Метод экспоненциального сглаживания

Применяется для краткосрочного прогнозирования.

Для экспоненциального сглаживания ряда используется рекуррентная формула:

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1} \qquad t = \overline{1,n}$$

S_t – значение экспоненциальной средней в момент t;

α – параметр сглаживания, $0 \le \alpha \le 1$

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^i y_{t-i}$$

весовые коэффициенты убывают по мере продвижения в прошлое (представляют собой показательную функцию с основанием меньше 1).

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1} \quad t = \overline{1,n}$$

α – параметр сглаживания, $0 \le \alpha \le 1$

Если α =1 , то $S_t = y_t$ экспоненциальная средняя совпадает с временным рядом (сглаживания нет)

Если α =0 , то $S_t = S_{t-1}$ Экспоненциальная средняя является константой (полное сглаживание)

Чем ближе α к 0, тем сильнее сглаживание.

На практике параметр сглаживания часто ищется с поиском на сетке.

Например, рассматривается сетка значений от α = 0.1 до α = 0.9, с шагом 0.1. Затем выбирается α, для которого сумма квадратов остатков или средняя ошибка аппроксимации являются минимальными.

Метод экспоненциального сглаживания

Экспоненциальная средняя используется для краткосрочного прогнозирования (обычно только на один период вперед).

Формула для прогноза на один шаг вперед: $\hat{y}_{n+1} = S_n$

Пример решения задачи

Имеются данные по числу браков в РФ с 2000 по 2013 годы.
Построить модель экспоненциального сглаживания для пяти значений параметра адаптации от α = 0.1 до α = 0.9, с шагом 0.2.
Вычислить для каждой модели среднюю ошибку аппроксимации и выбрать лучшую модель. Построить по ней прогноз числа браков на 2014 год.

Годы	Число браков
2000	897327
2001	1001589
2002	1019762
2003	1091778
2004	979667
2005	1066366
2006	1113562
2007	1262500
2008	1179007
2009	1199446
2010	1215066
2011	1316011
2012	1213598
2013	1225501

1. Построим график динамики показателя

2. Вычислим S_0 как среднее арифметическое первых пяти элементов ряда

3. Вычислим остальные S_t по формуле $S_t = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}$

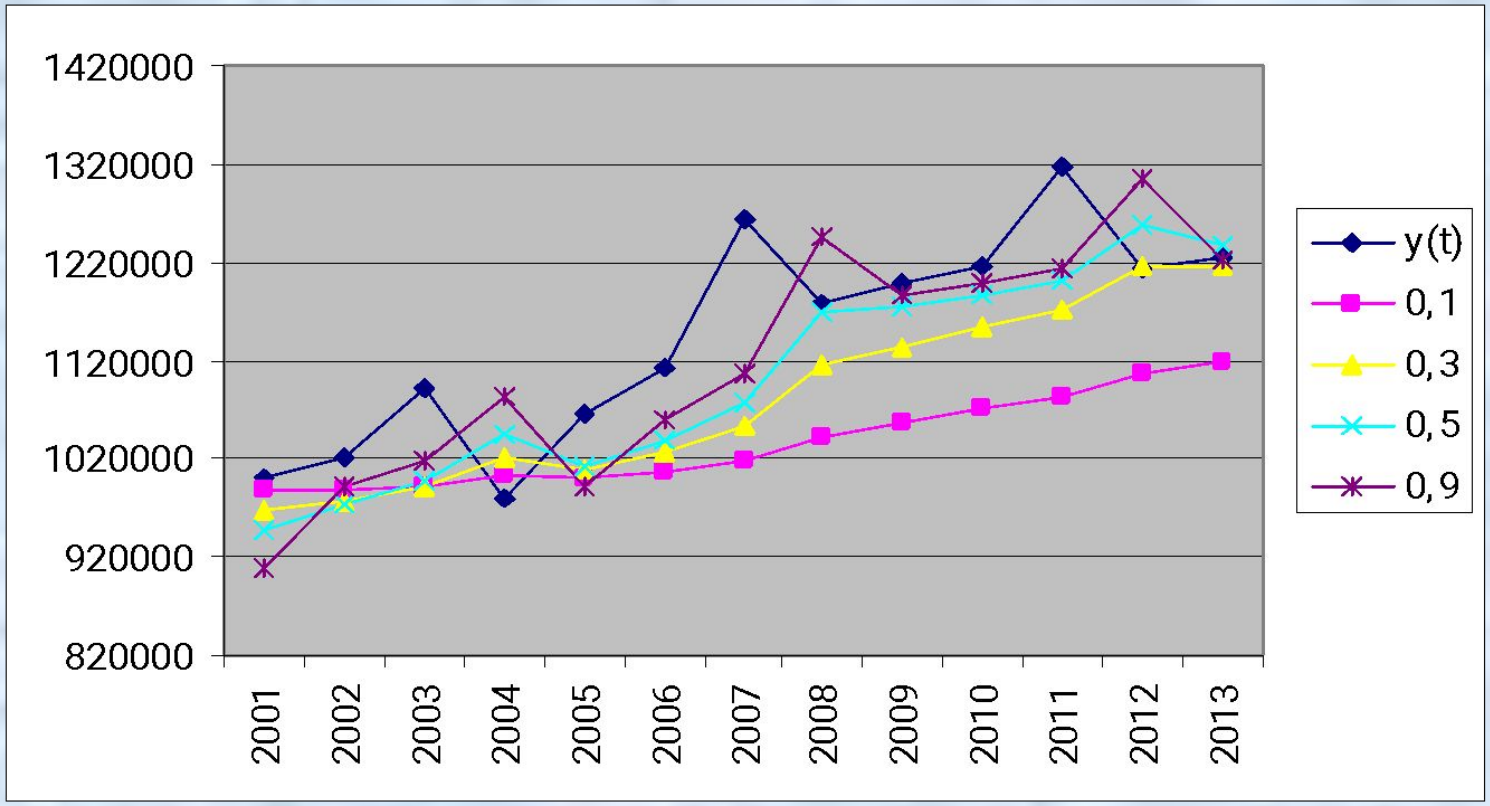
			S(t) для различных α				
год	t	y(t)	α =0,1	α =0,3	α =0,5	α =0,7	α =0,9
	0		**998024,6**	**998024,6**	**998024,6**	**998024,6**	**998024,6**
2000	1	897327	987954,8	967815,3	947675,8	927536,3	907396,8
2001	2	1001589	989318,3	977947,4	974632,4	979373,2	992169,8
2002	3	1019762	992362,6	990491,8	997197,2	1007645	1017003
2003	4	1091778	1002304	1020878	1044488	1066538	1084300
2004	5	979667	1000040	1008514	1012077	1005728	990130,3
2005	6	1066366	1006673	1025870	1039222	1048175	1058742
2006	7	1113562	1017362	1052178	1076392	1093946	1108080
2007	8	1262500	1041876	1115274	1169446	1211934	1247058
2008	9	1179007	1055589	1134394	1174226	1188885	1185812
2009	10	1199446	1069975	1153910	1186836	1196278	1198083
2010	11	1215066	1084484	1172257	1200951	1209430	1213368
2011	12	1316011	1107636	1215383	1258481	1284037	1305747
2012	13	1213598	1118233	1214847	1236040	1234730	1222813
2013	14	1225501	1128959	1218043	1230770	1228270	1225232

4. Вычислим прогнозные значения для каждого года, начиная с 2001 по формуле

$$\hat{y}_t = S_{t-1}$$

			одношаговый прогноз для различных альфа				
год	t	y(t)	α =0,1	α =0,3	α =0,5	α =0,7	α =0,9
	0						
2000	1	897327					
2001	2	1001589	987954,8	967815,3	947675,8	927536,3	907396,8
2002	3	1019762	989318,3	977947,4	974632,4	979373,2	992169,8
2003	4	1091778	992362,6	990491,8	997197,2	1007645	1017003
2004	5	979667	1002304	1020878	1044488	1066538	1084300
2005	6	1066366	1000040	1008514	1012077	1005728	990130,3
2006	7	1113562	1006673	1025870	1039222	1048175	1058742
2007	8	1262500	1017362	1052178	1076392	1093946	1108080
2008	9	1179007	1041876	1115274	1169446	1211934	1247058
2009	10	1199446	1055589	1134394	1174226	1188885	1185812
2010	11	1215066	1069975	1153910	1186836	1196278	1198083
2011	12	1316011	1084484	1172257	1200951	1209430	1213368
2012	13	1213598	1107636	1215383	1258481	1284037	1305747
2013	14	1225501	1118233	1214847	1236040	1234730	1222813

Построим на одном графике результаты прогноза для разных α



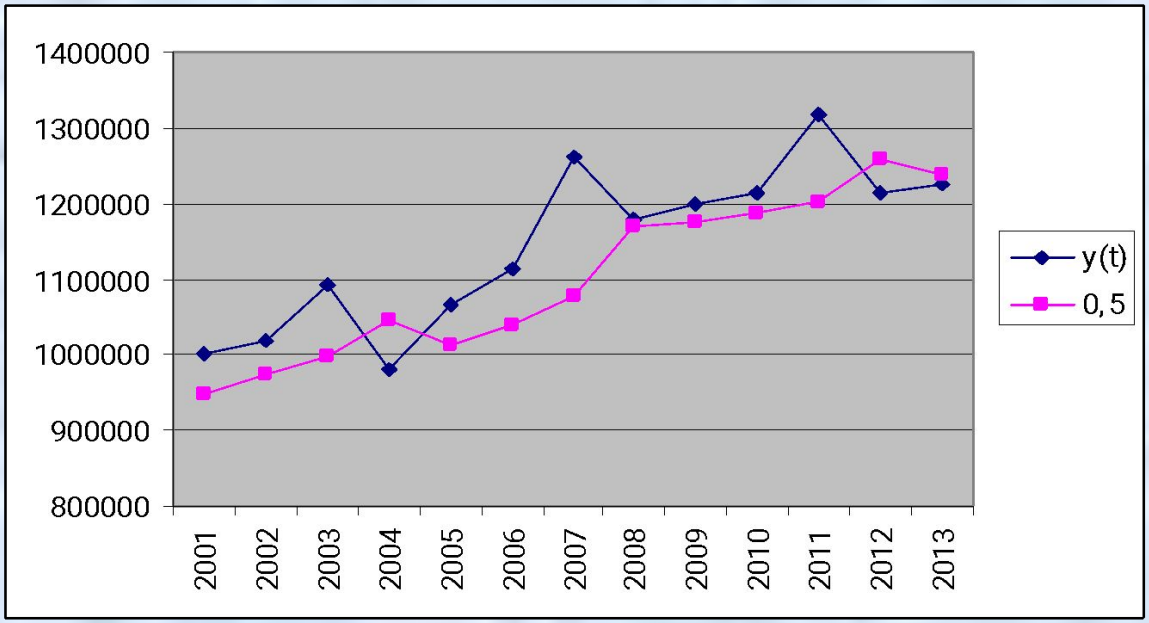
5. Вычислим относительную процентную ошибку прогноза для каждого года, начиная с 2001 по формуле

$$A_t = \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \cdot 100\%$$

			ошибки аппроксимации для различных альфа				
год	t	y(t)	α =0,1	α =0,3	α =0,5	α =0,7	α =0,9
	0						
2000	1	897327					
2001	2	1001589	1,36%	3,37%	5,38%	7,39%	9,40%
2002	3	1019762	2,99%	4,10%	4,43%	3,96%	2,71%
2003	4	1091778	9,11%	9,28%	8,66%	7,71%	6,85%
2004	5	979667	2,31%	4,21%	6,62%	8,87%	10,68%
2005	6	1066366	6,22%	5,43%	5,09%	5,69%	7,15%
2006	7	1113562	9,60%	7,87%	6,68%	5,87%	4,92%
2007	8	1262500	19,42%	16,66%	14,74%	13,35%	12,23%
2008	9	1179007	11,63%	5,41%	0,81%	2,79%	5,77%
2009	10	1199446	11,99%	5,42%	2,10%	0,88%	1,14%
2010	11	1215066	11,94%	5,03%	2,32%	1,55%	1,40%
2011	12	1316011	17,59%	10,92%	8,74%	8,10%	7,80%
2012	13	1213598	8,73%	0,15%	3,70%	5,80%	7,59%
2013	14	1225501	8,75%	0,87%	0,86%	0,75%	0,22%
Средняя ошибка							

6. Выберем модель с наименьшей средней ошибкой аппроксимации. Это модель с α =0,5.

Построим график временного ряда и прогноза для α =0,5



7. Осуществим прогноз числа браков на 2014 год

$$\hat{y}_{2014} = S_{2013} = 1236040$$

Задание

На сайте www.gks.ru выбрать временной ряд по одному из социально-экономических показателей. Построить модель экспоненциального сглаживания для пяти значений параметра адаптации от $\alpha = 0.1$ до $\alpha = 0.9$, с шагом 0.2. Вычислить для каждой модели среднюю ошибку аппроксимации и выбрать лучшую модель. Построить по ней прогноз показателя на следующий период времени.