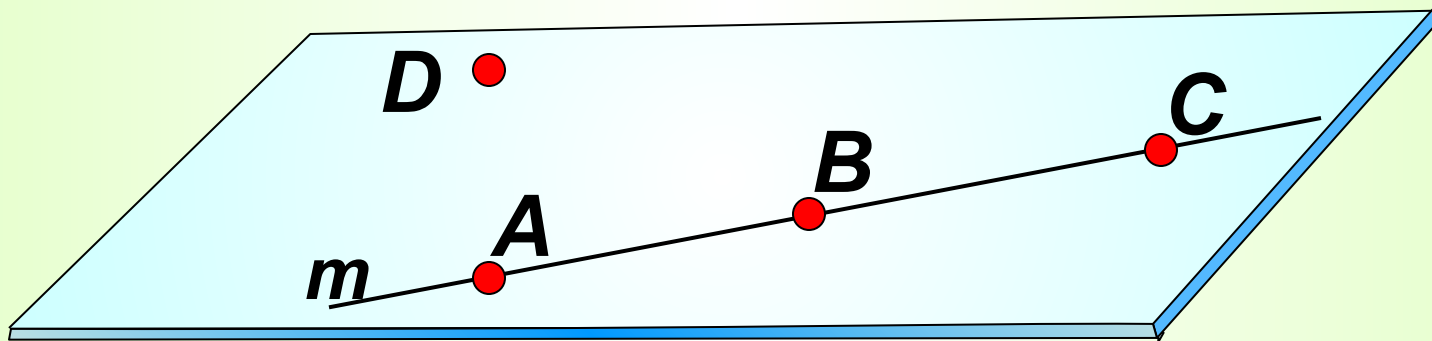
- а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости;
- б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?



№ 4. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости.

а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой?

Предположим три точки A , B и C лежат на одной прямой m . Тогда через прямую m и точку D , не лежащую на этой прямой проходит плоскость (теорема). Это противоречит условию задачи.



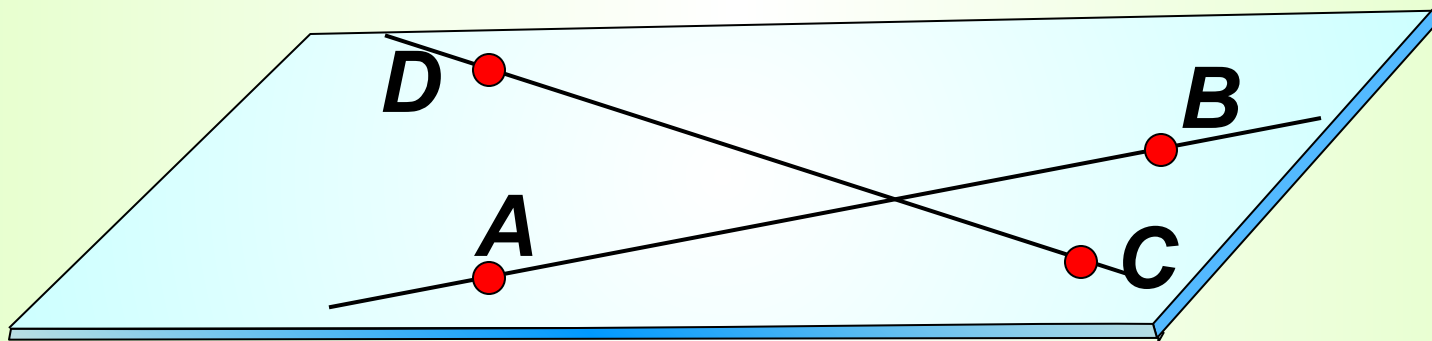
Проверить
(2)



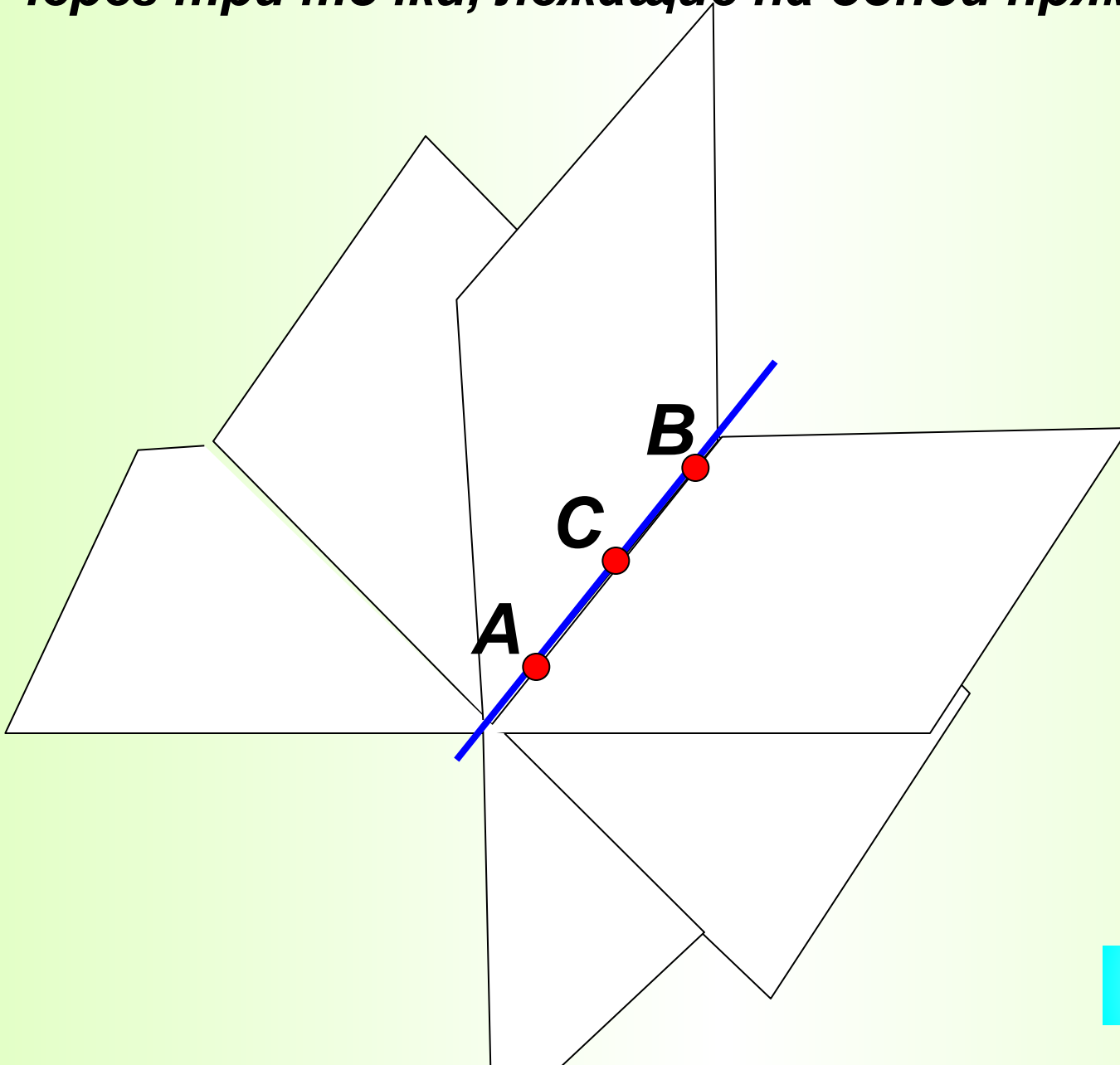
№ 4. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости.

**б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться?
ответ обоснуйте.**

Предположим прямые AB и CD пересекаются.
Тогда через две пересекающиеся прямые проходит плоскость
(теорема). Это противоречит условию задачи.



№5. Сколько существует плоскостей, проходящих через три точки, лежащие на одной прямой?



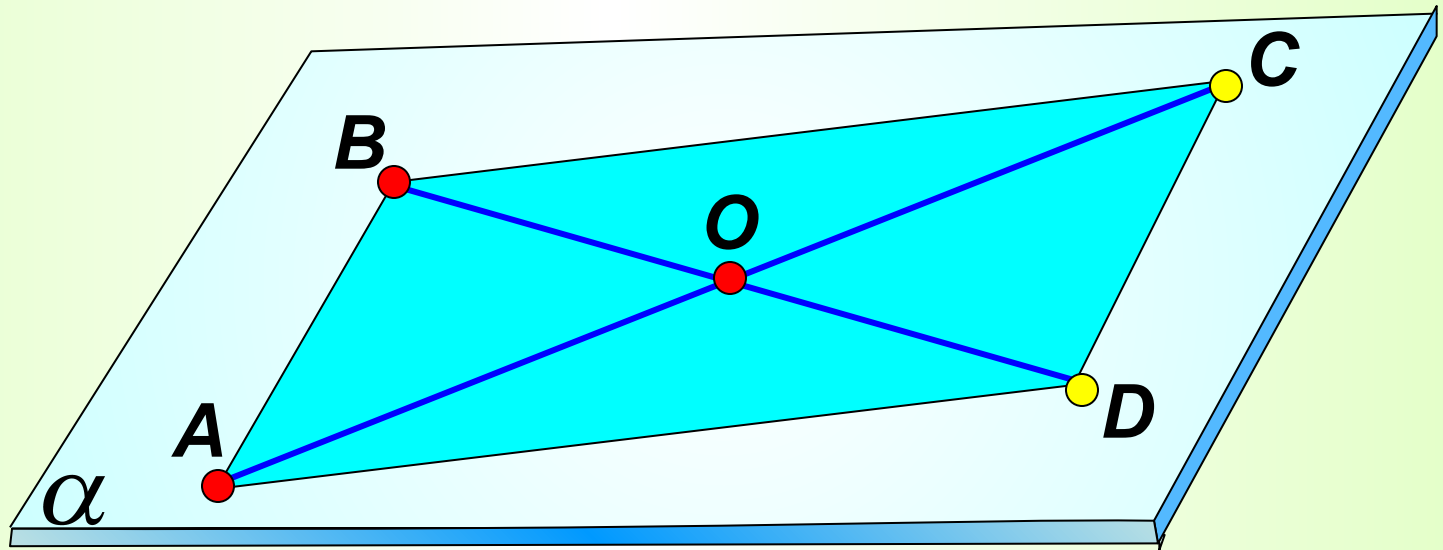
Проверить



№9. *Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α . Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α ?*

$$A \in \alpha, O \in \alpha \stackrel{A_2}{\Rightarrow} AO \subset \alpha.$$

$$C \in AO \Rightarrow C \in \alpha$$



Проверить
(3)



Д/З

- П.1-3(выучить аксиомы и теоремы),
№2,№3,№13