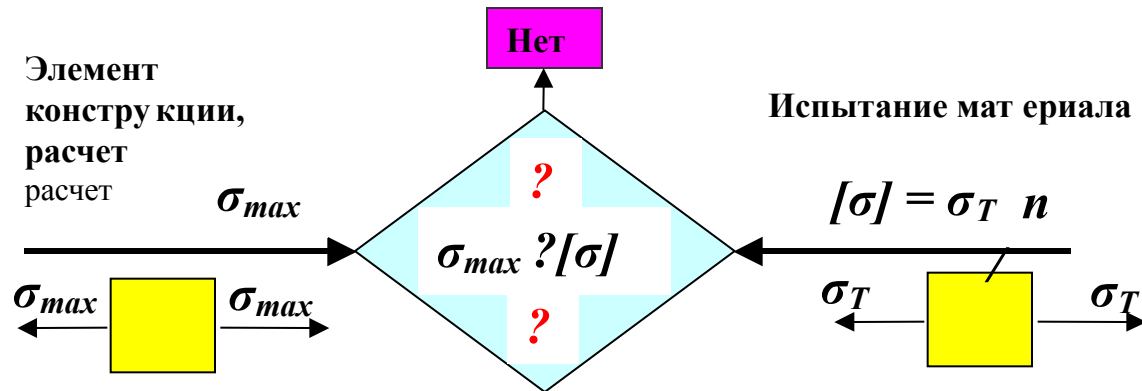


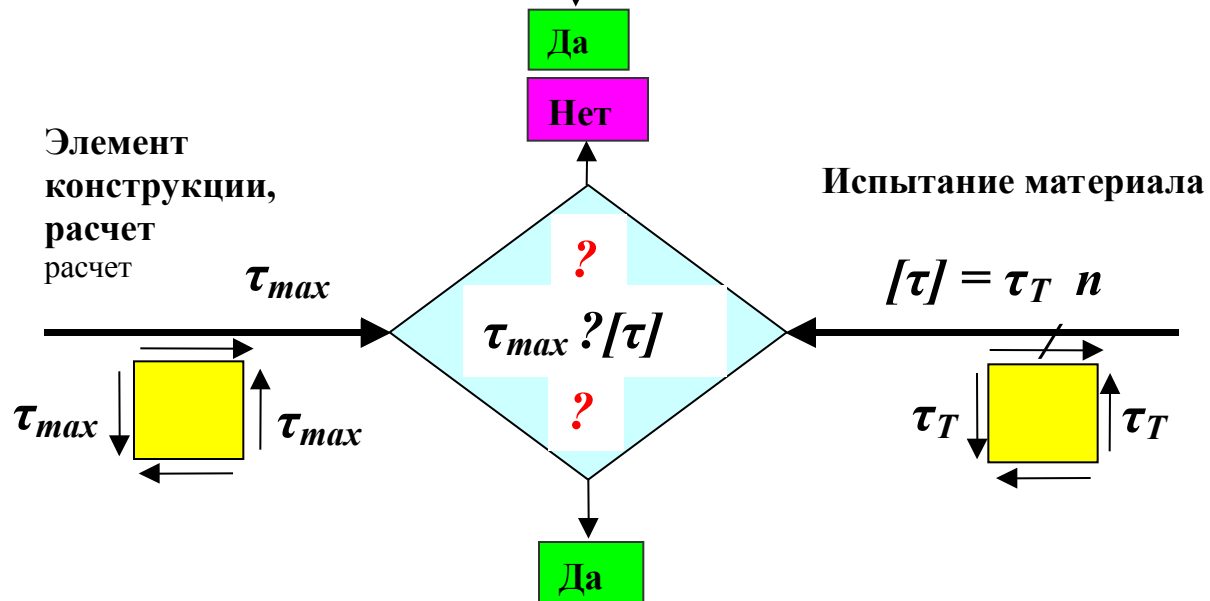
# Технические теории прочности

Расчеты на прочность при растяжении и кручении просто выполнить, так как достаточно просто провести испытания материалов на растяжение и кручение.

Растяжение

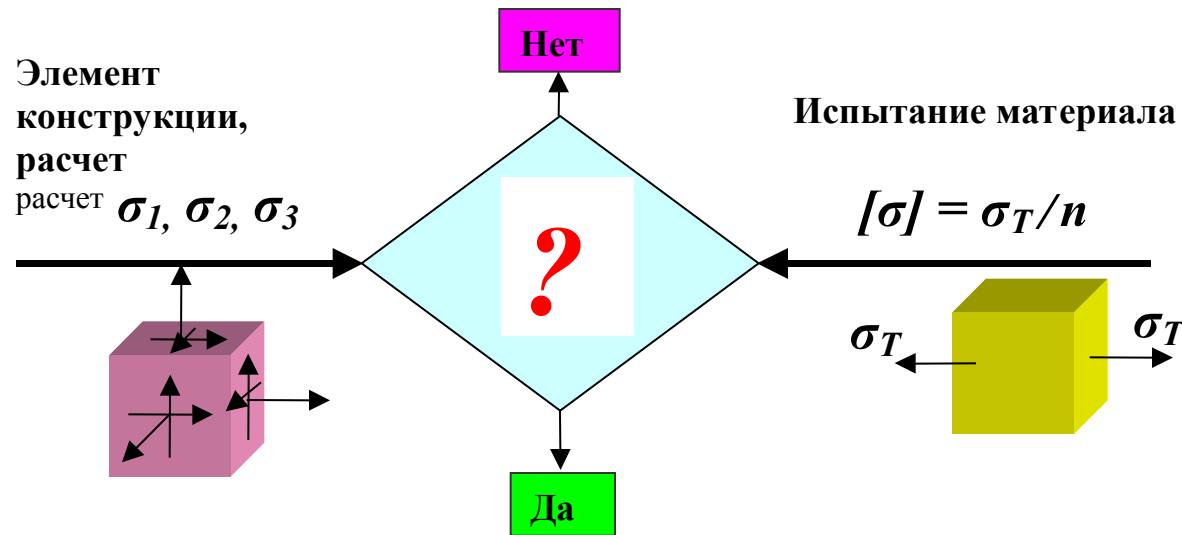


Кручение



# Проблемы расчета на прочность при сложном напряженном состоянии

Но очень часто встречаются случаи, когда напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции не одноосное, а сложное. Каков выход из этого положения?



Выхода два.

1. *Проводить испытания материала при сложном напряженном состоянии.*

Но это технически невозможно из-за бесконечного числа напряженных состояний и из-за громадных технических затруднений.

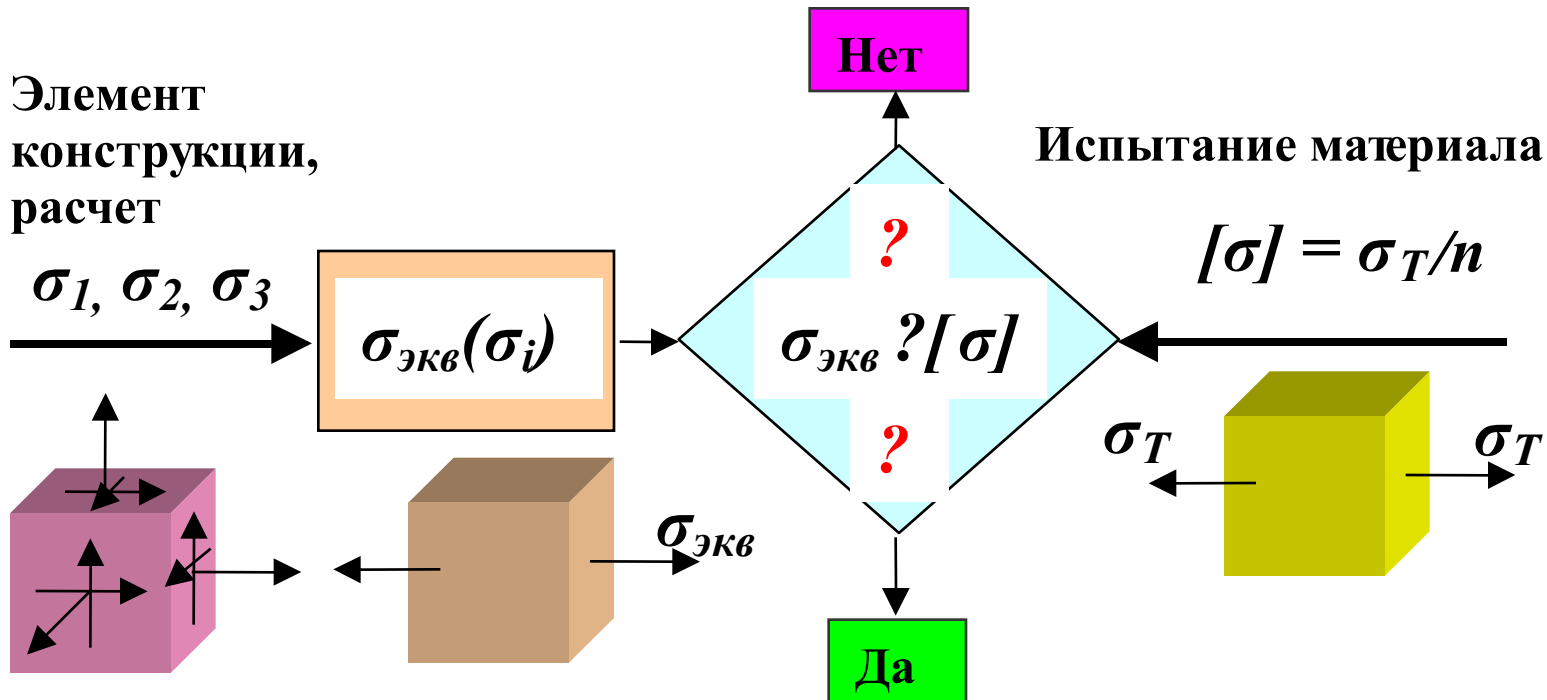
2. *Проводить сравнение сложного напряженного состояния с простым.*

Но непосредственное сравнение двух разнородных состояний, также как и разнородных явлений и величин, невозможно.

# Методология расчета на прочность при сложном НС

Поэтому был избран путь

1. сведения сложного напряженного состояния к эквивалентному ему простому, одноосному, а затем
2. сравнение эквивалентного напряжения с предельным одноосным, определяемым экспериментально.



# Предельные состояния материала

1. Упругое состояние. В этом состоянии материал содержит определенную упругую потенциальную энергию. Но этой энергии еще недостаточно, чтобы могли идти необратимые процессы пластического деформирования или роста трещин.
2. Упругопластическое состояние. В этом состоянии избыток упругой энергии тратится на необратимые пластические деформации.
3. Состояние хрупкого разрушения. В этом состоянии упругой энергии достаточно, чтобы поддерживать неконтролируемый рост трещин.

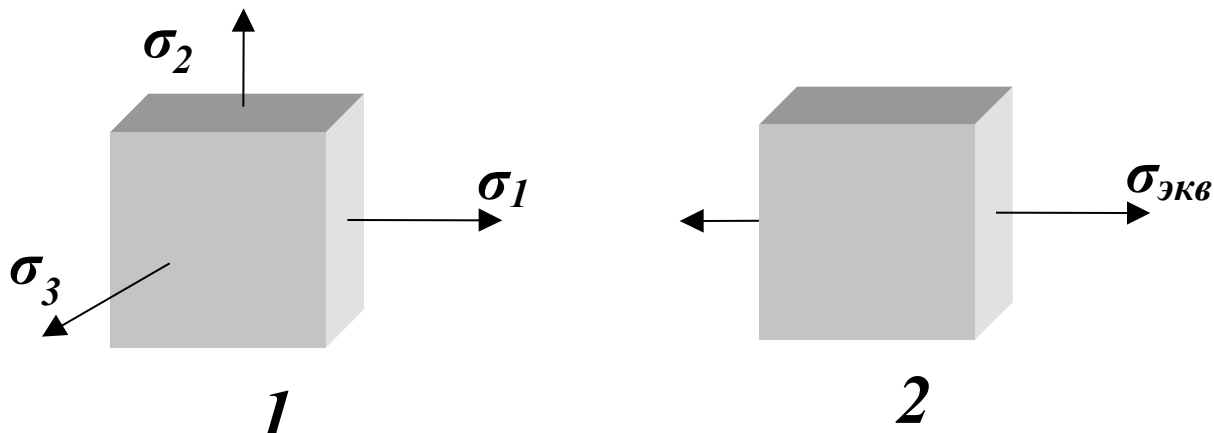
*Предельным напряженным состоянием называют такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение поведения материала, переход от одного механического состояния к другому.*

Для пластичных материалов за предельное напряженное состояние принимают состояние, при котором появляются первые необратимые пластические деформации.

Для хрупких материалов предельное напряженное состояние ассоциируют с состоянием, при котором появляются трещины.

# Эквивалентное напряжение

*Два напряженных состояния **эквивалентны**,  
если они **равноопасны**.*



*Состояния 1 и 2 равноопасны. Поэтому  
состояние 2 эквивалентно состоянию 1*

Эквивалентным напряжением  $\sigma_{\text{экв}}$  будем называть такое напряжение, которое нужно создать в растянутом образце, чтобы возникающее в нем *одноосное* напряженное состояние стало равноопасным с заданным двухосным или трехосным напряженным состоянием.

# Миссия теорий прочности

Но нам необходим критерий эквивалентности, который поможет нам вычислять эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

как функцию главных компонент рассматриваемого напряженного состояния.

Эту задачу выполняют теории прочности.

В основе теорий прочности лежат гипотезы о преимущественном влиянии на прочность одного или нескольких компонентов напряженного состояния.

Эти гипотезы, но доведенные до соответствующего аналитического выражения, позволяющего рассчитывать  $\sigma_{\text{экв}}$ , называются теориями прочности.

# Теория наибольших растягивающих напряжений (I теория)

Два напряженных состояния равноопасны, если равны наибольшие нормальные напряжения, т.е.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1. \quad (1)$$

Критерий прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma_p],$$

где  $[\sigma_p]$  - допускаемое напряжение при растяжении

При одноосном сжатии  $\sigma_3 < 0$ . В этом случае  $\sigma_{\text{экв}}^{I*} = \sigma_3$ ,

и необходимо соблюдение критерия  $\sigma_{\text{экв}}^{I*} = \sigma_3 \leq [\sigma_c]$ ,

где  $[\sigma_c]$  - допускаемое напряжение при сжатии.

# Теория наибольших линейных удлинений (II теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если наибольшие относительные удлинения будут равны.

Для трехосного состояния : 
$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Для одноосного напряженного состояния: 
$$\varepsilon_{max}^{эkv} = \frac{\sigma_{эkv}}{E}$$

С учетом равенства  $\varepsilon_{max}^{эkv} = \varepsilon_{max}$  получаем

$$\sigma_{эkv}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (2)$$

Критерий прочности: 
$$\sigma_{эkv}^{II} \leq [\sigma_p].$$

Если  $\sigma_3 < 0$ , то необходимо соблюдение условия

$$\sigma_{эkv}^{II*} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma_c]$$



# Теория наибольших касательных напряжений (III теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если у них равны наибольшие касательные напряжения.

Для трехосного напряженного состояния:  $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Для одноосного напряженного состояния:  $\tau_{max}^{эkv} = \frac{\sigma_{эkv}}{2}$

С учетом равенства  $\tau_{max}^{эkv} = \tau_{max}$  получаем

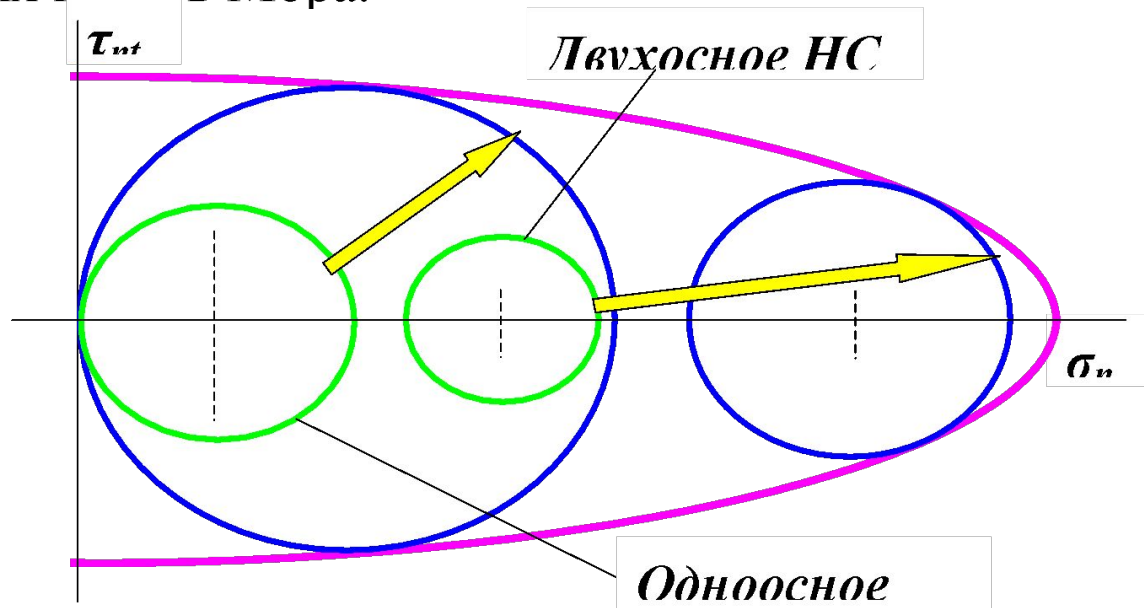
$$\sigma_{эkv}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3)$$

Критерий прочности:

$$\sigma_{эkv}^{III} \leq [\sigma_p]$$

# Теория прочности Мора (IV теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если при одновременном увеличении всех составляющих напряжений круги Мора для этих двух состояний одновременно коснутся огибающей предельных кругов Мора.



$$\sigma_{\text{экв}}^M = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \quad \sigma_{\text{экв}}^M \leq [\sigma_p]$$

# Энергетическая теория прочности (V теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если имеет место равенство удельных потенциальных энергий формоизменения.

Для трехосного напряженного состояния:

$$a_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right].$$

Для одноосного напряженного состояния:  $a_{\phi}^{\text{экв}} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_{\text{экв}}^2$

С учетом равенства  $a_{\phi}^{\text{экв}} = a_{\phi}$  получаем

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (5)$$

Критерий прочности:  $\sigma_{\text{экв}}^V \leq [\sigma_p]$

# Ограничения теорий прочности

## Основные ограничения первой теории:

1. Теория не учитывает двух других главных напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ;
2. Теория не учитывает возможность деформации сдвига.

## Основное ограничение второй теории:

Теория основана на применении закона Гука для упругого состояния. Но при достижении предельного состояния пластичности этот закон теряет силу.

## Основные ограничения третьей теории:

1. Теория не работает, если  $\sigma_1 = \sigma_3$ , что имеет место при трехосном растяжении.
2. Теорией предполагается, что  $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ .
3. Не учитывается среднее главное напряжение  $\sigma_2$ .

## Ограничение теории прочности Мора

Не учитывается среднее главное напряжение  $\sigma_2$ .

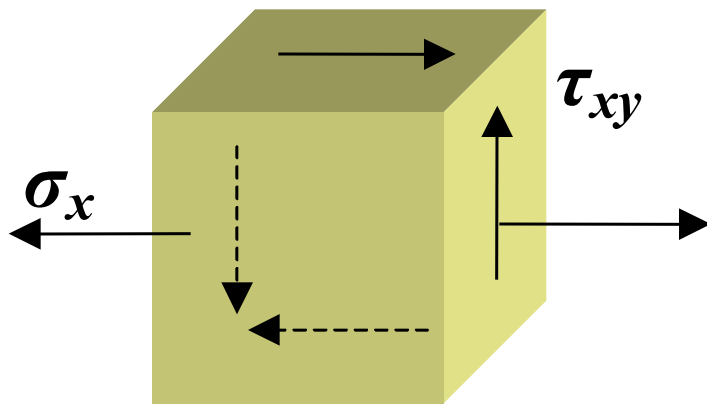
Ограничения V теории прочности те же, что и для III теории.

# Области применений теорий прочности

Для определения применимости той или иной теории прочности необходима информация о механических свойствах данного конструкционного материала.

1. Если материал хрупкий, то применяют I или II теорию прочности;
2. Если материал пластичный, то применяют III или V теорию прочности;
3. Если материал по разному сопротивляется растяжению и сжатию, то применяют теорию прочности Мора (IV теория).

# Эквивалентные напряжения для конкретного двухосного напряженного состояния



$$\sigma_{\text{эквI}} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{эквV}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

# Эквивалентные напряжения для трехосного напряженного состояния (пример расчета)

Дан вектор главных напряжений

$$\sigma := \begin{bmatrix} 622 \\ 208 \\ -230 \end{bmatrix} \cdot \text{MPa}$$

Даны механические свойства конструкционного материала

Модуль упругости

$$E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{MPa}$$

Коэффициент Пуассона

$$\mu := 0.25$$

Допускаемое напряжение при растяжении

$$\sigma_{\text{limP}} := 400 \cdot \text{MPa}$$

Допускаемое напряжение при сжатии

$$\sigma_{\text{limC}} := 500 \cdot \text{MPa}$$

# Эквивалентные напряжения для трехосного напряженного состояния (продолжение 1)

По первой теории прочности

$$\sigma_{\text{eqVI}} := \sigma_1$$

$$\sigma_{\text{eqVI}} = 622 \cdot \text{MPa}$$

По второй теории прочности

$$\sigma_{\text{eqVII}} := \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{\text{eqVII}} = 627.5 \cdot \text{MPa}$$

По третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{eqVIII}} := \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{eqVIII}} = 852 \cdot \text{MPa}$$

По четвертой теории прочности (Mor)

$$\sigma_{\text{eqIV}} := \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{limP}}}{\sigma_{\text{limC}}} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{eqIV}} = 806 \cdot \text{MPa}$$

По пятой теории прочности

$$\sigma_{\text{eqV}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{\text{eqV}} = 737.951 \cdot \text{MPa}$$



# Эквивалентные напряжения для трехосного напряженного состояния (продолжение 2)

$$\text{mean}(s) = 729.09 \text{ МПа}$$

$$S_j := \frac{s_j}{\text{mean}(s)}$$

